

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ

Х А Б А Р Л А Р Ы

ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА
СЕРИЯСЫ**



**СЕРИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ**



**SERIES
OF PHYSICAL AND MATHEMATICAL**

6 (286)

**ҚАРАША–ЖЕЛТОҚСАН 2012 ж.
НОЯБРЬ–ДЕКАБРЬ 2012 г.
NOVEMBER – DECEMBER 2012**

1963 ЖЫЛДЫҢ ҚАҢТАР АЙЫНАН ШЫҒА БАСТАҒАН
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1963 ГОДА
PUBLISHED SINCE JANUARY 1963

ЖЫЛЫНА 6 РЕТ ШЫҒАДЫ
ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД
PUBLISHED 6 TIMES A YEAR

АЛМАТЫ, ҚР ҰҒА
АЛМАТЫ, НАН РК
ALMATY, NAS RK

Бас редактор
ҚР ҰҒА академигі
Б. Т. Жұмағұлов

Редакция алқасы:

физика-математика ғылымдарының докторы **Н. М. Темірбеков** (бас редактордың орынбасары), ҚР ҰҒА-ның академиктері **Н. Ж. Тәкібаев, С. Н. Харин, Т. Ш. Калменов, Н. Қ. Блиев, Б. Н. Мұқашев, М. Ө. Өтелбаев**, физика-математика ғылымдарының докторы **Қ. Қ. Қадыржанов**, физика-математика ғылымдарының докторы **Н. Т. Данаев**, физика-математика ғылымдарының докторы **Т. С. Рамазанов**, физика-математика ғылымдарының докторы **Ө. Ө. Өмірбаев**, химия ғылымдарының докторы **Н. Бейсен** (жауапты хатшы)

Главный редактор
академик НАН РК
Б. Т. Жумагулов

Редакционная коллегия:

доктор физико-математических наук **Н. М. Темірбеков** (заместитель главного редактора), академики НАН РК **Н. Ж. Такибаев, С. Н. Харин, Т. Ш. Кальменов, Н. К. Блиев, Б. Н. Мукашев, М. О. Отелбаев**, доктор физико-математических наук **К. К. Кадыржанов**, доктор физико-математических наук **Н. Т. Данаев**, доктор физико-математических наук **Т. С. Рамазанов**, доктор физико-математических наук **У. У. Умирбаев**, доктор химических наук **Н. Бейсен** (ответственный секретарь)

Editor-in-chief
academician of the NAS of the RK
B. T. Zhumagulov

Editorial staff:

doctor of physical and mathematical sciences **N.M. Temirbekov** (deputy editor-in-chief), academicians of the NAS of the RK **N. Zh. Takibayev, S. N. Harin, T. Sh. Kalmenov, N. K. Bliiev, B. N. Mukashev, M. O. Otelbaev**, doctor of physical and mathematical sciences **K. K. Kadirzhanov**, doctor of physical and mathematical sciences **N. T. Danaev**, doctor of physical and mathematical sciences **T. S. Ramazanov**, doctor of physical and mathematical sciences **U. U. Umirbaev**, doctor of chemical sciences **N. Beysen** (secretary)

«Известия НАН РК. Серия физико-математическая» I ISSN 1991-346X

Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы)

Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации и архивов Министерства культуры и информации Республики Казахстан №5543-Ж, выданное 01.06.2006 г.

Периодичность: 6 раз в год.

Тираж: 300 экземпляров.

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, ком. 218–220, тел.: 272-13-19, 272-13-18.

Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75.

УДК 539.3

В. Б. РЫСТЫГУЛОВА, Ф. Б. БЕЛИСАРОВА

ДЕФОРМАЦИЯ ПЛАСТИНЫ С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ МЕХАНИЧЕСКИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

КазНПУ им. Абая, КазНУ им. аль-Фараби

В работе получено аналитическое решение изгиба тонкой осесимметричной пластины в общем случае с произвольными механическими характеристиками методом частичной дискретизации нелинейных дифференциальных уравнений.

Рассматривается круглая пластина, на которой действует равномерно распределенная нормальная нагрузка q_z . Пластина нагрета неравномерно по радиусу и равномерно – по толщине. Контур пластины предполагаем свободно защемленным.

В работе получено аналитическое решение изгиба тонкой осесимметричной пластины в общем случае с произвольными механическими характеристиками [1]:

$$\frac{d}{dr}(\nabla^2 \Phi) = \frac{1}{D_0} \frac{dD_0}{dr} \left(\frac{d^2 \Phi}{dr^2} - \frac{\mu}{r^3} \frac{d\Phi}{dr} \right) + \frac{1}{D_0} \frac{dD_0}{dr} (1-\mu) N_T - (1-\mu) \frac{dN_T}{dr}, \quad (1)$$

$$D_2 \nabla^2 \nabla^2 \omega = q_z(r) - \nabla^2 M_T - 2 \frac{dD_2}{dr} \frac{d^3 \omega}{dr^3} - \left[\nabla^2 D_2 + \frac{1}{r} \frac{dD_2}{dr} + \frac{\mu}{r} \frac{dD_2}{dr} \right] \frac{d^2 \omega}{dr^2} - \left[\frac{\mu}{r} \frac{d^2 D_2}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dD_2}{dr} \right] \frac{d\omega}{dr}, \quad (2)$$

где

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr};$$

$$\nabla^2 \nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) \right] \right\} = \frac{d^4}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{d}{dr};$$

$$D_0(r) = \frac{1}{1-\mu^2} \int_{-h/2}^{h/2} E(r,z) dz;$$

$$N_T(r) = \frac{1}{1-\mu} \int_{-h/2}^{h/2} E(r,z) \alpha(r,z) T(r,z) dz;$$

$$D_2(r) = \frac{1}{1-\mu^2} \int_{-h/2}^{h/2} E(r,z) z^2 dz;$$

$$M_T(r) = \frac{1}{1-\mu} \int_{-h/2}^{h/2} E(r,z) \alpha(r,z) T(r,z) z dz;$$

Φ – функция напряжения; μ – коэффициент Пуассона; q_z – поперечная нагрузка; ω – прогиб произвольной точки срединной поверхности.

Двум дифференциальным уравнениям третьего, четвертого порядка должны соответствовать семь граничных условий. Однако число условий может быть сокращено, так как сама по себе Φ нас не интересует: достаточно определить ее первую производную по r .

Граничные условия для Φ :

$$\left. \frac{d\Phi}{dr} \right|_{r=0} = 0, \quad \left. \frac{1}{r} \cdot \frac{d\Phi}{dr} \right|_{r=R} = 0.$$

Граничные условия для ω :

$$\omega|_{r=R} = 0, \quad -\left. \frac{d\omega}{dr} \right|_{r=R} = 0, \quad \left. \frac{d\omega}{dr} \right|_{r=0} = 0,$$

$$M_r|_{r=R} = D_2 \left(\left. \frac{d^2\omega}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \frac{d\omega}{dr} \right) \right|_{r=R} = 0.$$

Общий вид решения уравнения (1), (2) методом частичной дискретизации профессора А. Н. Тюреходжаева [2] имеет следующий вид:

$$\theta = \int \Psi(r, r_k) e^{\int \alpha(r) dr} dr \cdot \int e^{-\int \alpha(r) dr} dr - \int \Psi(r, r_k) e^{\int \alpha(r) dr} \int e^{-\int \alpha(r) dr} dr dr + C_1 \int e^{-\int \alpha(r) dr} dr + C_2;$$

$$\omega = \iiint e^{-\int \alpha_2(r) dr} \int \Psi_2(r, r_k) e^{\int \alpha_2(r) dr} dr dr dr + B_1 \iiint e^{-\int \alpha_2(r) dr} dr dr dr + B_2 \frac{r^2}{2} + B_3 r + B_4,$$

где

$$\theta = \frac{d\Phi}{dr}, \quad \alpha(r) = \frac{1}{r} - \frac{1}{D_0} \frac{dD_0}{dr}, \quad \beta(r) = \frac{\mu}{r^3} \frac{1}{D_0} \frac{dD_0}{dr} - \frac{1}{r^2},$$

$$\Psi(r, r_k) = \frac{1}{D_0} \frac{dD_0}{dr} (1 - \mu) N_T - (1 - \mu) \frac{dN_T}{dr} - \frac{1}{2} \sum (r_k + r_{k+1}) [\beta(r_k) \theta(r_k) \delta(r - r_k) -$$

$$- \beta(r_{k+1}) \theta(r_{k+1}) \delta(r - r_{k+1})],$$

$$\alpha_2(r) = 2 \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{D_2} \frac{dD_2}{dr} \right),$$

$$\beta_2(r) = \frac{1}{D_2} \frac{d^2 D_2}{dr^2} + \frac{2 + \mu}{r} \frac{1}{D_2} \frac{dD_2}{dr} - \frac{1}{r^2},$$

$$\gamma_2(r) = \frac{\mu}{r} \frac{1}{D_2} \frac{d^2 D_2}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{1}{D_2} \frac{dD_2}{dr} + \frac{1}{r^3}, \quad v = \frac{d\omega}{dr},$$

$$\Psi_2(r, r_k) = \frac{1}{D_2} \left(q_z(r) - \frac{d^2 M_T}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dM_T}{dr} \right) - \frac{1}{2} \sum (r_k + r_{k+1}) \left[\beta_2(r_k) \frac{dv(r_k)}{dr} \delta(r - r_k) -$$

$$- \beta_2(r_{k+1}) \frac{dv(r_{k+1})}{dr} \delta(r - r_{k+1}) \right] - \frac{1}{2} \sum (r_k + r_{k+1}) [\gamma_2(r_k) v(r_k) \delta(r - r_k) -$$

$$- \gamma_2(r_{k+1}) v(r_{k+1}) \delta(r - r_{k+1})].$$

Получено решение для конкретного значения жесткости пластины. Построены кривые изгиба и напряжения.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Гольденблат И.И. Расчет конструкций на тепловые воздействия. – М.: Машиностроение, 1969. – 600 с.
- 2 Тюреходжаев А.Н., Рыстыгулова В.Б. Исследование осесимметрично нагруженной цилиндрической оболочки // Журнал научных публикаций «Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук». – М., 2012. – № 2(37). – С. 29-36. – ISSN 2073 – 0071

В. Б. Рыстығұлова, Ф. Б. Белисарова

ПЛАСТИНАНЫҢ ЕРКІН МЕХАНИКАЛЫҚ СИПАТТАМАЛАРЫ
ЕСКЕРІЛГЕН ДЕФОРМАЦИЯСЫ

Сызықты емес дифференциальдық теңдеулерді бөліктеп дискретизациялау әдісімен жұқа механикалық сипаттамалары еркін таңдалған өсі симметриялы пластина иілуінің аналитикалық шешімі жалпы жағдай үшін алынған.

V. B. Rystygulova, F. B. Belisarova

DEFORMATION PLATE
WITH ARBITRARY MECHANICAL CHARACTERISTICS

In the paper received an analytic solution axisymmetric bending of a thin plate in the general case of arbitrary mechanical characteristics by partial discretization of nonlinear differential equations.

В. Б. РЫСТЫГУЛОВА, Ф. Б. БЕЛИСАРОВА

ДЕФОРМАЦИЯ СОСТАВНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В НЕОДНОРОДНОМ ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ

КазНПУ им. Абая, КазНУ им. аль-Фараби

Рассматривается деформация тонкой составной цилиндрической оболочки в неоднородном температурном поле, общий изгиб которой описывается дифференциальным уравнением четвертого порядка с переменными коэффициентами. Решение задачи получено методом частичной дискретизации дифференциальных уравнений.

Рассматривается тонкая цилиндрическая оболочка, каждая составляющая которой имеет переменную жесткость, общий изгиб которой описывается дифференциальным уравнением четвертого порядка с переменными коэффициентами [1] так, что получение аналитического решения, как правило, представляет значительные трудности. В работе получение такого решения достигнуто привлечением метода частичной дискретизации дифференциальных уравнений [2, 3].

Пусть тонкая цилиндрическая оболочка нагружена осесимметричными радиальной нагрузкой и усилиями, приложенными к торцам: изгибающим моментом M_0 , радиальной перерезывающей Q , растягивающей S_z силами при наличии неравномерного по оси и толщине оболочки температурного поля.

Квазистатическое уравнение равновесия рассматриваемой составной оболочки имеют вид:

$$\frac{d^2}{dz^2} \left[D^j(z) \frac{d^2 u(z)}{dz^2} \right] + \frac{E^j(z)h}{R^2} u(z) = p^* - \alpha^j \frac{(1+\nu^j)}{h} \frac{d^2 f(z)}{dz^2} + \alpha^j \frac{E^j(z)h F(z)}{RD^j(z)}, \quad (1)$$

где

$$u(z) = \sum_{j=1}^m u^j(z) [H(z - z_j) - H(z - z_{j+1})] - \text{прогиб в радиальном направлении};$$

$$D^j(z) = \sum_{j=1}^m \frac{E_j(z)h^3}{12(1-\nu_j^2)} [H(z - z_j) - H(z - z_{j+1})] - \text{переменная цилиндрическая жесткость};$$

$$E^j(z) = \sum_{j=1}^m E_j(z) [H(z - z_j) - H(z - z_{j+1})] - \text{модуль упругости};$$

$$\alpha^j = \sum_{j=1}^m \alpha_j [H(z - z_j) - H(z - z_{j+1})] - \text{коэффициент температурного расширения};$$

$$\nu^j = \sum_{j=1}^m \nu_j [H(z - z_j) - H(z - z_{j+1})] - \text{коэффициент Пуассона составной оболочки};$$

h – толщина; R – радиус срединной поверхности оболочки; $f(z)$ – радиальный перепад температур между наружной и внутренней поверхностями; $F(z)$ – средняя температура по толщине оболочки; $p^* = p - \nu S_z/h$; S_z – продольная осевая сила; p – радиальная нагрузка (рис. 1).

Примем следующие законы изменения характеристик в зависимости от z

$$E_j(z) = \varepsilon_{0j} + \varepsilon_{1j}z,$$

$$f(z) = b_0 + b_1z + b_2z^2,$$

$$F(z) = a_0 + a_1z.$$

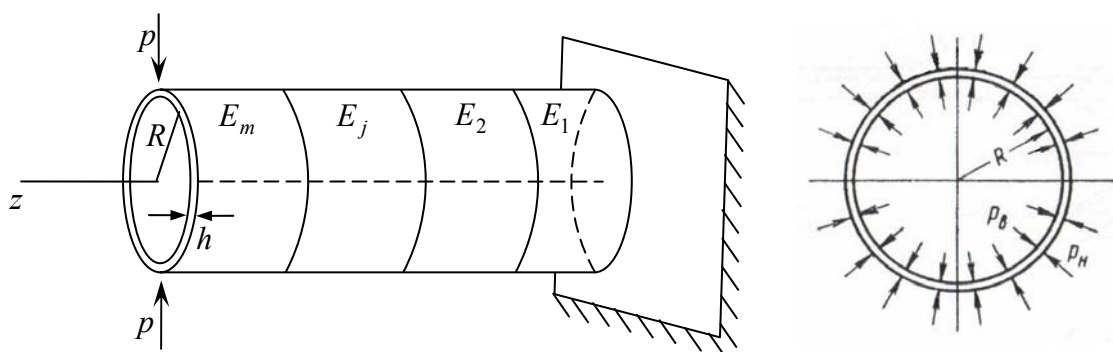


Рис. 1. Тонкая цилиндрическая оболочка, каждая составляющая которой имеет переменную жесткость

Выполнив частичную дискретизацию дифференциального уравнения (1), получим

$$\frac{d^2}{dz^2} \left[D^j(z) \frac{d^2 u(z)}{dz^2} \right] = \sum_{j=1}^m \left[p^* - 2\alpha_j b_2 \frac{1+\nu_j}{h} + 12\alpha_j \frac{(1-\nu_j^2)(a_0 + a_1 z)}{R h^2} - \frac{h}{2R^2} \sum_{k=1}^{n_j} (z_k + z_{k+1}) [(\varepsilon_{0j} + \varepsilon_{1j} z_k) \delta(z - z_k) u(z_k) - (\varepsilon_{0j} + \varepsilon_{1j} z_{k+1}) \delta(z - z_{k+1}) u(z_{k+1})] \right].$$

Пусть на жестко заделанном и свободном торцах выполняются соответственно следующие граничные условия

$$u(z) = 0, \quad \frac{du(z)}{dz} = 0 \text{ при } z = 0, \quad (2)$$

$$M_z(z) = -D^m(z) \frac{d^2 u(z)}{dz^2} = 0, \quad Q(z) = -\frac{d}{dz} \left[D^m(z) \frac{d^2 u(z)}{dz^2} \right] = 0 \text{ при } z = l. \quad (3)$$

С учетом граничных условия (2) и (3) решения уравнения (1) будет иметь следующий вид:

$$u(z) = \sum_{j=1}^m \left[\left(6p^* \frac{1-\nu_j^2}{h^3} - 12\alpha_j b_2 \frac{(1-\nu_j^2)(1+\nu_j)}{h^4} + 72\alpha_j a_0 \frac{(1-\nu_j^2)^2}{R h^5} \right) \left(\frac{1}{6\varepsilon_{1j}} z^3 - \frac{\varepsilon_{0j}}{2\varepsilon_{1j}^2} z^2 + \frac{\varepsilon_{0j}^2}{\varepsilon_{1j}^3} \left[\frac{\varepsilon_{0j}}{\varepsilon_{1j}} \ln(\varepsilon_{0j} + \varepsilon_{1j} z) + z \ln(\varepsilon_{0j} + \varepsilon_{1j} z) - \frac{\varepsilon_{0j}}{\varepsilon_{1j}} - z \right] + 24\alpha_j a_1 \frac{(1-\nu_j^2)^2}{R h^5} \left(\frac{1}{12\varepsilon_{1j}} z^4 - \frac{\varepsilon_{0j}}{6\varepsilon_{1j}^2} z^3 + \frac{\varepsilon_{0j}^2}{2\varepsilon_{1j}^3} z^2 - \frac{\varepsilon_{0j}^3}{\varepsilon_{1j}^4} \left[\frac{\varepsilon_{0j}}{\varepsilon_{1j}} \ln(\varepsilon_{0j} + \varepsilon_{1j} z) + z \ln(\varepsilon_{0j} + \varepsilon_{1j} z) - \frac{\varepsilon_{0j}}{\varepsilon_{1j}} - z \right] \right) - \frac{1-\nu_j^2}{R^2 h^2} \sum_{k=1}^{n_j} (z_k + z_{k+1}) [(z - z_k)^3 H(z - z_k) u(z_k) - (z - z_{k+1})^3 H(z - z_{k+1}) u(z_{k+1})] + C_1 \frac{12(1-\nu_j^2)}{h^3} \left(\frac{1}{2\varepsilon_{1j}} z^2 - \frac{\varepsilon_{0j}}{\varepsilon_{1j}^2} \left[\frac{\varepsilon_{0j}}{\varepsilon_{1j}} \ln(\varepsilon_{0j} + \varepsilon_{1j} z) + z \ln(\varepsilon_{0j} + \varepsilon_{1j} z) - \frac{\varepsilon_{0j}}{\varepsilon_{1j}} - z \right] \right) + C_2 \frac{12(1-\nu_j^2)}{h^3} \frac{1}{\varepsilon_{1j}} \left[\frac{\varepsilon_{0j}}{\varepsilon_{1j}} \ln(\varepsilon_{0j} + \varepsilon_{1j} z) + z \ln(\varepsilon_{0j} + \varepsilon_{1j} z) - \frac{\varepsilon_{0j}}{\varepsilon_{1j}} - z \right] + C_3 z + C_4 \right],$$

где

$$\begin{aligned}
 C_1 &= -p^*l + 2\alpha_j b_2 \frac{1+\nu_m}{h} l - 12\alpha_j \frac{1-\nu_m^2}{Rh^2} \left(a_0 l + \frac{1}{2} a_1 l^2 \right) + \\
 &+ \frac{h}{2R^2} \sum_{k=1}^{n_j} (z_k + z_{k+1}) \left[(\varepsilon_{0j} + \varepsilon_{1j} z_k) H(l - z_k) u(z_k) - (\varepsilon_{0j} + \varepsilon_{1j} z_{k+1}) H(l - z_{k+1}) u(z_{k+1}) \right], \\
 C_2 &= \frac{1}{2} p^* l^2 - \alpha_j b_2 \frac{1+\nu_m}{h} l^2 + 12\alpha_j \frac{1-\nu_m^2}{Rh^2} \left(\frac{1}{2} a_0 l^2 + \frac{1}{3} a_1 l^3 \right) + \frac{h}{2R^2} \sum_{k=1}^{n_j} (z_k + z_{k+1}) \times \\
 &\times \left[(\varepsilon_{0j} + \varepsilon_{1j} z_k) (l - z_k) H(l - z_k) u(z_k) - (\varepsilon_{0j} + \varepsilon_{1j} z_{k+1}) (l - z_{k+1}) H(l - z_{k+1}) u(z_{k+1}) \right] - \\
 &- \frac{hl}{2R^2} \sum_{k=1}^{n_j} (z_k + z_{k+1}) \left[(\varepsilon_{0j} + \varepsilon_{1j} z_k) H(l - z_k) u(z_k) - (\varepsilon_{0j} + \varepsilon_{1j} z_{k+1}) H(l - z_{k+1}) u(z_{k+1}) \right], \\
 C_3 &= - \left(6p^* \frac{1-\nu_j^2}{h^3} - 12\alpha_j b_2 \frac{(1-\nu_j^2)(1+\nu_j)}{h^4} + 72\alpha_j a_0 \frac{(1-\nu_j^2)^2}{Rh^5} \right) \frac{\varepsilon_{0j}^2}{\varepsilon_{1j}^3} \ln \varepsilon_{0j} + \\
 &+ 24\alpha_j a_1 \frac{(1-\nu_j^2)^2}{Rh^5} \frac{\varepsilon_{0j}^3}{\varepsilon_{1j}^4} \ln \varepsilon_{0j} + \frac{12(1-\nu_j^2)}{h^3} \frac{\varepsilon_{0j}}{\varepsilon_{1j}} \ln \varepsilon_{0j} \left(-p^*l + 2\alpha_j b_2 \frac{1+\nu_m}{h} l - \right. \\
 &- 12\alpha_j \frac{1-\nu_m^2}{Rh^2} \left(a_0 l + \frac{1}{2} a_1 l^2 \right) + \frac{h}{2R^2} \sum_{k=1}^{n_j} (z_k + z_{k+1}) \times \\
 &\times \left[(\varepsilon_{0j} + \varepsilon_{1j} z_k) H(l - z_k) u(z_k) - (\varepsilon_{0j} + \varepsilon_{1j} z_{k+1}) H(l - z_{k+1}) u(z_{k+1}) \right] - \\
 &- \frac{12(1-\nu_j^2)}{h^3} \frac{1}{\varepsilon_{1j}} \ln \varepsilon_{0j} \left[\frac{1}{2} p^* l^2 - \alpha_j b_2 \frac{1+\nu_m}{h} l^2 + 12\alpha_j \frac{1-\nu_m^2}{Rh^2} \left(\frac{1}{2} a_0 l^2 + \frac{1}{3} a_1 l^3 \right) + \right. \\
 &+ \frac{h}{2R^2} \sum_{k=1}^{n_j} (z_k + z_{k+1}) \left[(\varepsilon_{0j} + \varepsilon_{1j} z_k) (l - z_k) H(l - z_k) u(z_k) - (\varepsilon_{0j} + \varepsilon_{1j} z_{k+1}) (l - z_{k+1}) \times \right. \\
 &\times H(l - z_{k+1}) u(z_{k+1}) \left. \right] - \frac{hl}{2R^2} \sum_{k=1}^{n_j} (z_k + z_{k+1}) \left[(\varepsilon_{0j} + \varepsilon_{1j} z_k) H(l - z_k) u(z_k) - (\varepsilon_{0j} + \varepsilon_{1j} z_{k+1}) \times \right. \\
 &\times H(l - z_{k+1}) u(z_{k+1}) \left. \right] \left. \right], \\
 C_4 &= - \left(6p^* \frac{1-\nu_j^2}{h^3} - 12\alpha_j b_2 \frac{(1-\nu_j^2)(1+\nu_j)}{h^4} + 72\alpha_j a_0 \frac{(1-\nu_j^2)^2}{Rh^5} \right) \frac{\varepsilon_{0j}^3}{\varepsilon_{1j}^4} (\ln \varepsilon_{0j} - 1) + \\
 &+ 24\alpha_j a_1 \frac{(1-\nu_j^2)^2}{Rh^5} \frac{\varepsilon_{0j}^4}{\varepsilon_{1j}^5} (\ln \varepsilon_{0j} - 1) + \frac{12(1-\nu_j^2)}{h^3} \frac{\varepsilon_{0j}^2}{\varepsilon_{1j}^3} (\ln \varepsilon_{0j} - 1) \left(-p^*l + 2\alpha_j b_2 \frac{1+\nu_m}{h} l - \right. \\
 &- 12\alpha_j \frac{1-\nu_m^2}{Rh^2} \left(a_0 l + \frac{1}{2} a_1 l^2 \right) + \frac{h}{2R^2} \sum_{k=1}^{n_j} (z_k + z_{k+1}) \times \\
 &\times \left[(\varepsilon_{0j} + \varepsilon_{1j} z_k) H(l - z_k) u(z_k) - (\varepsilon_{0j} + \varepsilon_{1j} z_{k+1}) H(l - z_{k+1}) u(z_{k+1}) \right] -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{12(1-\nu_j^2)}{h^3} \frac{\varepsilon_{0j}}{\varepsilon_{1j}^2} (\ln \varepsilon_{0j} - 1) \left[\frac{1}{2} p^* l^2 - \alpha_j b_2 \frac{1+\nu_m}{h} l^2 + 12 \alpha_j \frac{1-\nu_m^2}{R h^2} \left(\frac{1}{2} a_0 l^2 + \frac{1}{3} a_1 l^3 \right) + \right. \\
 & + \frac{h}{2R^2} \sum_{k=1}^{n_j} (z_k + z_{k+1}) [(\varepsilon_{0j} + \varepsilon_{1j} z_k)(l - z_k) H(l - z_k) u(z_k) - (\varepsilon_{0j} + \varepsilon_{1j} z_{k+1})(l - z_{k+1}) \times \\
 & \times H(l - z_{k+1}) u(z_{k+1})] - \frac{hl}{2R^2} \sum_{k=1}^{n_j} (z_k + z_{k+1}) [(\varepsilon_{0j} + \varepsilon_{1j} z_k) H(l - z_k) u(z_k) - (\varepsilon_{0j} + \varepsilon_{1j} z_{k+1}) \times \\
 & \times H(l - z_{k+1}) u(z_{k+1})] \Big].
 \end{aligned}$$

Получены выражения угла поворота, изгибающего момента и перерезывающей силы составной оболочки:

$$\begin{aligned}
 \frac{du}{dz} = & \sum_{j=1}^m \left[\left(6p^* \frac{1-\nu_j^2}{h^3} - 12\alpha_j b_2 \frac{(1-\nu_j^2)(1+\nu_j)}{h^4} + 72\alpha_j a_0 \frac{(1-\nu_j^2)^2}{R h^5} \right) \left(\frac{1}{2\varepsilon_{1j}} z^2 - \frac{\varepsilon_{0j}}{\varepsilon_{1j}^2} z + \right. \right. \\
 & + \left. \frac{\varepsilon_{0j}^2}{\varepsilon_{1j}^3} \ln(\varepsilon_{0j} + \varepsilon_{1j} z) \right) + 24\alpha_j a_1 \frac{(1-\nu_j^2)^2}{R h^5} \left(\frac{1}{3\varepsilon_{1j}} z^3 - \frac{\varepsilon_{0j}}{2\varepsilon_{1j}^2} z^2 + \frac{\varepsilon_{0j}^2}{\varepsilon_{1j}^3} z^2 - \frac{\varepsilon_{0j}^3}{\varepsilon_{1j}^4} \ln(\varepsilon_{0j} + \varepsilon_{1j} z) \right) - \\
 & - \frac{3(1-\nu_j^2)}{R^2 h^2} \sum_{k=1}^{n_j} (z_k + z_{k+1}) [(z - z_k)^2 H(z - z_k) u(z_k) - (z - z_{k+1})^2 H(z - z_{k+1}) u(z_{k+1})] + \\
 & + \frac{12(1-\nu_j^2)}{h^3} \left(\frac{1}{\varepsilon_{1j}} z - \frac{\varepsilon_{0j}}{\varepsilon_{1j}^2} \ln(\varepsilon_{0j} + \varepsilon_{1j} z) \right) \left(-p^* l + 2\alpha_j b_2 \frac{1+\nu_m}{h} l - 12\alpha_j \frac{1-\nu_m^2}{R h^2} \left(a_0 l + \frac{1}{2} a_1 l^2 \right) + \right. \\
 & + \left. \frac{h}{2R^2} \sum_{k=1}^{n_j} (z_k + z_{k+1}) [(\varepsilon_{0j} + \varepsilon_{1j} z_k) H(l - z_k) u(z_k) - (\varepsilon_{0j} + \varepsilon_{1j} z_{k+1}) H(l - z_{k+1}) u(z_{k+1})] \right) + \\
 & + \frac{12(1-\nu_j^2)}{h^3} \frac{1}{\varepsilon_{1j}} \ln(\varepsilon_{0j} + \varepsilon_{1j} z) \left(\frac{1}{2} p^* l^2 - \alpha_j b_2 \frac{1+\nu_m}{h} l^2 + 12\alpha_j \frac{1-\nu_m^2}{R h^2} \left(\frac{1}{2} a_0 l^2 + \frac{1}{3} a_1 l^3 \right) + \right. \\
 & + \left. \frac{h}{2R^2} \sum_{k=1}^{n_j} (z_k + z_{k+1}) [(\varepsilon_{0j} + \varepsilon_{1j} z_k)(l - z_k) H(l - z_k) u(z_k) - (\varepsilon_{0j} + \varepsilon_{1j} z_{k+1})(l - z_{k+1}) \times \right. \\
 & \times H(l - z_{k+1}) u(z_{k+1})] - \frac{hl}{2R^2} \sum_{k=1}^{n_j} (z_k + z_{k+1}) [(\varepsilon_{0j} + \varepsilon_{1j} z_k) H(l - z_k) u(z_k) - (\varepsilon_{0j} + \varepsilon_{1j} z_{k+1}) \times \\
 & \times H(l - z_{k+1}) u(z_{k+1})] \Big) - \left(6p^* \frac{1-\nu_j^2}{h^3} - 12\alpha_j b_2 \frac{(1-\nu_j^2)(1+\nu_j)}{h^4} + 72\alpha_j a_0 \frac{(1-\nu_j^2)^2}{R h^5} \right) \frac{\varepsilon_{0j}^2}{\varepsilon_{1j}^3} \ln \varepsilon_{0j} + \\
 & + 24\alpha_j a_1 \frac{(1-\nu_j^2)^2}{R h^5} \frac{\varepsilon_{0j}^3}{\varepsilon_{1j}^4} \ln \varepsilon_{0j} + \frac{12(1-\nu_j^2)}{h^3} \frac{\varepsilon_{0j}}{\varepsilon_{1j}} \ln \varepsilon_{0j} \left(-p^* l + 2\alpha_j b_2 \frac{1+\nu_m}{h} l - \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -12\alpha_j \frac{1-\nu_m^2}{Rh^2} \left(a_0 l + \frac{1}{2} a_1 l^2 \right) + \frac{h}{2R^2} \sum_{k=1}^{n_j} (z_k + z_{k+1}) \times \\
 & \times \left[(\varepsilon_{0j} + \varepsilon_{1j} z_k) H(l - z_k) u(z_k) - (\varepsilon_{0j} + \varepsilon_{1j} z_{k+1}) H(l - z_{k+1}) u(z_{k+1}) \right] - \\
 & - \frac{12(1-\nu_j^2)}{h^3} \frac{1}{\varepsilon_{1j}} \ln \varepsilon_{0j} \left[\frac{1}{2} p^* l^2 - \alpha_j b_2 \frac{1+\nu_m}{h} l^2 + 12\alpha_j \frac{1-\nu_m^2}{Rh^2} \left(\frac{1}{2} a_0 l^2 + \frac{1}{3} a_1 l^3 \right) \right] + \\
 & + \frac{h}{2R^2} \sum_{k=1}^{n_j} (z_k + z_{k+1}) \left[(\varepsilon_{0j} + \varepsilon_{1j} z_k) (l - z_k) H(l - z_k) u(z_k) - (\varepsilon_{0j} + \varepsilon_{1j} z_{k+1}) (l - z_{k+1}) \times \right. \\
 & \times H(l - z_{k+1}) u(z_{k+1}) \left. \right] - \frac{hl}{2R^2} \sum_{k=1}^{n_j} (z_k + z_{k+1}) \left[(\varepsilon_{0j} + \varepsilon_{1j} z_k) H(l - z_k) u(z_k) - (\varepsilon_{0j} + \varepsilon_{1j} z_{k+1}) \times \right. \\
 & \times H(l - z_{k+1}) u(z_{k+1}) \left. \right], \\
 M_z(z) = & \sum_{j=1}^m \left[-\frac{1}{2} p^* z^2 + \alpha_j b_2 \frac{1+\nu_j}{h} z^2 - 12\alpha_j \frac{1-\nu_j^2}{Rh^2} \left(\frac{a_0}{2} z^2 + \frac{a_1}{6} z^3 \right) + \frac{h}{2R^2} \sum_{k=1}^{n_j} (z_k + z_{k+1}) \times \right. \\
 & \times \left[(\varepsilon_{0j} + \varepsilon_{1j} z_k) (z - z_k) H(z - z_k) u(z_k) - (\varepsilon_{0j} + \varepsilon_{1j} z_{k+1}) (z - z_{k+1}) H(z - z_{k+1}) u(z_{k+1}) \right] + \\
 & + p^* l z - 2\alpha_j b_2 \frac{1+\nu_m}{h} l z + 12\alpha_j \frac{1-\nu_m^2}{Rh^2} \left(a_0 l + \frac{1}{2} a_1 l^2 \right) z - \\
 & - \frac{hz}{2R^2} \sum_{k=1}^{n_j} (z_k + z_{k+1}) \left[(\varepsilon_{0j} + \varepsilon_{1j} z_k) H(l - z_k) u(z_k) - (\varepsilon_{0j} + \varepsilon_{1j} z_{k+1}) H(l - z_{k+1}) u(z_{k+1}) \right] - \\
 & - \frac{1}{2} p^* l^2 + \alpha_j b_2 \frac{1+\nu_m}{h} l^2 - 12\alpha_j \frac{1-\nu_m^2}{Rh^2} \left(\frac{1}{2} a_0 l^2 + \frac{1}{3} a_1 l^3 \right) - \frac{h}{2R^2} \sum_{k=1}^{n_j} (z_k + z_{k+1}) \times \\
 & \times \left[(\varepsilon_{0j} + \varepsilon_{1j} z_k) (l - z_k) H(l - z_k) u(z_k) - (\varepsilon_{0j} + \varepsilon_{1j} z_{k+1}) (l - z_{k+1}) H(l - z_{k+1}) u(z_{k+1}) \right] + \\
 & + \frac{hl}{2R^2} \sum_{k=1}^{n_j} (z_k + z_{k+1}) \left[(\varepsilon_{0j} + \varepsilon_{1j} z_k) H(l - z_k) u(z_k) - (\varepsilon_{0j} + \varepsilon_{1j} z_{k+1}) H(l - z_{k+1}) u(z_{k+1}) \right], \\
 Q(z) = & \sum_{j=1}^m \left[-p^* z + 2\alpha_j b_2 \frac{1+\nu_j}{h} z - 12\alpha_j \frac{1-\nu_j^2}{Rh^2} \left(a_0 z + \frac{a_1}{2} z^2 \right) + \frac{h}{2R^2} \sum_{k=1}^{n_j} (z_k + z_{k+1}) \times \right. \\
 & \times \left[(\varepsilon_{0j} + \varepsilon_{1j} z_k) H(z - z_k) u(z_k) - (\varepsilon_{0j} + \varepsilon_{1j} z_{k+1}) H(z - z_{k+1}) u(z_{k+1}) \right] + \\
 & + p^* l - 2\alpha_j b_2 \frac{1+\nu_m}{h} l + 12\alpha_j \frac{1-\nu_m^2}{Rh^2} \left(a_0 l + \frac{1}{2} a_1 l^2 \right) - \\
 & - \frac{h}{2R^2} \sum_{k=1}^{n_j} (z_k + z_{k+1}) \left[(\varepsilon_{0j} + \varepsilon_{1j} z_k) H(l - z_k) u(z_k) - (\varepsilon_{0j} + \varepsilon_{1j} z_{k+1}) H(l - z_{k+1}) u(z_{k+1}) \right].
 \end{aligned}$$

Угол прогиба составной оболочки

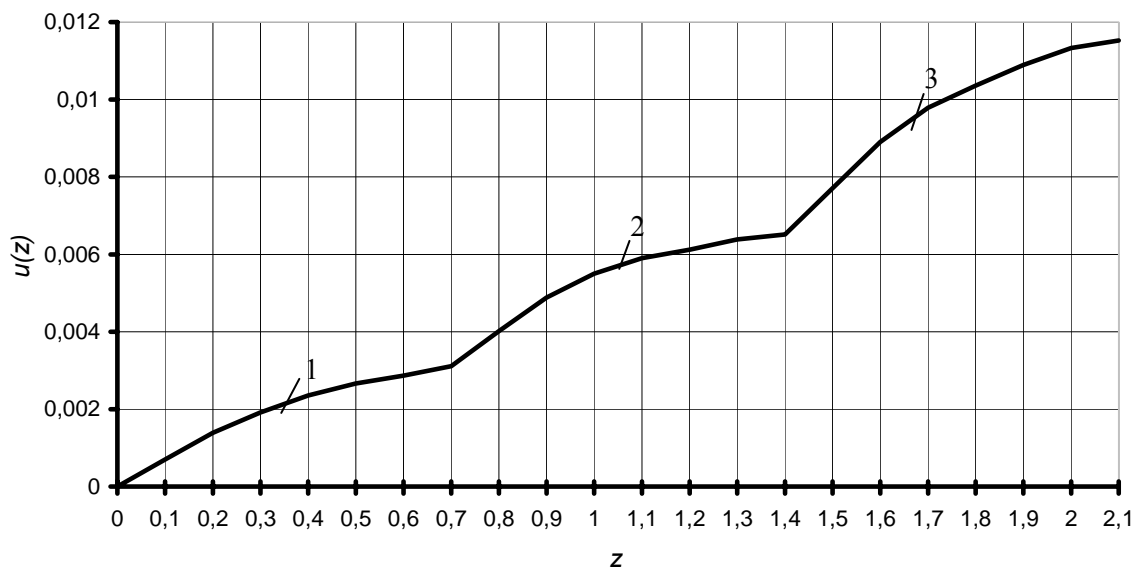


Рис. 2. Угол прогиба тонкой составной цилиндрической оболочки:
1 – сталь, 2 – латунь, 3 – медь

На приведенном рис. 2 показан общий угол прогиба тонкой составной цилиндрической оболочки, состоящий из стали, латуни и меди, нагруженной усилием $p = 2 \cdot 10^3 \text{ Н/м}^2$ в поперечном направлении рассматриваемой оболочки при расчетных данных $E_1 = 19,62 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$, $E_2 = 13,73 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$, $E_3 = 10,79 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$, $\nu_1 = 0,28$, $\nu_2 = 0,42$, $\nu_3 = 0,23$, $\alpha_1 = 14,2 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}$, $\alpha_2 = 17,0 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}$, $\alpha_3 = 18,9 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}$, $R = 5 \text{ см}$, $h = 1 \text{ см}$, $l = 2,1 \text{ м}$.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. –М.: Высшая школа, 1968. – 512 с.
- 2 Тюреходжаев А.Н., Кырыкбаев Б.Ж.. Решение задачи об изгибе гибкой круглой пластины методом частичной дискретизации дифференциальных уравнений // Известия НАН РК. Сер. физ.-мат. – 2004. – № 3. – С. 66-71.
- 3 Тюреходжаев А.Н., Рыстыгулова В.Б. Изгиб составной неоднородной кольцевой пластины // Тезисы VII Международной конференции «Проблемы прочности материалов и сооружений на транспорте», 23–24 апреля 2008 г., Санкт-Петербург. – С. 178-179.

В. Б. Рыстыгулова, Ф. Б. Белисарова

ҚҰРАМА ЦИЛИНДРЛІК ҚАБЫҚШАНЫҢ БІРТЕКТІ ЕМЕС
ТЕМПЕРАТУРАЛЫҚ ӨРІСТЕГІ ДЕФОРМАЦИЯСЫ

Біртекті емес температуралық өрісте, жалпы иілуі коэффициенттері айнымалы төртінші ретті дифференциальдық тендеумен жазылған, жұқа құрама цилиндрлік қабықшаның деформациясы қарастырылған. Есептің шешімі дифференциальдық тендеулерді бөліктеп дискретизациялау әдісімен алынған.

V. B. Rystygulova, F. B. Belisarova

DEFORMATION OF COMPOSITE CYLINDRICAL SHELL
IN INHOMOGENEOUS TEMPERATURE FIELD

Considered the deformation of a thin composite cylindrical shells in a nonuniform temperature field the total bending which is described by a differential equation of the fourth order with variable coefficients. Solution of the problem using the method of partial discretization of differential equations.

В. Б. РЫСТЫГУЛОВА, Ф. Б. БЕЛИСАРОВА

ЗАДАЧА ОБ ИЗГИБЕ СОСТАВНОЙ УПРУГОЙ НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАСТИНЫ

КазНПУ им. Абая, КазНУ им. аль-Фараби

Построено дифференциальное уравнение изгиба тонкой составной упругой неоднородной осесимметричной пластины с отверстием, каждая составляющая которой имеет переменную жесткость и работает в неравномерном температурном поле. Аналитическое решение задачи для линейного закона изменения жесткости на каждом участке пластины получено методом частичной дискретизации нелинейных дифференциальных уравнений.

Построено дифференциальное уравнение изгиба тонкой составной упругой неоднородной осесимметричной пластины с отверстием, каждая составляющая которой имеет переменную жесткость и работает в неравномерном температурном поле. Аналитическое решение задачи получено методом частичной дискретизации нелинейных дифференциальных уравнений [1]. В качестве иллюстрации приводится решение задачи для линейного закона изменения жесткости на каждом участке пластины.

Сложный изгиб таких пластин приводит к рассмотрению системы двух связанных уравнений второго порядка с разрывными коэффициентами. В данной работе рассматривается изгиб составной пластины без учета растяжения или сжатия. Тогда дифференциальное уравнение изгиба пластины, состоящей из m кольцевых, имеет вид

$$r^2 \frac{d^2 \mathcal{G}}{dr^2} + r \left(1 + \frac{r}{D^j} \frac{dD^j}{dr} \right) \frac{d\mathcal{G}}{dr} + \left(\frac{\nu^j r}{D^j} \frac{dD^j}{dr} - 1 \right) \mathcal{G} + \frac{r}{D^j} \left(\int q_z^j r dr - C \right) - \frac{(1 + \nu^j) r^2}{D^j} \frac{d}{dr} (\chi_T D^j) = 0, \quad (1)$$

где

$$D^j = \sum_{j=1}^m \frac{E_j h^3}{12(1 - \nu_j^2)} [H(r - r_j) - H(r - r_{j+1})], \quad - \int q_z^j r dr + C = Q_r r,$$

где \mathcal{G} – угол поворота пластины; D^j – цилиндрическая жесткость изгиба; E_j – модуль упругости; ν^j – коэффициент Пуассона j -той составляющей пластины; h – толщина пластины;

$q_z^j = \sum_{j=1}^m q_{zj} [H(r - r_j) - H(r - r_{j+1})]$ – распределенная поперечная нагрузка;

$Q_r^j = \sum_{j=1}^m Q_{rj} [H(r - r_j) - H(r - r_{j+1})]$ – поперечное усилие; C – постоянная, определяемая из условия

$$r = r_b \quad Q_r = Q_0,$$

где r_b – внешний радиус составной пластины.

Соотношения между изгибающим моментами и прогибом имеют выражения

$$M_r^j = -D^j \left[\frac{d\mathcal{G}}{dr} + \nu^j \frac{\mathcal{G}}{r} + (1 + \nu^j) \chi_T \right],$$

$$M_\theta^j = -D^j \left[\nu^j \frac{d\mathcal{G}}{dr} + \frac{1}{r} \mathcal{G} + (1 + \nu^j) \chi_T \right].$$

Дискретизируя третий член уравнения (1), имеем

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathcal{G}}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} + \frac{D'^j}{D^j} \right) \frac{d\mathcal{G}}{dr} = & -\frac{1}{rD^j} \left(\int q_z^j r \, dr - \left[Q_0 r_b + q_z^j \frac{r_b^2}{2} \right] \right) + \\ & + (1 + \nu) \chi_T \frac{D'^j}{D^j} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^{n_j} (r_{kj} + r_{(k+1)j}) \right) \times \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^{n_j} (r_{kj} + r_{(k+1)j}) \right) \times \\ & \times \left[\frac{1}{r_{kj}^2} \left(\nu r_{kj} \left(\frac{D'^j}{D^j} [H(r - r_{kj}) - H(r - r_{(k+1)j})] + [\delta(r - r_{kj}) - \delta(r - r_{(k+1)j})] \right) - 1 \right) \times \right. \\ & \times \mathcal{G}(r_{kj}) \delta(r - r_{kj}) - \frac{1}{r_{(k+1)j}^2} \left(\nu_j r_{(k+1)j} \left(\frac{D'^j}{D^j} [H(r - r_{(k+1)j}) - H(r - r_{(k+2)j})] + \right. \right. \\ & \left. \left. + [\delta(r - r_{(k+1)j}) - \delta(r - r_{(k+2)j})] - 1 \right) \mathcal{G}(r_{(k+1)j}) \delta(r - r_{(k+1)j}) \right]. \end{aligned}$$

Рассмотрим задачу для частного случая линейного изменения жесткости по участкам пластины

$$D^j(r) = \sum_{j=1}^m (a_j r + b_j) [H(r - r_j) - H(r - r_{j+1})].$$

Тогда общее решение уравнения (1) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{G} = \sum_{j=1}^m \left(C_1 \frac{a_j}{b_j} \ln \frac{r}{r + b_j / a_j} + C_2 + \frac{a_j}{b_j} \ln \frac{r}{r + b_j / a_j} \int \Phi(r, r_k) r (r + b_j / a_j) dr - \right. \\ \left. - \frac{a_j}{b_j} \int \Phi(r, r_k) r (r + b_j / a_j) \ln \frac{r}{r + b_j / a_j} dr \right), \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(r, r_k) = & -\frac{1}{r a_j (r + b_j / a_j)} \left(\int q_{zj} r \, dr - \left[Q_0 r_b + q_{zj} \frac{r_b^2}{2} \right] \right) + (1 + \nu_j) \chi_T \frac{1}{r + b_j / a_j} - \\ & - \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{n_j} (r_{kj} + r_{(k+1)j}) \right) \left[\frac{1}{r_{kj}^2} \left(\nu r_{kj} \frac{1}{r_{kj} + b_j / a_j} - 1 \right) \mathcal{G}(r_{kj}) \delta(r - r_{kj}) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{r_{(k+1)j}^2} \left(\nu r_{(k+1)j} \frac{1}{r_{(k+1)j} + b_j / a_j} - 1 \right) \mathcal{G}(r_{(k+1)j}) \delta(r - r_{(k+1)j}) \right]. \end{aligned}$$

Граничные условия задачи примем

$$\begin{aligned} r = r_b, \quad \mathcal{G} = 0, \\ r = r_a, \quad -D^1 \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial r} + \frac{\nu_1}{r} \mathcal{G} + (1 + \nu_1) \chi_T \right) = M_0. \end{aligned}$$

Решение задачи для угла поворота составной пластины может быть записано следующим образом

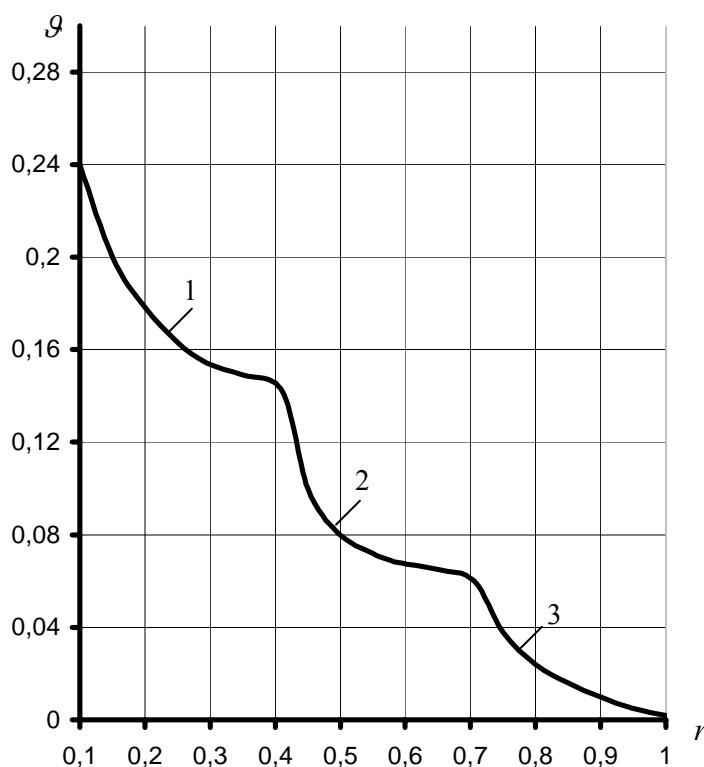
$$\begin{aligned} \mathcal{G} = & \sum_{j=1}^m \left(C_1 \frac{a_j}{b_j} \ln \left(r + \frac{b_j}{a_j} \right) + C_2 + \frac{q_{zj}}{2} \left[-\frac{r}{6a_j} + \frac{b_j}{3a_j^2} r - \frac{b_j^2}{3a_j^3} \ln \left(r + \frac{b_j}{a_j} \right) \right] \right) + \\ & + \frac{1}{a_j} \left[Q_0 r_b + q_{zj} \frac{r_b^2}{2} \right] \ln \left(r + \frac{b_j}{a_j} \right) - (1 + \nu_j) \chi_T \left[-\frac{r}{2} + \frac{b_j}{2a_j} \ln \left(r_b + \frac{b_j}{a_j} \right) \right] + \frac{a_j}{2b_j} \ln \frac{r}{r + b_j / a_j} \times \\ & \times \sum_{k=1}^{n_j} (r_{kj} + r_{(k+1)j}) \left[\left(\nu_j - \frac{r_{kj} + b_j / a_j}{r_{kj}} \right) \mathcal{G}(r_{kj}) H(r - r_{kj}) - \right. \\ & \left. - \left(\nu_j - \frac{r_{(k+1)j} + b_j / a_j}{r_{(k+1)j}} \right) \mathcal{G}(r_{(k+1)j}) H(r - r_{(k+1)j}) \right] + \frac{a_j}{2b_j} \sum_{k=1}^{n_j} (r_{kj} + r_{(k+1)j}) \left[\ln \frac{r_{kj}}{r_{kj} + b_j / a_j} \times \right. \\ & \times \left(\nu_j - \frac{r_{kj} + b_j / a_j}{r_{kj}} \right) \mathcal{G}(r_{kj}) H(r - r_{kj}) - \ln \frac{r_{(k+1)j}}{r_{(k+1)j} + b_j / a_j} \left(\nu_j - \frac{r_{(k+1)j} + b_j / a_j}{r_{(k+1)j}} \right) \times \\ & \left. \times \mathcal{G}(r_{(k+1)j}) H(r - r_{(k+1)j}) \right], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} C_1 = & \frac{1}{\frac{1}{r_a(r_a + b_1 / a_1)} + \frac{\nu_1 a_1}{r_a b_1} \ln \frac{r_a}{r_a + b_1 / a_1} - \frac{\nu_1 a_m}{r_a b_m} \ln \frac{r_a}{r_a + b_m / a_m}} \times \\ & \times \left(\frac{-M_0}{a_1(r_a + b_1 / a_1)} + \frac{\nu_1 q_{zm}}{r_a} \left[-\frac{r_b^2}{6a_m} + \frac{b_m}{3a_m^2} r_b - \frac{b_m^2}{3a_m^3} \ln(r_b + b_m / a_m) \right] \right) + \\ & + \frac{\nu_1}{r_a} \frac{1}{a_m} \left[Q_0 r_b + q_{zm} \frac{r_b^2}{2} \right] \ln(r_b + b_m / a_m) - \frac{\nu_1}{r_a} (1 + \nu_m) \chi_T \left[-\frac{r_b}{2} + \frac{b_m}{2a_m} \ln(r_b + b_m / a_m) \right] - \\ & - \frac{\nu_1}{r_a} \frac{a_m}{2b_m} \ln \frac{r_b}{r_b + b_m / a_m} \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^{n_j} (r_{kj} + r_{(k+1)j}) \left[\left(\nu_j - \frac{r_{kj} + b_j / a_j}{r_{kj}} \right) \mathcal{G}(r_{kj}) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \left(\nu_j - \frac{r_{(k+1)j} + b_j / a_j}{r_{(k+1)j}} \right) \mathcal{G}(r_{(k+1)j}) \right] \right) + \frac{\nu_1 a_m}{r_a} \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^{n_j} (r_{kj} + r_{(k+1)j}) \left[\ln \frac{r_{kj}}{r_{kj} + b_j / a_j} \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \left(\nu_j - \frac{r_{kj} + b_j / a_j}{r_{kj}} \right) \mathcal{G}(r_{kj}) - \ln \frac{r_{(k+1)j}}{r_{(k+1)j} + b_j / a_j} \left(\nu_j - \frac{r_{(k+1)j} + b_j / a_j}{r_{(k+1)j}} \right) \mathcal{G}(r_{(k+1)j}) \right] \right) - \\ & - \frac{q_z}{2} \left[-\frac{r_a}{3a_1} + \frac{b_1}{3a_1^2} r - \frac{b_1^2}{3a_1^3} \frac{1}{r_a + b_1 / a_1} \right] - \frac{1}{a_1} \left[Q_0 r_b + q_{z1} \frac{r_b^2}{2} \right] \frac{1}{r_a + b_1 / a_1} + \\ & + (1 + \nu_1) \chi_T \left[-\frac{1}{2} + \frac{b_1}{2a_1} \frac{1}{r_a + b_1 / a_1} \right] - \frac{\nu_1 q_{z1}}{r_a} \left[-\frac{r_a^2}{6a_1} + \frac{b_1}{3a_1^2} r_a - \frac{b_1^2}{3a_1^3} \ln \left(r_a + \frac{b_1}{a_1} \right) \right] - \\ & - \frac{\nu_1}{r_a} \frac{1}{a_1} \left[Q_0 r_b + q_{z1} \frac{r_b^2}{2} \right] \ln \left(r_a + \frac{b_1}{a_1} \right) + \frac{\nu_1}{r_a} (1 + \nu_1) \chi_T \left[-\frac{r_a}{2} + \frac{b_1}{2a_1} \ln \left(r_a + \frac{b_1}{a_1} \right) \right] - (1 + \nu_1) \chi_T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_2 = & -\frac{\frac{a_m}{b_m} \ln \frac{r_b}{r_b + b_m / a_m}}{1 + \frac{v_1 a_1}{r_a b_1} \ln \frac{r_a}{r_a + b_1 / a_1} - \frac{v_1 a_m}{r_a b_m} \ln \frac{r_a}{r_a + b_m / a_m}} \times \\
 & \times \left(\frac{-M_0}{a_1(r_a + b_1 / a_1)} + \frac{v_1 q_{zm}}{r_a} \left[-\frac{r_b^2}{6a_m} + \frac{b_m}{3a_m^2} r_b - \frac{b_m^2}{3a_m^3} \ln(r_b + b_m / a_m) \right] + \frac{v_1}{r_a} \frac{1}{a_m} \left[Q_0 r_b + q_{zm} \frac{r_b^2}{2} \right] \right) \times \\
 & \times \ln(r_b + b_m / a_m) - \frac{v_1}{r_a} (1 + v_m) \chi_T \left[-\frac{r_b}{2} + \frac{b_m}{2a_m} \ln(r_b + b_m / a_m) \right] - \frac{v_1 a_m}{r_a 2b_m} \ln \frac{r_b}{r_b + b_m / a_m} \times \\
 & \times \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^{n_j} (r_{kj} + r_{(k+1)j}) \left[\left(v_j - \frac{r_{kj} + b_j / a_j}{r_{kj}} \right) \mathcal{G}(r_{kj}) - \left(v_j - \frac{r_{(k+1)j} + b_j / a_j}{r_{(k+1)j}} \right) \mathcal{G}(r_{(k+1)j}) \right] \right) + \frac{v_1 a_m}{r_a 2b_m} \\
 & \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^{n_j} (r_{kj} + r_{(k+1)j}) \left[\ln \frac{r_{kj}}{r_{kj} + b_j / a_j} \left(v_j - \frac{r_{kj} + b_j / a_j}{r_{kj}} \right) \mathcal{G}(r_{kj}) - \ln \frac{r_{(k+1)j}}{r_{(k+1)j} + b_j / a_j} \right. \right. \times \\
 & \times \left. \left. \left(v_j - \frac{r_{(k+1)j} + b_j / a_j}{r_{(k+1)j}} \right) \mathcal{G}(r_{(k+1)j}) \right] \right) - \frac{q_z}{2} \left[-\frac{r_a}{3a_1} + \frac{b_1}{3a_1^2} r - \frac{b_1^2}{3a_1^3} \frac{1}{r_a + b_1 / a_1} \right] - \frac{1}{a_1} \times \\
 & \times \left[Q_0 r_b + q_{z1} \frac{r_b^2}{2} \right] \frac{1}{r_a + b_1 / a_1} + (1 + v_1) \chi_T \left[-\frac{1}{2} + \frac{b_1}{2a_1} \frac{1}{r_a + b_1 / a_1} \right] - \frac{v_1 q_{z1}}{r_a} \times \\
 & \times \left[-\frac{r_a^2}{6a_1} + \frac{b_1}{3a_1^2} r_a - \frac{b_1^2}{3a_1^3} \ln \left(r_a + \frac{b_1}{a_1} \right) \right] - \frac{v_1}{r_a} \frac{1}{a_1} \left[Q_0 r_b + q_{z1} \frac{r_b^2}{2} \right] \ln \left(r_a + \frac{b_1}{a_1} \right) + \\
 & + \frac{v_1}{r_a} (1 + v_1) \chi_T \left[-\frac{r_a}{2} + \frac{b_1}{2a_1} \ln \left(r_a + \frac{b_1}{a_1} \right) \right] - (1 + v_1) \chi_T - \\
 & - \frac{q_{zm}}{2} \left[-\frac{r_b^2}{6a_m} + \frac{b_m}{3a_m^2} r_b - \frac{b_m^2}{3a_m^3} \ln \left(r_b + \frac{b_m}{a_m} \right) \right] - \frac{1}{a_m} \left[Q_0 r_b + q_{zm} \frac{r_b^2}{2} \right] \ln \left(r_b + \frac{b_m}{a_m} \right) + \\
 & + (1 + v_m) \chi_T \left[-\frac{r_b}{2} + \frac{b_m}{2a_m} \ln \left(r_b + \frac{b_m}{a_m} \right) \right] + \frac{a_m}{2b_m} \ln \frac{r_b}{r_b + b_m / a_m} \times \\
 & \times \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^{n_j} (r_{kj} + r_{(k+1)j}) \left[\left(v_j - \frac{r_{kj} + b_j / a_j}{r_{kj}} \right) \mathcal{G}(r_{kj}) - \right. \right. \\
 & - \frac{a_m}{2b_m} \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^{n_j} (r_{kj} + r_{(k+1)j}) \left[\ln \frac{r_{kj}}{r_{kj} + b_j / a_j} \left(v_j - \frac{r_{kj} + b_j / a_j}{r_{kj}} \right) \mathcal{G}(r_{kj}) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \ln \frac{r_{(k+1)j}}{r_{(k+1)j} + b_j / a_j} \left(v_j - \frac{r_{(k+1)j} + b_j / a_j}{r_{(k+1)j}} \right) \mathcal{G}(r_{(k+1)j}) \right] \right) \left. \right].
 \end{aligned}$$

Результаты расчета для выбранного закона изменения жесткости показаны на графике.



Зависимость угла поворота кольцевой пластины от радиуса:
1 – свинец, 2 – алюминий, 3 – латунь

Из приведенного графика, как и следовало ожидать, видно, что угол поворота, а также прогиб, усилия и изгибающие моменты имеют различные законы изменения для различных участков рассматриваемой пластины. Для сплошной пластины решение задачи получено в работе А. Д. Коваленко [2].

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Тюреходжаев А.Н., Калжанова Г.К. Сложный изгиб гибкой кольцевой пластины в осесимметричном температурном поле // Доклады НАН РК. – 2005. – № 2. – С. 86-92.
- 2 Коваленко А.Д. Круглые пластины переменной толщины. – М.: Физматгиз, 1959. – 294 с.

В. Б. Рыстығұлова, Ф. Б. Белисарова

ҚҰРАМА СЕРПІМДІ БІРТЕКТІ ЕМЕС ПЛАСТИНА ИЛІМІНІҢ ЕСЕБІ

Ортасы ойық жұқа, әрбір құраушысының қатаңдығы айнымалы және біртекті емес температуралық өрісте жұмыс жасайтын, құрама серпімді біртекті емес өсі симметриялы пластина иілуінің дифференциальдық теңдеуі құрылған. Пластинаның әрбір бөлігіндегі қатаңдықтың өзгеруінің сызықты заңы үшін есептің аналитикалық шешімі сызықты емес дифференциальдық теңдеулерді бөліктеп дискретизациялау әдісімен алынған.

V. B. Rystygulova, F. B. Belisarova

THE BENDING PROBLEM OF THE COMPLEX ELASTIC HETEROGENEOUS PLATE

Built a differential equation of the complex elastic bending of a thin plate with a non-uniform axisymmetric hole, each component of which has a variable stiffness and works in non-uniform temperature field. Analytical solution of the problem for a law change stiffness in each section of the plate received by the partial discretization of nonlinear differential equations.

УДК 004.9 (076)

А. Е. САДЕНОВ

СИНТЕЗ РЕЧИ КАЗАХСКОГО ЯЗЫКА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВЕРОЯТНОСТНОЙ МОДЕЛИ СКРЫТЫХ МАРКОВСКИХ ЦЕПЕЙ

Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилева, г. Астана

В работе представлено описание математической модели скрытых марковских цепей. Представлено описание марковских процессов для задач синтеза речи. Также описан алгоритм синтезирования речи. Представлена таблица транскрибирования текста казахского языка. Описана практическая реализация данного метода для казахского языка в виде синтезатора свободной речи.

Введение. Синтез речи по тексту или коду сообщения может быть использован в технике связи, в информационно-справочных системах, для помощи слепым и немым, при управлении человеком со стороны автомата, компьютера, учитывая современное развитие техники и появления мобильных платформ, создание синтеза речи казахского языка является необходимым и актуальным.

Синтез речи, основанный на скрытых марковских моделях, может синтезировать речь с произвольного текста, в чем и заключается новизна и удобство данного способа – необходимость создания и хранения большого текстового корпуса отсутствует.

Математическая вероятностная модель. Скрытая модель Маркова – это вероятностная модель множества случайных переменных $\{O_1, \dots, O_t, Q_1, \dots, Q_t\}$. Переменные O_t – известные дискретные наблюдения, а Q_t – «скрытые» дискретные величины. В рамках скрытой модели Маркова есть два независимых утверждения, обеспечивающих сходимость данного алгоритма:

t -я скрытая переменная при известной $(t-1)$ -ой переменной независима от всех предыдущих $(t-1)$ переменных, то есть $P(Q_t | Q_{t-1}, Q_{t-2}, \dots, Q_1, O_1) = P(Q_t | Q_{t-1})$;

t -е известное наблюдение зависит только от t -го состояния, то есть не зависит от времени $P(O_t | Q_t, Q_{t-1}, Q_{t-2}, \dots, Q_1, O_1) = P(O_t | Q_t)$.

Далее следует описать алгоритм «предположений и максимизаций» для поиска максимальной вероятностной оценки параметров скрытой модели Маркова при заданном наборе наблюдений. Этот алгоритм также известен как алгоритм Баума – Уэлша.

Q_t – это дискретная случайная переменная, принимающая одно из N значений $(1 \dots N)$. Будем полагать, что данная модель Маркова, определенная как $P(Q_t | Q_{t-1})$, однородна по времени, то есть независима от t . Тогда можно задать $P(Q_t | Q_{t-1})$ как независящую от времени стохастическую матрицу перемещений $A = \{a_{ij}\} = p(Q_t = j | Q_{t-1} = i)$. Особый случай для времени $t = 1$ определяется начальным распределением $\pi_i = P(Q_1 = i)$.

Будем считать, что мы в состоянии j в момент времени t , если $Q_t = j$. Последовательность заданных состояний определяется как $q = (q_1, \dots, q_T)$, где $q_t \in \{1 \dots N\}$, является состоянием в момент t .

Наблюдение может иметь одно из L возможных значений, $O_t \in \{o_1, \dots, o_L\}$. Вероятность заданного вектора наблюдений в момент времени t для состояния j определяется как $b_j(o_t) = P(O_t = o_t | Q_t = j)$

$B = \{b_{ij}\}$ – это матрица L на N . Заданная последовательность наблюдений O выражается как $O = (O_1 = o_1, \dots, O_T = o_T)$.

Следовательно, мы можем описать скрытую модель Маркова с помощью $\lambda = (A, B, \pi)$. При заданном векторе наблюдений O алгоритм Баума – Уэлша находит $\lambda^* = \max_{\lambda} P(O | \lambda)$.

λ максимизирует вероятность наблюдений O .

Марковские процессы в синтезе речи. Применительно к марковским процессам задача синтеза речи описывается как наблюдаемая последовательность $O = O_1, O_2 \dots O_n$ и модель $\lambda = (A, B, \pi)$. Необходимо подобрать последовательность состояний системы λ , которая лучше всего соответствует наблюдаемой последовательности.

Для подбора параметров используется алгоритм Баума-Уэлша, который позволяет для каждого состояния просчитать максимальное значение вероятности выходной последовательности состояния.

При заданном векторе наблюдений O алгоритм Баума – Уэлша находит $\lambda^* = \max_{\lambda} P(O | \lambda)$, λ максимизирует вероятность наблюдений O . Алгоритм итеративно обновляет параметр λ до схождения в одной точке.

Модель речевого синтеза. Формально модель речевого синтеза может быть представлена в виде двух слоев марковских цепей.

1. Символьный слой – входная последовательность ассоциирована с символами алфавита (это не обязательно должен быть обычный буквенный алфавит, но любой, например, алфавит фонем). Этот слой осуществляет ввод символов при синтезе. Данный слой обучается по алгоритму Баума-Уэлша с использованием эталонов выходных фонем или букв. Выходная последовательность представляет собой набор параметров для генерации отдельных фонем.

2. Связующий слой – этот слой получает выходные фонемы от символьного слоя и также является слоем, обучающимся по алгоритму Баума-Уэлша. Выходом слоя является вектор эффекторов – элементов, конечное представление которых управляется заданными параметрами в модели синтеза. Связь эффекторов с параметрами модели синтеза осуществляется через карту эффекторов. Этот слой позволяет сопоставить каждому фонемному параметру некоторый вектор эффекторов, позволяющий объединить отдельные фонемы, а, следовательно, и определенный синтезируемый звук.

Обучение проводится сначала на отдельные буквы, далее – фонемные данные. Таким образом, получив матрицу вероятностей для каждого слоя и сохранив ее, мы можем получить модель, основанную на скрытых марковских цепях, которая при входных параметрах – фонемах дает на выходе синтезированный звук.

Программная реализация. В работе была использована выборка из 109 сбалансированных по количеству фонем предложений, записанных и сохраненных в виде wave-файлов с частотой дискретизации 16 kHz. Каждый файл помечался кодовым обозначением kk[номер].wav. Их текстовые соответствия назывались также kk[номер].txt.

Текстовые сообщения были транскрибированы согласно правилам, указанным в списке разметок аллофонов.

Далее при обучении данной выборкой звуковой сигнал снимался плавающим окном размером в 25 мс, со смещением 5 мс и сглаживался окном Блэсмана. С помощью алгоритма MFCC извлекались мел-кэпстральные коэффициенты сигнала и сопутствующие векторы: дельта и дельта-дельта коэффициенты. Количество мел-кэпстральных и сопутствующих коэффициентов равно 25, включая нулевой вектор.

Согласно звуковым атрибутам аллофона формируется дерево решений для модели Маркова. В данной работе каждая модель имела 3 состояния, расположенных последовательно слева-направо.

Причем каждое из этих состояний имело плотность распределения вероятностей согласно нормальному Гауссову распределению. Количество листьев на дереве не превышало 6615 состояний. Каждая модель Маркова соответствовала одной фонеме с ее множеством состояний и множеством выходных значений.

При последовательном соединении этих моделей мы получаем цельный аппарат, который на выходе получает мэл-кэпстральные коэффициенты. Порядок обучения производился по методу Баума-Уэлша, описанному выше. Наблюдаемыми векторами являлись транскрипции слова, а ожидаемыми результатами – записанные заранее обучаемые выборки.

Практические результаты. В качестве примера сравнения возьмем слово из тестовой выборки и сравним оригинальный звук и сгенерированный. На рис. 1 изображена спектрограмма слова «сөйтін», записанная диктором. На рис. 2 – спектрограмма уже сгенерированного слова.

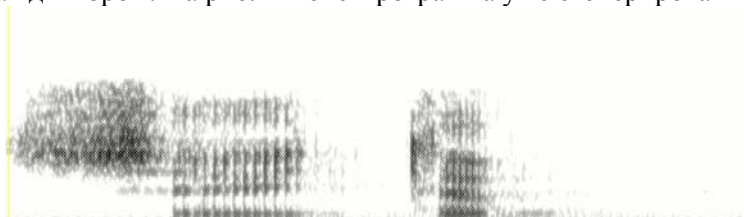


Рис. 1. Спектрограмма слова «сөйтін»

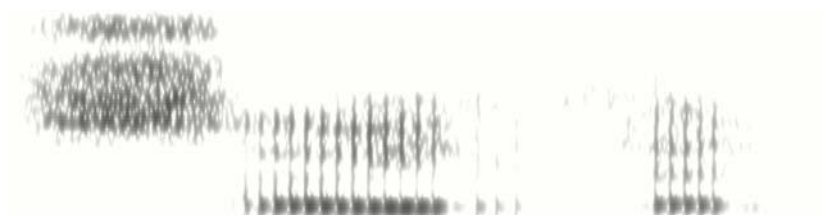


Рис. 2. Спектрограмма синтезированного слова «сөйтін»

По слуховым ощущениям синтезированное слово имеет призвуки вокодера – так называемая «электронность» звучания. Этого можно не столько избежать, сколько уменьшить за счет более оптимальной обучающей выборки, состоящей, как минимум, из 450 предложений со сбалансированной фонемной структурой.

Вывод.

Синтез речи является технологией, позволяющей человеку не только имитировать голос, но и создавать новые, совершенно уникальные интерфейсы. Развитие технологий синтеза приведет к значительному прогрессу в тех областях деятельности человека, в которых они могут применяться: общение, коммуникации, интерфейсное взаимодействие.

Современные решения в области синтеза речи сегодня базируются на статистических моделях, параметры которых просчитываются по аннотированной тексто-фонетической базе данных. Идеальным вариантом для учета многофакторной природы этого просодического феномена является такая база данных, которая содержит информацию, статистически значимую по объему, а список учитываемых параметров по возможности расширен и включает все значимые факторы (смысловой, синтаксический, фонетический, пунктуационный).

Описанный способ позволяет создавать синтезаторы речи с легкоизменяемыми параметрами просодики, тембровой, а также эмоциональной окраски.

Синтезатор, созданный на основе платформы MARY, позволяет генерировать любую речь приемлемого качества из казахского текста с использованием кириллических знаков. Данная работа является первой реализацией синтеза казахского языка, основанной на вероятностной модели, умеющей синтезировать произвольный казахский текст.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шелепов В.Ю. Лекции о распознавании речи. – Д.: ИПШИ «Наука и Образование», 2009. – С. 14-15.
2. Саденов А.Е. Синтез речи. Обзор существующих подходов // Вестник Национальной академии наук Республики Казахстан. – 2009. – № 6. – ISSN 0002-3213.– С. 22.
3. Саденов. А.Е. Программная реализация синтеза звуков на основе частотной модуляции сигнала // Сборник докладов II Республиканской студенческой научно-практической конференции по математике, механике и информатике. ЕНУ им Л. Н. Гумилева. Астана, 2010. – С. 340.
4. Black A.W., Zen H., Tokuda K. Statistical parametric speech synthesis // Proc. of ICASSP. – Apr. 2007. – P. 1229-1232.
5. Ghadeer Al-Said, Moussa Abdallah. An Arabic Text-To-Speech System Based on Artificial Neural Networks // Journal of Computer Science. – 2009. N 5(3). P. 207-213.
6. Terrence J. Sejnowski, Charles R. Rosenberg. Parallel Networks that Learn to Pronounce English Text // Complex Systems. – 1987. – N 1. – P. 145-168.
7. Tokuda K., Zen H., Black A.W. An HMM-based speech synthesis system applied to English // Proc. of 2002 IEEE SSW. – Sept. 2002
8. Tokuda K., Yoshimura T., Masuko T., Kobayashi T., T. Kitamura. Speech parameter generation algorithms for HMM-based speech synthesis, Proc. of ICASSP, pp.1315-1318, June 2000.
9. Speech Analysis FAQ [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://svr-www.eng.cam.ac.uk/~ajr/SA95/SpeechAnalysis.html>
10. Скрытые марковские модели [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://ru.wikibooks.org/wiki/Скрытые_марковские_модели
11. Фролов А.В. Синтез и распознавание речи. Современные решения. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://frolov-lib.ru/books/hi/ch00.html>

А. Е. Саденов

ҚАЗАҚ ТІЛІНІҢ СӨЙЛЕУ СИНТЕЗІ ТАПСЫРМАЛАРЫНА АРНАЛҒАН ЖАСЫРЫН
МАРКОВ ТІЗБЕГІНІҢ ҰҚТИМАЛДЫЛЫҚ ҮЛГІСІН ҚОЛДАНУ

Жасырын Марков тізбегінің математикалық үлгісінің сипаттамасы ұсынылған. Сөйлеу синтезі тапсырмаларына арналған Марков үдерістерінің сипаттамасы ұсынылған. Сонымен қатар сөйлеуді синтездеу алгоритмі сипатталған. Қазақ тілі мәтінін транскрипциялау кестесі ұсынылған. Қазақ тіліне арналған еркін сөйлеу синтезаторы ретіндегі берілген әдістің тәжірибелік іске асырылуы сипатталған.

А. Е. Sadenov

KAZAKH LANGUAGE SPEECH
SYNTHESIS USING HIDDEN MARKOV MODELS

This paper presents a mathematical model of Hidden Markov Models. Paper presents a description of the Markov process for the speech synthesis. Also including algorithm of speech synthesis using HMM. There is a table of Kazakh transcribing. It describes the practical implementation of this method for Kazakh language in the form of free speech synthesizer.

УДК 629.195.01

К. С. ЖИЛИСБАЕВА

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ ИСКУССТВЕННОГО НЕБЕСНОГО ТЕЛА В ПЕРЕМЕННЫХ ДЕЙСТВИЕ-УГОЛ

ДТОО «Институт космических исследований»,
АО «Национальный центр космических исследований и технологий»

В работе рассматривается возмущенное движение симметричного спутника-гиростата в геомагнитном поле. Методом Хори-Депри найдены решения уравнения возмущенного движения спутника-гиростата в переменных действие-угол.

Введение. Исследование движения искусственных небесных тел с учетом различного рода малых возмущений существенно облегчается, если использовать канонические переменные действие-угол.

Гамильтониан невозмущенной задачи, записанный в переменных действие-угол $(I_1, I_2, I_3, w_1, w_2, w_3)$ зависит только от действий I_1, I_2, I_3 , а система канонических уравнений Гамильтона принимает простой вид:

$$\frac{dI_i}{dt} = 0, \quad \frac{dw_i}{dt} = \omega_i(I_1, I_2, I_3)$$
$$\omega_i = \frac{\partial H_0(I_1, I_2, I_3)}{\partial I_i}, \quad (i = 1, 2, 3)$$

и немедленно интегрируется

$$I_i = I_i^0, \quad w_i(t) = \omega_i t + w_i^0$$

Функция Гамильтона возмущенной задачи, выраженная через координаты действие-угол, имеет вид:

$$H(I, w, \varepsilon) = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, w), \quad (1)$$

где $w = (w_1, w_2, w_3)$, $I = (I_1, I_2, I_3)$, $H_1(I, w)$ – пертурбационная функция; ε – малый параметр.

1. Постановка задачи. Рассмотрим возмущенное движение вокруг центра масс намагниченного динамически симметричного спутника-гиростата в геомагнитном поле. Размеры спутника-гиростата предполагаются малыми по сравнению с размерами орбиты, поэтому принимается допущение о независимости движения центра масс от движения вокруг центра масс. Центр масс спутника движется по круговой орбите в экваториальной плоскости, а вращательное движение определяется в основном взаимодействием его магнитного момента с магнитным полем Земли, моделируемого прямым диполем. Тогда вектор \vec{H} напряженности геомагнитного поля направлен по нормали к плоскости орбиты спутника и имеет постоянное значение $\vec{H} = \text{const}$. Как известно, при помещении намагниченного тела в магнитное поле напряженности \vec{H} на это тело будет действовать момент сил, определяемый формулой [1]:

$$\vec{M} = \vec{I} \times \vec{H},$$

где \vec{I} – магнитный момент тела. Магнитный момент на спутнике возникает как из-за наличия на нем функционирующих электрических систем и постоянных магнитов, так и из-за намагничивания металлического корпуса спутника. Будем считать, что магнитный момент спутника \vec{I} складывается из постоянной составляющей \vec{I}_0 и магнитного момента оболочки \vec{I}_H :

$$\vec{I} = \vec{I}_0 + \vec{I}_H .$$

Известно [1], что достаточно вытянутое симметричное тело намагничивается в магнитном поле в основном вдоль своей оси симметрии. Предположим, что ось симметрии оболочки спутника совпадает с одной из его главных центральных осей инерции, например, осью z.

Предположим, что спутник вдоль своих главных осей инерции несет симметричные роторы, которые при своем вращении не меняют распределения масс спутника и обладают постоянным относительно спутника моментом количества движения.

При исследовании движений намагниченного спутника-гиростата учтены малые возмущения, вызванные наличием на борту симметричных роторов и намагничиванием оболочки спутника.

2. Функция Гамильтона возмущенного движения. Переход к переменным действие-угол будем проводить, следуя работе Аксененковой И. М. [2]. Имеют место четыре возможных случая:

$$I) I_2 > |I_3| , II) I_3 > |I_2| , III) I_2 < -|I_3| , IV) I_3 < -|I_2| .$$

Следовательно, достаточно рассматривать только первые два случая. В первом случае функция Гамильтона возмущенной задачи, выраженная через координаты действие-угол, имеет вид:

$$\begin{aligned} I) H_0(I) &= \frac{(I_1 + I_2)^2}{2B} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{B} \right) I_2^2 + m\omega^2 B \frac{I_2 I_3}{2(I_1 + I_2)^2} + \dots \\ H_1(I, w) &= B\omega^2 \{ \varepsilon_1 [mB_{-3,1}^{(1)} \sin(w_2 - 3w_1) + (B_{-2,1}^{(0)} + \\ &+ mB_{-2,1}^{(1)}) \sin(w_2 - 2w_1) + (B_{-1,1}^{(0)} + mB_{-1,1}^{(0)}) \sin(w_2 - w_1) + \\ &+ (B_{0,1}^{(0)} + mB_{0,1}^{(1)}) \sin w_2 + mB_{1,1}^{(1)} \sin(w_1 + w_2) + \dots] + \\ &+ \varepsilon_2 [mB_{-3,1}^{(1)} \cos(w_2 - 3w_1) + (B_{-2,1}^{(0)} + mB_{-2,1}^{(1)}) \cos(w_2 - 2w_1) + \\ &+ (B_{-1,1}^{(0)} + mB_{-1,1}^{(1)}) \cos(w_2 - w_1) + (B_{0,1}^{(0)} + mB_{-0,1}^{(1)}) \cos w_2 + \\ &+ mB_{1,1}^{(1)} \cos(w_1 + w_2)] + \varepsilon_3 [C_{0,0}^{(0)} + mC_{0,0}^{(1)} + (C_{1,0}^{(0)} + mC_{1,0}^{(1)}) \cos w_1 + \\ &+ mC_{2,0}^{(1)} \cos 2w_1] + \varepsilon_4 [D_{0,0}^{(0)} + mD_{0,0}^{(1)} + (D_{1,0}^{(0)} + mD_{1,0}^{(1)}) \cos w_1 + \\ &+ (D_{2,0}^{(0)} + mD_{2,0}^{(1)}) \cos 2w_1 + mD_{3,0}^{(1)} \cos 3w_1] \} + \dots \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $B = A, C$ – главные моменты инерции спутника; m – безразмерный малый параметр; ω – скорость обращения спутника по орбите; ε_i – малые величины; $B_{i,j}^{(k)}, C_{i,j}^{(k)}, D_{i,j}^{(k)}$ – коэффициенты, зависящие от переменных действия.

3. Решение возмущенной задачи методом Хори-Депри. Применим для исследования системы с гамильтонианом вида (2) метод Хори-Депри. Этот метод был разработан Дж. Хори [3] и независимо А. Депри [4]. Благодаря этому методу стало возможным существенно алгоритмизировать классические методы теории возмущений.

После работ Хори и Депри появился ряд исследований, посвященных более детальной разработке метода Хори-Депри и его различным модификациям [5].

Определим каноническую замену переменных $I, w \rightarrow \tilde{I}, \tilde{w}$, где $I = \{I_1, I_2, I_3\}$, $w = \{w_1, w_2, w_3\}$ – старые переменные, $\tilde{I} = \{\tilde{I}_1, \tilde{I}_2, \tilde{I}_3\}$, $\tilde{w} = \{\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \tilde{w}_3\}$ – новые переменные. Тогда имеем по методу Хори-Депри имеем

$$I = \tilde{I} - \frac{\partial S}{\partial \tilde{w}} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial S}{\partial \tilde{w}}, S \right) - \dots, \quad w = \tilde{w} + \frac{\partial S}{\partial \tilde{I}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial S}{\partial \tilde{I}}, S \right) + \dots, \quad (3)$$

Здесь все функции, стоящие в правой части, зависят от новых переменных \tilde{I}, \tilde{w} . Для определения обратной замены получим

$$\tilde{I} = I + \frac{\partial S}{\partial w} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial S}{\partial w}, S \right) + \dots, \quad \tilde{w} = w - \frac{\partial S}{\partial I} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial S}{\partial I}, S \right) - \dots \quad (4)$$

Все функции, стоящие в правой части, зависят от старых переменных I, w .

Здесь S – производящая функция, индуцирующая каноническую замену переменных, явные формулы которой суть (3) и (4).

Пусть K – гамильтониан задачи, выраженный через новые переменные. Тогда

$$K(\tilde{I}, \tilde{w}, \varepsilon) = H(I, w, \varepsilon)$$

так как замена переменных (12) и (13) не зависят от времени.

Как известно [5],

$$K(I, w, \varepsilon) = \exp_s H \quad (5)$$

где $\exp_s H$ обозначен оператор, значение которого на функции H есть

$$\exp_s H = H + (H, S) + \frac{1}{2} ((H, S), S) + \frac{1}{n!} (\dots (H, S) \dots, S).$$

Новую функцию Гамильтона $K(I, w, \varepsilon)$ и производящую функцию $S(I, w, \varepsilon)$ будем искать в виде рядов по малому параметру ε :

$$S = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m S_m(I, w) \quad K = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m K_m(I, w).$$

Приравнявая члены одинакового порядка по ε в правой и левой частях соотношения (5), получим:

$$(S_m, H_0) = F_m - K_m, \quad (6)$$

где F_m определяется как некоторая комбинация скобок Пуассона функций $S_1, S_2, \dots, S_{k-1}, H_0, H_1$.

Задавая посредством какого-либо правила вид преобразованного гамильтониана K и решая систему (6) относительно S_j для всех целых чисел j , определим каноническую замену переменных, преобразующую гамильтониан H к виду K .

После преобразования формула (6) имеет вид:

$$\omega_i \frac{\partial S_m}{\partial w_i} + K_m = F_m.$$

В выражение производящей функций S неизбежно войдут знаменатели вида $n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2$, где n_1, n_2 – целые числа, которые могут обратиться в нуль на резонансной поверхности $n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2 = 0$. Поэтому генератор Ли S нельзя задать как аналитическую функцию во всем фазовом пространстве механической системы с гамильтонианом (1).

Рассмотрим нерезонансный случай. Для случая I) решение в первом приближении уравнений возмущенного движения имеет вид:

$$I_1 = \tilde{I}_1 - \frac{A_{11}}{A_{12}} \cos(2\tilde{w}_2 - 2\tilde{w}_1) - \frac{A_{21}}{4A_{22}} \cos(2\tilde{w}_2 - \tilde{w}_1) + \\ \text{I) } + \frac{3}{4} \frac{A_{31}}{A_{32}} \cos(2\tilde{w}_2 - 3\tilde{w}_1) - \frac{A_{41}}{A_{42}} \cos \tilde{w}_1,$$

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \tilde{I}_2 + \frac{A_{11}}{A_{12}} \cos(2\tilde{w}_2 - 2\tilde{w}_1) + \frac{A_{21}}{2A_{22}} \cos(2\tilde{w}_2 - \tilde{w}_1) - \\
 &- \frac{A_{31}}{2A_{32}} \cos(2\tilde{w}_2 - 3\tilde{w}_1) \\
 I_3 &= \tilde{I}_3 \\
 w_1 &= \tilde{w}_1 - \frac{B_{11}}{A_{12}^2} \sin(2\tilde{w}_2 - 2\tilde{w}_1) - \frac{B_{21}}{4RA_{22}^2} \sin(2\tilde{w}_2 - \tilde{w}_1) + \\
 &+ \frac{B_{31}}{4RA_{32}^2} \sin(2\tilde{w}_2 - 3\tilde{w}_1) + \frac{B_{41}}{2RA_{42}} \sin \tilde{w}_1, \\
 w_2 &= \tilde{w}_2 + \frac{C_{11}}{A_{12}^2} \sin(2\tilde{w}_2 - 2\tilde{w}_1) - \frac{C_{21}}{4RA_{22}^2} \sin(2\tilde{w}_2 - \tilde{w}_1) + \\
 &+ \frac{C_{31}}{4RA_{32}^2} \sin(2\tilde{w}_2 - 3\tilde{w}_1) + \frac{C_{41}}{2RA_{42}} \sin \tilde{w}_1, \\
 w_3 &= \tilde{w}_3 + \frac{D_{11}}{2A_{12}^2} \sin(2\tilde{w}_2 - 2\tilde{w}_1) + \frac{D_{21}}{4RA_{22}^2} \sin(2\tilde{w}_2 - \tilde{w}_1) + \\
 &+ \frac{D_{31}}{4RA_{32}^2} \sin(2\tilde{w}_2 - 3\tilde{w}_1) + \frac{D_{41}}{2RA_{42}} \sin \tilde{w}_1,
 \end{aligned}$$

где $A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, D_{ij}$ – коэффициенты, зависящие от переменных действия.

Аналогично находится решение уравнений возмущенного движения спутника-гиростата для случая II).

Полученные результаты позволяют качественно оценить возмущенное движение намагниченного симметричного спутника-гиростата в геомагнитном поле, моделируемом прямым диполем.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Белецкий В.В., Хентов А.А. Вращательное движение намагниченного спутника. – М.: Наука, 1980. – 286 с.
- 2 Аксененкова И.М. Канонические переменные угол-действие в задаче о волчке Лагранжа // Вестник МГУ. Сер. матем. и мех. – 1981. – № 1. – С. 86-90.
- 3 Hori G.I. Theory of general perturbations with unspecified canonical variables // J. Japan Astron. Soc. – 1966. V. 18, N 4. – P. 287-296.
- 4 Deprit A. Canonical transformation depending on a small parameter // Select. Mech. – 1969. – V. I, N 1. – P. 12-30.
- 5 Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. – М.: Наука, 1978. – 312 с.

Қ. С. Жылысбаева

ЖАСАНДЫ АСПАН ДЕНЕСІНІҢ ҰЙЫТҚЫҒАН ҚОЗҒАЛЫСЫН ӘСЕР-БҰРЫШ АЙНЫМАЛЫЛАР АРҚЫЛЫ ЗЕРТТЕУ

Осы жұмыста геомагниттік өрістегі симметриялық серік-гиростаттың ұйытқыған қозғалысы қарастырылады. Серік-гиростаттың ұйытқыған қозғалысы теңдеулерінің шешімдері әсер-бұрыш айнымалылары арқылы Хори-Депри әдісімен табылған.

K. S. Zhilisbayeva

RESEARCH OF THE PERTURBED MOVEMENT OF THE ARTIFICIAL CETESTIAL BODY IN ACTION-ANGLE VARIABLES

In work the perturbed movement of the symmetric satellite-gyrost at in a geomagnetic field is considered. Decisions of the equation of the perturbed movement of the satellite-gyrost at in action-angle variables were found by the method of Hori-Depri.

УДК 519.62

Д. С. ДЖУМАБАЕВ, А. Е. ИМАНЧИЕВ

КРИТЕРИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ ИЗОЛИРОВАННОГО РЕШЕНИЯ МНОГОТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Институт математики МОН РК, г. Алматы,
АГУ им. К. Жубанова, г. Актобе

Рассматривается многоточечная краевая задача для нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. На основе метода параметризации установлены достаточные условия однозначной разрешимости исследуемой задачи в терминах исходных данных. Введено определение изолированного решения многоточечной краевой задачи для системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Получены необходимые и достаточные условия существования такого решения.

В работе рассматривается многоточечная краевая задача

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad t \in [0, T], \quad x \in R^n, \quad (1)$$

$$g(x(t_1), x(t_2), x(t_3), \dots, x(t_m)) = 0, \quad (2)$$

где $f: [0, T] \times R^n \rightarrow R^n$, $g: R^{mn} \rightarrow R^n$ – непрерывны; $0 = t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_m = T$, $\|x(t)\| = \max_{i=1, n} |x_i(t)|$.

Решением задачи (1), (2) называется непрерывно дифференцируемая на $[0, T]$ функция, удовлетворяющая системе (1) и краевому условию (2).

Задачи (1), (2) исследуются методом параметризации [1].

Возьмем некоторое число N ($N = 1, 2, \dots$) и разобьем промежутки $[0, T]$ на части с шагом

$h = T/N$: $[0, T] = \bigcup_{r=1}^N [(r-1)h, rh)$. Через $C([0, T], h, R^{nN})$ обозначим пространство систем функций

$x[t] = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t))$, где $x_r: [(r-1)h, rh) \rightarrow R^n$ непрерывна и имеет конечный левосторонний

предел $\lim_{t \rightarrow rh-0} x_r(t)$ при всех $r = \overline{1, N}$, с нормой $\|x[\cdot]\|_1 = \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh)} \|x_r(t)\|$.

Введем обозначение $\lambda_r = x_r((r-1)h)$, произведем замену $u_r(t) = x(t) - \lambda_r$, $t \in [(r-1)h, rh)$, $r = \overline{1, N}$, и от задачи (1), (2) перейдем к многоточечной краевой задаче с параметрами

$$\frac{du_r}{dt} = f(t, u_r + \lambda_r), \quad t \in [(r-1)h, rh), \quad r = \overline{1, N}, \quad (3)$$

$$u_r((r-1)h) = 0, \quad r = \overline{1, N}, \quad (4)$$

$$g\left(\lambda_1, \lambda_{r_2} + u_{r_2}(t_2), \lambda_{r_3} + u_{r_3}(t_3), \dots, \lambda_N + \lim_{t \rightarrow t_m-0} u_N(t)\right) = 0, \quad (5)$$

$$\lambda_s + \lim_{t \rightarrow sh-0} u_s(t) - \lambda_{s+1} = 0, \quad s = \overline{1, N-1}. \quad (6)$$

Здесь r_j – номер интервала, которому принадлежит точка t_j при выбранном N : $t_j \in [(r_j-1)h, r_jh)$, $h = T/N$, причем $1 = r_1 \leq r_2 \leq r_3 \leq \dots \leq r_m = N$. Равенства (6) имеют место в силу непрерывности решения задачи (1), (2).

Решением задачи (3)-(6) является пара $(\lambda^*, u^*[t])$ с элементами $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_N^*) \in R^{nN}$, $u^*[t] = (u_1^*(t), u_2^*(t), \dots, u_N^*(t)) \in C([0, T], h, R^{nN})$, где непрерывно дифференцируемая и ограниченная на $[(r-1)h, rh)$ функция $u_r^*(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (5) при всех $t \in [(r-1)h, rh)$ (при $t = (r-1)h$ уравнению (5) удовлетворяет правосторонняя производная функции $u_r^*(t)$), выполняется условие $u_r^*((r-1)h) = 0$, $r = \overline{1, N}$, и для λ_1^* , $\lambda_{r_2}^* + u_{r_2}^*(t_2)$, $\lambda_{r_3}^* + u_{r_3}^*(t_3)$, ..., $\lambda_N^* + \lim_{t \rightarrow t_m-0} u_N^*(t)$, $\lambda_s^* + \lim_{t \rightarrow sh-0} u_s^*(t)$, λ_{s+1}^* , $s = \overline{1, N-1}$, имеют место равенства (5), (6).

Если $x^*(t)$ – решение задачи (1), (2), то пара $(\lambda^*, u^*[t])$ с элементами $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_N^*)$, $u^*[t] = (u_1^*(t), u_2^*(t), \dots, u_N^*(t))$, где $\lambda_r^* = x_r^*((r-1)h)$, $u_r^*(t) = x_r^*(t) - x_r^*((r-1)h)$, $t \in [(r-1)h, rh)$, $r = \overline{1, N}$, $x_r^*(t)$ – сужение функции $x^*(t)$ на интервал $[(r-1)h, rh)$, $r = \overline{1, N}$, является решением задачи (3)-(6). И, наоборот, если пара $(\tilde{\lambda}, \tilde{u}[t])$ с элементами $\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \dots, \tilde{\lambda}_N)$, $\tilde{u}[t] = (\tilde{u}_1(t), \tilde{u}_2(t), \dots, \tilde{u}_N(t))$, является решением задачи (3)-(6), то функция $\tilde{x}(t)$, определяемая равенствами $\tilde{x}(t) = \tilde{\lambda}_r + \tilde{u}_r(t)$, $t \in [(r-1)h, rh)$, $r = \overline{1, N}$, $\tilde{x}(T) = \tilde{\lambda}_N + \lim_{t \rightarrow T-0} \tilde{u}_N(t)$, будет решением задачи (1), (2).

Задача Коши (3), (4), при фиксированном значении параметра λ_r , эквивалентна интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$u_r(t) = \int_{(r-1)h}^t f(\tau, \lambda_r + u_r(\tau)) d\tau, \quad t \in [(r-1)h, rh), \quad r = \overline{1, N}. \quad (7)$$

Подставив вместо $u_r(\tau)$ правую часть (7) и повторяя это действие ν ($\nu = 1, 2, \dots$) раз получим представление функции $u_r(t)$, $r = \overline{1, N}$, в следующем виде:

$$u_r(t) = \int_{(r-1)h}^t f \left(\tau_1, \lambda_r + \int_{(r-1)h}^{\tau_1} f \left(\tau_2, \lambda_r + \dots + \int_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \lambda_r + u_r(\tau_\nu)) d\tau_\nu \dots \right) d\tau_2 \right) d\tau_1, \quad t \in [(r-1)h, rh). \quad (8)$$

Определив из (8) $u_{r_j}(t_j)$, $j = \overline{1, m}$, $\lim_{t \rightarrow sh-0} u_s(t)$, $s = \overline{1, N-1}$, $\lim_{t \rightarrow T-0} u_N^*(t)$, подставив найденные значения в (5), (6), предварительно умножив (5) на $h = T/N > 0$, получим систему нелинейных уравнений, которую запишем в виде

$$Q_{\nu, h}(\lambda, u) = 0, \quad \lambda \in R^{nN}. \quad (11)$$

Условие А. Существуют $h > 0: Nh = T$ ($N = 1, 2, \dots$), $\nu \in \mathbb{N}$, такие, что система нелинейных уравнений $Q_{\nu, h}(\lambda, 0) = 0$ имеет решение $\lambda^{(0)} = (\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_N^{(0)}) \in R^{nN}$ и задача Коши (3), (4) при $\lambda_r = \lambda_r^{(0)}$, $r = \overline{1, N}$, имеет решение $u_r^{(0)}(t)$, $u^{(0)}[t] = (u_1^{(0)}(t), u_2^{(0)}(t), \dots, u_N^{(0)}(t)) \in C([0, T], h, R^{nN})$.

Определим $x^{(0)}(t)$ равенствами $x^{(0)}(t) = \lambda_r^{(0)} + u_r^{(0)}(t)$, $t \in [(r-1)h, rh)$, $r = \overline{1, N}$, $x^{(0)}(T) = \lambda_N^{(0)} + \lim_{t \rightarrow T-0} u_N^{(0)}(t)$.

Выберем числа $\rho_\lambda > 0$, $\rho_u > 0$, $\rho_x > 0$ и составим множества:

$$S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda) = \left\{ \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) \in R^{nN} : \|\lambda - \lambda^{(0)}\| = \max_{r=1, N} \|\lambda_r - \lambda_r^{(0)}\| < \rho_\lambda \right\},$$

$$S(u^{(0)}[t], \rho_u) = \left\{ u[t] \in C([0, T], h, R^{nN}) : \|u[\cdot] - u^{(0)}[\cdot]\|_1 < \rho_u \right\}$$

$$S(x^{(0)}(t), \rho_x) = \left\{ x(t) \in C([0, T], R^n) : \max_{t \in [0, T]} \|x(t) - x^{(0)}(t)\| < \rho_x \right\};$$

$$G_1^0(\rho_x) = \left\{ (t, x) : t \in [0, T], \|x - x^{(0)}(t)\| < \rho_x \right\},$$

$$G_2^0(\rho_\lambda, \rho_x) = \left\{ (v_1, v_2, \dots, v_m) : \|v_1 - \lambda_1^{(0)}\| < \rho_\lambda; \|v_j - x^{(0)}(t_j)\| < \rho_x, j = \overline{2, m} \right\}.$$

Условие В. Функции $f(t, x)$, $g(v_1, v_2, \dots, v_m)$ соответственно в $G_1^0(\rho_x)$, $G_2^0(\rho_\lambda, \rho_x)$ непрерывны, имеют равномерно непрерывные частные производные $f'_x(x, t)$, $g'_{v_j}(v_1, v_2, \dots, v_m)$, $j = \overline{1, m}$, и выполняются неравенства $\|f'_x(t, x)\| \leq L(t)$, $\|g'_{v_j}(v_1, v_2, \dots, v_m)\| \leq L_j$, $j = \overline{1, m}$, где $L(t) \in C([0, T])$, L_1, L_2, \dots, L_m – постоянные.

Предположим, что выполнены условия А, В. Тогда на начальное приближение решения задачи (3)–(6) возьмем пару $(\lambda^{(0)}, u^{(0)}[t])$ и последовательность $(\lambda^{(k)}, u^{(k)}[t])$, $k = 1, 2, \dots$, найдем по следующему алгоритму:

Шаг 1. а) Из уравнения $Q_{v,h}(\lambda, u^{(0)}) = 0$ найдем параметр $\lambda^{(1)} = (\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, \dots, \lambda_N^{(1)}) \in R^{nN}$;

б) решая задачу Коши (3), (4) при $\lambda_r = \lambda_r^{(1)}$, $r = \overline{1, N}$, т.е. задачу

$$\frac{du_r}{dt} = f(t, u_r + \lambda_r^{(1)}), \quad u_r((r-1)h) = 0, \quad t \in [(r-1)h, rh), \quad r = \overline{1, N},$$

найдем систему функций $u^{(1)}[t] = (u_1^{(1)}(t), u_2^{(1)}(t), \dots, u_N^{(1)}(t))$.

Шаг 2. а) Из уравнения $Q_{v,h}(\lambda, u^{(1)}) = 0$ найдем параметр $\lambda^{(2)} = (\lambda_1^{(2)}, \lambda_2^{(2)}, \dots, \lambda_N^{(2)}) \in R^{nN}$;

б) решая задачу Коши (3), (4) при $\lambda_r = \lambda_r^{(2)}$, $r = \overline{1, N}$, найдем систему функций $u^{(2)}[t] = (u_1^{(2)}(t), u_2^{(2)}(t), \dots, u_N^{(2)}(t))$.

Продолжая процесс, на **шаге k** найдем пару $(\lambda^{(k)}, u^{(k)}[t])$, удовлетворяющую равенствам $Q_{v,h}(\lambda^{(k)}, u^{(k-1)}) = 0$ и

$$\frac{du_r^{(k)}(t)}{dt} = f(t, u_r^{(k)} + \lambda_r^{(k)}), \quad u_r^{(k)}((r-1)h) = 0, \quad t \in [(r-1)h, rh), \quad r = \overline{1, N}.$$

Достаточные условия осуществимости, сходимости алгоритма, одновременно обеспечивающие существование изолированного решения многоточечной краевой задачи с параметрами (3)–(6), устанавливает следующая

Теорема 1. Пусть при некоторых $h > 0: Nh = T$ ($N = 1, 2, \dots$), $v \in \mathbb{N}$, $\rho_\lambda > 0$, $\rho_u > 0$, $\rho_x > 0$, выполнены условия А, В, матрица Якоби $\partial Q_{v,h}(\lambda, u) / \partial \lambda$ обратима для всех $(\lambda, u[t]) \in S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda) \times S(u^{(0)}[t], \rho_u)$ и имеют место неравенства:

$$1) \left\| \left[\partial Q_{v,h}(\lambda, u) / \partial \lambda \right]^{-1} \right\| \leq \gamma_v(h);$$

$$2) q_v(h) = \gamma_v(h) \max \left\{ h \sum_{j=2}^m L_j \cdot \left(\exp \left(\int_{(r_j-1)h}^{t_j} L(t) dt \right) - \sum_{k=0}^v \frac{1}{k!} \left(\int_{(r_j-1)h}^{t_j} L(t) dt \right)^k \right) \right\},$$

$$\max_{s=1, N} \left(\exp \left(\int_{(s-1)h}^{sh} L(t) dt \right) - \sum_{k=0}^v \frac{1}{k!} \left(\int_{(s-1)h}^{sh} L(t) dt \right)^k \right) \Big\} < 1;$$

$$3) \frac{\gamma_v(h)}{1 - q_v(h)} \left\| Q_{v,h}(\lambda^{(0)}, u^{(0)}) \right\| < \rho_\lambda;$$

$$4) \frac{\gamma_v(h)}{1 - q_v(h)} \left\| Q_{v,h}(\lambda^{(0)}, u^{(0)}) \right\| \max_{r=1, N} \left(\exp \left(\int_{(r-1)h}^{rh} L(t) dt \right) - 1 \right) < \rho_u;$$

$$5) \rho_\lambda + \rho_u \leq \rho_x.$$

Тогда определяемая алгоритмом последовательность пар $(\lambda^{(k)}, u^{(k)}[t])$, $k = 0, 1, 2, \dots$ содержится в $S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda) \times S(u^{(0)}[t], \rho_u)$, сходится к решению $(\lambda^*, u^*[t]) \in S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda) \times S(u^{(0)}[t], \rho_u)$ задачи (3) – (6) и справедливы оценки

$$a) \|\lambda^* - \lambda^{(k)}\| \leq \frac{(q_v(h))^k}{1 - q_v(h)} \gamma_v(h) \|Q_{v,h}(\lambda^{(0)}, u^{(0)})\|,$$

$$b) \|u_r^*(t) - u_r^{(k)}(t)\| \leq \left(\exp \left(\int_{(r-1)h}^t L(\tau) d\tau \right) - 1 \right) \|\lambda^* - \lambda^{(k)}\|, \quad t \in [(r-1)h, rh), \quad r = \overline{1, N}.$$

Причем любое решение задачи (3) – (6) в $S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda) \times S(u^{(0)}[t], \rho_u)$ изолировано.

Известно, что в нелинейных задачах изолированность решения играет такую же важную роль, как единственность решения в линейных задачах. В теореме 1 изолированное решение понимается как изолированный элемент множества решений и такое решение не только не обеспечивает его непрерывную зависимость от исходных данных, но и не сохраняет свойство разрешимости при малых изменениях правой части дифференциального уравнения. Так как построение алгоритмов нахождения приближенных решений предполагает малость изменения решения при малых возмущениях правой части дифференциального уравнения, то вводится следующее понятие изолированности.

Определение. Решение $x^*(t)$ задачи (1), (2) называется "изолированным", если существует число $\rho_0 > 0$, при котором функции f и g соответственно в $G_1^*(\rho_0) = \{(t, x) : t \in [0, T], \|x - x^*(t)\| < \rho_0\}$, $G_2^*(\rho_0, \rho_0) = \{(v_1, v_2, \dots, v_m) : \|v_1 - x^*(0)\| < \rho_0; \|v_j - x^*(t_j)\| < \rho_0, j = \overline{2, m}\}$ имеют равномерно непрерывные производные $f'_x, g'_{v_j}, j = \overline{1, m}$, и линейная однородная многоточечная краевая задача

$$\frac{dy}{dt} = f'_x(t, x^*(t))y, \quad t \in [0, T], \quad y \in R^n, \quad \sum_{j=1}^m g'_{v_j}(x^*(t_1), x^*(t_2), \dots, x^*(t_m))y(t_j) = 0,$$

имеет только тривиальное решение $y(t) \equiv 0$.

Теорема 2. При выполнении условий теоремы 1 любое решение (1), (2) из $S(x^{(0)}(t), \rho_x)$ является "изолированным".

Следующее утверждение показывает, что условия теоремы 1 не только достаточны, но и необходимы для существования "изолированного" решения.

Теорема 3. Краевая задача (1), (2) имеет "изолированное" решение тогда и только тогда, когда для любого $v \in N$ найдется $h = h(v) : Nh = T$ ($N = 1, 2, \dots$), при котором имеют место предположения А, В и выполняются условия 1) – 5) теоремы 1.

Доказательство теорем проводится аналогично доказательству теоремы 1-3 из [2] с учетом специфики исследуемой задачи.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Джумабаев Д.С. Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1989. – Т. 29, № 1. – С. 50-66.
- 2 Джумабаев Д.С., Темешева С.М. Метод параметризации решения нелинейных двухточечных краевых задач // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2007. – Т. 47, № 1. – С.39-63.

Д.С. Жұмабаев, А. Е. Иманчиев

ЖАЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬДЫҚ ТЕНДЕУЛЕР ЖҮЙЕСІ ҮШІН КӨПНҮКТЕЛІ ШЕТТІК ЕСЕПТІҢ ОҚШАУЛАНҒАН ШЕШІМІ БАР БОЛУЫНЫҢ КРИТЕРИЙІ

Жай дифференциальдық тендеулердің сызықсыз жүйесі үшін көпнүктелі шеттік есеп қарастырылады. Параметрлеу әдісінің негізінде зерттеліп отырған есептің бірімәнді шешілімділігінің жеткілікті шарттары

бастапқы берілімдер терминінде тағайындалған. Сызықсыз жай дифференциальдық теңдеулер жүйесі үшін көпнүктелі шеттік есептің оқшауланған шешімінің анықтамасы енгізілген. Осындай шешімнің бар болуының қажетті және жеткілікті шарттары алынған.

D. S. Dzhumabaev, A. E. Imanchiev

THE CRITERIA OF EXISTENCE ISOLATED SOLUTION MULTIPOINT BOUNDARY
VALUE PROBLEM FOR SYSTEM OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

The multipoint boundary value problem for nonlinear system of ordinary differential equations is considered. The sufficient conditions of unique solvability of researching problem on based parametrization method in the terms of initial data. The definition of isolated solution of multipoint boundary value problem for system of nonlinear ordinary differential equations is introduced. The sufficient and necessary conditions of existence some of solution are obtained.

А. Ж. СЕЙТМУРАТОВ

ПРИБЛИЖЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЯ ДВУХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНКИ ПОСТОЯННОЙ ТОЛЩИНЫ

Кызылординский государственный университет им. Коркыт Ата

В случае двухслойной пластинки в качестве такой плоскости удобнее взять плоскость раздела однородности $Z = 0$, т.е. для каждой составляющей пластинки имеет шесть вспомогательных функций, связанных шестью условиями по линии контакта, которые приводят к следующим зависимостям [5]:

$$\begin{aligned}
 U^{(1)} &= U^{(2)}; \quad V^{(1)} = V^{(2)}; \quad W_1^{(1)} = W_1^{(2)}; \\
 U_1^{(2)} &= M_1 [M_2]^{-1} \left[U_1^{(1)} + \frac{\partial W_1^{(1)}}{\partial x} \right] - \frac{\partial W_1^{(2)}}{\partial x}; \\
 V_1^{(2)} &= M_1 [M_2]^{-1} \left[V_1^{(1)} + \frac{\partial W_1^{(1)}}{\partial y} \right] - \frac{\partial W_1^{(2)}}{\partial y}; \\
 W &= [N_2]^{-1} \left\{ N_1 W^{(1)} - M_1 (1 + C_1) \left(\frac{\partial U^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial V^{(1)}}{\partial y} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + M_2 (1 + C_2) \left(\frac{\partial U^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial V^{(1)}}{\partial y} \right) \right\}, \tag{1}
 \end{aligned}$$

при этом параметры верхней составляющей обозначены индексом "1", а нижней – индексом "2".

В качестве оставшихся шести вспомогательных функций возьмем смещения и деформации точек плоскости раздела однородности верхнего слоя, для определения которых имеет шесть граничных условий при $Z = h_1$ и $Z = -h_2$, которые запишем в виде

$$\begin{aligned}
 \sigma_{zz}^{(1)} &= f_z^{(1)}(x, y, t); \quad \frac{\partial \sigma_{xz}^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}^{(1)}}{\partial y} = \frac{\partial f_{xz}^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial f_{yz}^{(1)}}{\partial y}; \\
 \frac{\partial \sigma_{xz}^{(1)}}{\partial y} - \frac{\partial \sigma_{yz}^{(1)}}{\partial x} &= \frac{\partial f_{xz}^{(1)}}{\partial y} - \frac{\partial f_{yz}^{(1)}}{\partial x} \quad (Z = h_1) \tag{2}
 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
 \sigma_{zz}^{(2)} &= f_z^{(2)}(x, y, t); \quad \frac{\partial \sigma_{xz}^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}^{(2)}}{\partial y} = \frac{\partial f_{xz}^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial f_{yz}^{(2)}}{\partial y}; \\
 \frac{\partial \sigma_{xz}^{(2)}}{\partial y} - \frac{\partial \sigma_{yz}^{(2)}}{\partial x} &= \frac{\partial f_{xz}^{(2)}}{\partial y} - \frac{\partial f_{yz}^{(2)}}{\partial x} \quad (Z = -h_2). \tag{3}
 \end{aligned}$$

Подставляя выражения для напряжений в граничных условия (2) и (3) с учетом зависимостей (1), получим систему шести уравнений относительно $U^{(1)}$, $V^{(1)}$, $W^{(1)}$, $U_1^{(1)}$, $V_1^{(1)}$, $W_1^{(1)}$:

$$\begin{aligned}
 D_1^{(0)} \left(\frac{\partial U^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial V^{(1)}}{\partial y} \right) + D_2^{(0)} (W^{(1)}) + D_3^{(0)} \left(\frac{\partial U_1^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial V_1^{(1)}}{\partial y} \right) + D_4^{(0)} (W_1^{(1)}) &= M_1^{-1} (f_z^{(1)}); \\
 K_1 \left(\frac{\partial U^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial V^{(1)}}{\partial y} \right) + K_2 (W^{(1)}) + K_3 \left(\frac{\partial U_1^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial V_1^{(1)}}{\partial y} \right) + K_4 (W_1^{(1)}) &= M_1^{-1} \left(\frac{\partial f_{xz}^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial f_{yz}^{(1)}}{\partial y} \right); \tag{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_1 \left(\frac{\partial U^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial V^{(1)}}{\partial y} \right) + H_2 (W^{(1)}) + H_3 \left(\frac{\partial U_1^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial V_1^{(1)}}{\partial y} \right) + H_4 (W_1^{(1)}) &= M_2^{-1} (f_z^{(2)}); \\
 E_1 \left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial v^{(1)}}{\partial y} \right) + E_2 (W^{(1)}) + E_3 \left(\frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial v_1^{(1)}}{\partial y} \right) + E_4 (W_1^{(1)}) &= M_2^{-1} \left(\frac{\partial f_{xz}^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial f_{yz}^{(1)}}{\partial y} \right) \\
 \Pi_1 \left(\frac{\partial U^{(1)}}{\partial y} - \frac{\partial V^{(1)}}{\partial x} \right) + \Pi_2 \left(\frac{\partial U_1^{(1)}}{\partial y} - \frac{\partial V_1^{(1)}}{\partial x} \right) &= M_1^{-1} \left(\frac{\partial f_{xz}^{(1)}}{\partial y} - \frac{\partial f_{yz}^{(1)}}{\partial x} \right); \\
 \Pi_3 \left(\frac{\partial U^{(1)}}{\partial y} - \frac{\partial V^{(1)}}{\partial x} \right) + \Pi_4 \left(\frac{\partial U_1^{(1)}}{\partial y} - \frac{\partial V_1^{(1)}}{\partial x} \right) &= M_2^{-1} \left(\frac{\partial f_{xz}^{(2)}}{\partial y} - \frac{\partial f_{yz}^{(2)}}{\partial x} \right)
 \end{aligned}$$

где операторы $D_j^{(0)}$, K_j , H_j , E_j , Π_j равны

$$\begin{aligned}
 D_1^{(0)} &= \sum_{n=0}^{\infty} [C_1 Q_{n1} (\lambda_{21}^{(1)} - \Delta) - (1 + C_1) \lambda_{21}^{(n)}] \frac{h_1^{2n}}{(2n)!}; \\
 D_2^{(0)} &= \sum_{n=0}^{\infty} [C_1 Q_{n1} (\lambda_{21}^{(1)} - \Delta) + (1 - C_1) \lambda_{21}^{(n)}] \frac{h_1^{2n}}{(2n)!}; \\
 D_3^{(0)} &= - \sum_{n=0}^{\infty} [2D_1 Q_{n1} \lambda_{21}^{(1)} + \lambda_{11}^{(1)}] \frac{h_1^{2n+1}}{(2n+1)!}; \\
 D_4^{(0)} &= \sum_{n=0}^{\infty} [2D_1 Q_{n1} \Delta + \lambda_{11}^{(1)}] \lambda_{21}^{(1)} \frac{h_1^{2n+1}}{(2n+1)!}; \\
 K_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{11}^{(1)} [2C_1 Q_{n1} \Delta + \lambda_{21}^{(1)}] \frac{h_1^{2n+1}}{(2n+1)!}; \\
 K_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \Delta [2C_1 Q_{n1} \lambda_{11}^{(1)} + (1 + C_1) \lambda_{21}^{(n)}] \frac{h_1^{2n+1}}{(2n+1)!}; \\
 K_3 &= \sum_{n=0}^{\infty} [D_1 Q_{n1} (\lambda_{21}^{(1)} - \Delta) + \lambda_{11}^{(n)}] \frac{h_1^{2n}}{(2n)!}; \\
 K_4 &= - \sum_{n=0}^{\infty} \Delta [D_1 Q_{n1} (\lambda_{21}^{(1)} - \Delta) - \lambda_{11}^{(n)}] \frac{h_1^{2n}}{(2n)!}; \\
 H_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} \{C_2 Q_{n2} (\lambda_{22}^{(1)} - \Delta)(1 - \rho_0) - [(1 + C_2)(1 - C_2) \lambda_{22}^{(n)}]\} \frac{h_1^{2n}}{(2n)!}; \\
 H_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \{C_2 Q_{n2} (\lambda_{22}^{(1)} - \Delta)(1 - C_2) \lambda_{22}^{(n)}\} \rho_1 \frac{h_1^{2n}}{(2n)!}; \\
 H_3 &= \sum_{n=0}^{\infty} \{2D_2 Q_{n2} \lambda_{22}^{(1)} + \lambda_{22}^{(n)}\} \rho_2 \frac{h_1^{2n+1}}{(2n+1)!}; \\
 H_4 &= - \sum_{n=0}^{\infty} \{(1 - \rho_0) \Delta [2D_2 Q_{n2} \lambda_{22}^{(1)} + \lambda_{12}^{(n)}] + \lambda_{22}^{(1)} [2D_2 Q_{n2} \Delta + \lambda_{12}^{(n)}]\} \frac{h_1^{2n+1}}{(2n+1)!};
 \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
 E_1 &= -\sum_{n=0}^{\infty} \{2(1-\rho_0)2C_2Q_{n2}\lambda_{12}^{(1)} + \\
 &+ [(1-C_2)\lambda_{12}^{(1)} - (1-C_2)\rho_0\Delta]\lambda_{12}^{(n)}\} \frac{h_1^{2n+1}}{(2n+1)!}; \\
 E_2 &= -\sum_{n=0}^{\infty} \rho_1\Delta [2C_2Q_{n2}\lambda_{12}^{(1)} + (1+C_2)\lambda_{22}^{(n)}] \frac{h_1^{2n+1}}{(2n+1)!}; \\
 E_3 &= \sum_{n=0}^{\infty} \rho_2 [D_2Q_{n2}(\lambda_{22}^{(1)} - \Delta) + \lambda_{12}^{(n)}] \frac{h_1^{2n}}{(2n)!}; \\
 E_4 &= \sum_{n=0}^{\infty} \Delta(\rho_2 - 2) [D_2Q_{n2}(\lambda_{22}^{(1)} - \Delta) - \lambda_{12}^{(n)}] \frac{h_1^{2n}}{(2n)!}; \\
 \Pi_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{21}^{(n+1)} \frac{h_1^{2n+1}}{(2n+1)!}; \quad \Pi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{21}^{(n)} \frac{h_1^{2n}}{(2n)!}; \\
 \Pi_3 &= -\sum_{n=0}^{\infty} \rho_1 \lambda_{22}^{(n+1)} \frac{h_2^{2n+1}}{(2n+1)!}; \quad \Pi_4 = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_2 \lambda_{22}^{(n+1)} \frac{h_2^{2n}}{(2n)!}; \\
 \rho_1 &= N_1 N_2^{-1}; \quad \rho_2 = M_1 M_2^{-1}; \\
 \rho_0 &= N_2^{-1} [M_1(1+C_1) - M_2(1+C_2)]
 \end{aligned}$$

а операторы C_j, D_j имеют вид

$$C_j = 1 - N_j M_j^{-1}; \quad D_j = 1 - N_j^{-1} M_j \quad (6)$$

Система общих уравнений (4) распалась на систему четырех уравнений относительно $\left(\frac{\partial U^1}{\partial x} + \frac{\partial V^1}{\partial y}\right), W^{(1)}, \dots$ и двух относительно $\left(\frac{\partial U^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial V^{(1)}}{\partial x}\right), \dots$, что упрощает исследование

этой системы.

Система уравнений (4) и является системой общих уравнений, описывающих продольно-поперечное колебание двухслойной или кусочно-однородной вязкоупругой изотропной пластинки постоянной толщины.

Так как пластинка неоднородна, то чисто поперечное и чисто продольное ее колебание не может иметь места, а колебание – комбинированное или продольно-поперечное.

Приняв за основную искомую функцию поперечное смещение $W_1^{(1)}$ точек верхней составляющей пластинки по линии раздела однородности, для неё из системы первых четырёх уравнений (4) получим следующее уравнение

$$L(W_1^{(1)}) = F(x, y, t), \quad (7)$$

где оператор L и правая часть F равны

$$\begin{aligned}
 L &= [D_1^{(0)}K_2 - D_2^{(0)}K_1][H_3E_4 - H_4E_3] + [D_1^{(0)}K_3 - D_3^{(0)}K_1] \times \\
 &\times [H_4E_2 - H_2E_4] + [D_1^{(0)}K_4 - D_4^{(0)}K_1][H_2E_3 - H_3E_2] - \\
 &- [D_2^{(0)}K_3 - D_3^{(0)}K_2][H_4E_1 - H_1E_4] - [D_2^{(0)}K_4 - D_4^{(0)}K_2] \times \\
 &\times [H_1E_3 - H_3E_1] + [D_3^{(0)}K_4 - D_4^{(0)}K_3][H_1E_2 - H_2E_1];
 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
 F(x, y, t) = & -\{K_1[H_2E_3 - H_3E_2] + K_2[H_3E_1 - H_1E_3] + \\
 & + K_3[H_1E_2 - H_2E_1]\} \{M_1^{-1}(f_z^{(1)})\} + \{D_1^{(0)}[H_2E_3 - H_3E_2] + \\
 & + D_2^{(0)}[H_3E_1 - H_1E_3] + D_3^{(0)}[H_1E_2 - H_2E_1]\} \times \\
 & \times \left\{ M_1^{-1} \left(\frac{\partial f_{xz}^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial f_{yz}^{(1)}}{\partial y} \right) \right\} - \{D_1^{(0)}[K_2E_3 - K_3E_2] + \\
 & + D_2^{(0)}[K_3E_1 - K_1E_3] + D_3^{(0)}[K_1E_2 - K_2E_1]\} \{M_2^{-1}(f_z^{(2)})\} + \\
 & + \{D_1^{(0)}[K_2H_3 - K_2H_3] + D_2^{(0)}[K_2H_1 - K_1H_2] + \\
 & + D_3^{(0)}[K_1H_2 - K_2H_1]\} \left\{ M_2^{-1} \left(\frac{\partial f_{xz}^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial f_{yz}^{(2)}}{\partial y} \right) \right\}
 \end{aligned}$$

Как видно, общее уравнение (7), описывающее колебание двухслойной пластинки, очень сложно по структуре. Получим из него приближенное уравнение.

Так как пластинка совершает комбинированное колебание, то простейшее уравнение, описывающее такое колебание, должно быть уравнением шестого порядка по производным.

Ограничиваясь в операторе (8) первыми двумя слагаемыми в каждой из входящих в него сумм, для $W_1^{(1)}$ получим приближенное уравнение

$$\begin{aligned}
 Q_1 \left(\frac{\partial^4 W_1^{(1)}}{\partial t^4} \right) + Q_2 \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta W_1^{(1)} \right) + Q_3 (\Delta^2 W_1^{(1)}) + Q_4 \left(\frac{\partial^6 W_1^{(1)}}{\partial t^6} \right) + \\
 + Q_5 \left(\frac{\partial^4}{\partial t^4} \Delta W_1^{(1)} \right) + Q_6 \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta^2 W_1^{(1)} \right) + Q_7 (\Delta^3 W_1^{(1)}) = F_1
 \end{aligned} \tag{9}$$

где операторы Q_j и F_1 равны

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= M_2^{-2} (h_1 \rho_1 + h_2 \rho_2)^2; \\
 Q_2 &= -2M_2^{-1} \{2(h_1 \rho_2 D_1 + h_2 D_2)(h_1 \rho_1 + h_2 \rho_2) + \\
 &+ (\rho_2 - 1)[h_1 \rho_1 (h_1 + h_2) - (h_1^2 D_1 \rho_1 - h_2^2 D_2 \rho_2)]\}; \\
 Q_3 &= 4(\rho_1 - 1)(h_1^2 \rho_1 D_1 + h_2^2 D_2 + 2h_1 h_2 \rho_2 D_1); \\
 Q_4 &= \frac{1}{6} M_1^{-2} \{h_1^2 \rho_1 M_1^{-1} [3h_2^2 \rho_2^2 + h_1 \rho_1 (h_1 \rho_1 + 4h_2 \rho_2)](2 - D_1) + \\
 &+ h_2^2 \rho_2 M_2^{-1} [3h_1^2 \rho_1^2 + h_2 \rho_2 (h_2 \rho_2 + 4\rho_1 h_1)](2 - D_2)\}; \\
 Q_5 &= -\frac{1}{6} \{h_1^4 \rho_2 \rho_1^2 M_1^{-2} [2\rho_2 (4D_1(1 - D_1) + 1) + (\rho_2 - 1) \times \\
 &\times (4 + D_1)^2] + h_2^4 \rho_2^2 M_2^{-2} [2(1 + 4D_2 - 4D_2^2) - (\rho_2 - 1)D_2 \times \\
 &\times (2 - D_2)] + 6h_1^2 h_2^2 [\rho_1 \rho_2 M_1^{-1} M_2^{-1} (4(\rho_2^2 D_1 + D_2) + (\rho_2 - 1) \times \\
 &\times (\rho_2(1 - D_2)(2 + D_1) + D_2(1 + 2D_1)))] + M_2^{-2} (\rho_1^2 + \rho_2^2)] + \\
 &+ 2\rho_2 h_1 h_2 [2\rho_1 \rho_2 M_1^{-1} M_2^{-1} (h_1^2 \rho_2 (6D_1 - 7D_1^2 - 5) + \\
 &h_2^2 \rho_2 (D_2(D_2 - 5) - \rho_2(2 - D_2)))] - h_1^2 \rho_2 \rho_1 M_1^{-2} (2D_1(4 - D_2) + \\
 &+ (\rho_1 - 1)(4 - 3D_1)) - 2h_2^2 \rho_2 \rho_2^2 M_2^{-2} D_1(4 - D_2)\};
 \end{aligned}$$

$$Q_6 = -\frac{1}{3} \{h_1^4 \rho_2 \rho_1 M_1^{-1} [2D_1(1-3\rho_2+4D_1) - (\rho_2-1)(2+9D_1 - 3D_1^2)] + h_2^4 \rho_2 M_2^{-1} [4D_2(1-2D_2) + (\rho_2-1)D_2(3-D_2)] - 3h_1^2 h_2^2 [\rho_1 M_1^{-1} (4\rho_2 D_1(\rho_2(1+D_2)+D_2) - (\rho_2-1)(2(\rho_2-1) \times D_2(1-D_1) + \rho_2(2-D_1+4D_1^2))) + \rho_2 M_2^{-1} (4D_2(1+D_1 + \rho_2 D_1) + (\rho_2-1)(6\rho_2 D_1(1-D_2) - D_2(1-6D_1)))] - 2h_1 h_2 \rho_2 \times [\rho_1 M_1^{-1} (2h_1^2 (2D_2^2(1+2D_1) + (\rho_2-1)(1+2D_1 - D_1^2)) + h_2^2 (2(\rho_2-1) + (\rho_2+3)D_2)) + 4\rho_2 M_2^{-1} D_1 (h_1^2 + h_2^2 (2(\rho_2-1) \times (1-D_2) + \rho_2 D_2 + (1+D_2)))]\};$$

$$Q_7 = -\frac{2}{3} \{h_1^4 \rho_2 D_1 [4D_1 - 5(\rho_2-1)] + h_2^4 D_2 [4D_2 - (\rho_2-1)] - 3h_1^2 h_2^2 [8\rho_2 D_1 D_2 + (\rho_2-1)(3\rho_2 D_1 - (2\rho_2-1)D_1 D_2 - D_2(1-D_1))] - 4h_1 h_2 \rho_2 D_1 [h_1^2 (2D_2 + (\rho_2-1)) + h_2^2 (2(\rho_2-1) + (\rho_2+1)D_2)]\};$$

$$F_1(x, y, t) = M_2^{-2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{ (h_1 \rho_1 + h_2 \rho_2) (f_z^{(1)} + f_z^{(2)}) + (h_1 + h_2) \times [h_2 \rho_2 \left(\frac{\partial^2 f_{xz}^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_{yz}^{(1)}}{\partial y^2} \right) + h_1 \rho_1 \left(\frac{\partial^2 f_{xz}^{(2)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_{yz}^{(2)}}{\partial y^2} \right) + [h_1^2 D_1 \rho_1 - h_2^2 D_2 \rho_2] \left[\left(\frac{\partial^2 f_{xz}^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_{yz}^{(1)}}{\partial y^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 f_{xz}^{(2)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_{yz}^{(2)}}{\partial y^2} \right) \right] \} - 2\Delta \{ 2M_2^{-2} (h_1 \rho_2 D_1 + h_2 D_2) [M_1^{-1} (f_z^{(1)}) + M_2^{-1} (f_z^{(2)})] + 2\rho_2 h_1 h_2 \left[D_1 M_1^{-1} \left(\frac{\partial^2 f_{xz}^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_{yz}^{(1)}}{\partial y^2} \right) + D_2 M_2^{-1} \left(\frac{\partial^2 f_{xz}^{(2)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_{yz}^{(2)}}{\partial y^2} \right) \right] + M_2^{-1} (h_1^2 \rho_2 D_1 + h_2^2 D_2) \times \left[\left(\frac{\partial^2 f_{xz}^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_{yz}^{(1)}}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 f_{xz}^{(2)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_{yz}^{(2)}}{\partial y^2} \right) \right] \};$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Если пластинка однородна, а $w_1^{(1)}$ поперечное смещение точек её срединной плоскости, то в этом случае оператор шестого порядка в уравнении (9) распадается на два оператора: оператор

второго порядка, описывающий чисто продольное колебание пластинки и оператор четвёртого порядка, описывающий чисто поперечное колебание.

Так как для однородной пластинки $h_1 = h_2$ оператор шестого порядка в уравнении (9) распадается на произведение операторов второго и четвёртого порядков, то можно поставить следующую задачу.

Для заданных материалов обеих составляющих пластинки как подобрать толщины этих составляющих, чтобы оператор шестого порядка в уравнении (9) и в общем случае распался на произведение операторов второго и четвёртого порядка, т.е. при определённых внешних усилиях плоскость раздела однородности могла совершать как чисто продольное, так и чисто поперечное смещение.

Такое упрощение общего оператора шестого порядка в (9) можно осуществить, если материалы составляющих пластинки упруги и операторы Q_j в уравнении (9) связаны зависимостью

$$Q_2 Q_4 Q_7 = Q_1 Q_5 Q_7 + Q_3 Q_4 Q_6 \quad (11)$$

Уравнение (11) будет уравнением для нахождения $\frac{h_1}{h_2}$ при заданных упругих характеристиках составляющих пластинки.

Таким образом, удалось строго вывести приближённое уравнение колебания кусочно-однородной пластинки постоянной толщины и на основе этого уравнения решать различные прикладные задачи.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Филиппов И.Г. Приближенный метод решения динамических задач для вязкоупругих сред // ПММ. – 1979. – Т. 43, № 1. – С. 133-137.
- 2 Филиппов И.Г. К нелинейной теории вязкоупругих изотропных сред. – Киев: Прикл. механика, 1983. – Т. 19, № 3. – С. 3-8.
- 3 Филиппов И.Г., Ишрипкулов Т.Ш., Мирзанабилов С.М. Нестационарные колебания линейных упругих и вязкоупругих сред. – Ташкент: «ФАН» УзССР, 1909.
- 4 Филиппов И.Г., Филиппов С.И. Уравнения колебания кусочно-однородной пластинки переменной толщины // МТТ. – 1989. – № 5. – С. 149-157.
- 5 Филиппов И.Г., Филиппов С.И., Костин В.И. Динамика двумерных композитов // Труды Междун. конф. по механике и материалам. – США, Лос-Анжелес, 1995. – С. 75-79.

А. Ж. Сейтмуратов

КАЛЫҢДЫҒЫ $2h$ БОЛАТЫН ТІК ТӨРТБҰРЫШТЫ ПІШІНДЕГІ ЖАЗЫҚ ЭЛЕМЕНТТІК ӨЗІНДІК ТЕРБЕЛІСІНІҢ ЖИЛІГІН АНЫҚТАУ ЕСЕБІ

$(-\infty < (x, y) < \infty; |Z| \leq h)$, кеңістігінде қалыңдығы $2h$ болатын тік төртбұрышты пішіндегі жазық элементтің өзіндік тербелісінің жиілігін анықтау есебі қарастырылған. Пластинка материалы Максвел үлгісі бойынша өрнектелген.

A. Zh. Seitmuratov

THE APPROACHED EQUATIONS OF FLUCTUATION OF THE TWO-LAYER PLATE OF CONSTANT THICKNESS

The exercise of oscillation is examined with the flat element of rectangular form, the stoutness of which is equalize in $(=2h)$, $(-\infty < (x, y) < \infty; |Z| \leq h)$, where it is occupied the pout of expanse. And this task is decided with the Makswel's model.

И. Х. ЖАРЕКЕШЕВ

РАЗМЕРНОСТНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА ОТ ИЗОЛЯТОРА К ПРОВОДНИКУ

Казахский Национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы

Исследуется зависимость критической статистики уровней энергии от числа измерений для фазового перехода изолятор-металл, вызванного разупорядочением. Получены численные результаты для пространственных размерностей $d = 4, 5$ и 6 . Установлены свойства подобия и найдены критические значения беспорядка и критические индексы длины локализации.

Ключевые слова: электронная проводимость, неупорядоченные системы, критические явления, квантовая локализация

Статистическое описание электронных спектров в критической области вблизи перехода Андерсона в неупорядоченных системах показало значительную активность в течение последних лет [1]. Фактически переход от изолятора к проводнику означает, что существует критическое, как правило, ненулевое значение степени разупорядочения в системе, которое разделяет «диэлектрическую фазу» с локализованными состояниями от «металлической фазы» с распространенными (делокализованными) состояниями. Кроме базовой симметрии, пространственная размерность d играет важную роль в определении величины критического беспорядка, при котором наступает переход изолятор-проводник и наоборот.

Согласно однопараметрической гипотезе подобия для задач квантовой локализации [2] нижняя предельная размерность для перехода Андерсона равна $d_l = 2$. Это объясняется тем, что в двумерных неупорядоченных системах все электронные состояния полностью локализованы даже при сколь угодно исчезающем беспорядке [3]. Более того, путем применения скейлингового метода трансфер матриц были найдены все признаки андерсоновского фазового перехода в следующей высокой размерности $d_c = 4$ [4, 5]. Поскольку результаты этих работ противоречат предположению о верхней критической размерности для перехода Андерсона, которое основано на теории приближений [6], остается твердое сомнение, что этот эффект связан с граничными условиями, другими словами, с конечностью размеров исследованным образцов [7]. Хорошо известно, что для размерностей выше верхней граничной размерности d_c выводы теории среднего поля являются точными. Что касается статистики уровней энергии, были проведены крупномасштабные численные эксперименты, которые подтвердили существование перехода Андерсона и соответствующие однопараметрические критические свойства при $d \leq 3$ [8-10]. В частности, было найдено, что для двумерных систем распределение расстояний между ближайшими дискретными уровнями энергии $P(s)$ стремится к пуассоновскому предельному закону $P(s) = \exp(-s)$, указывая тем самым на отсутствие критической точки. Здесь спэйсинг s измеряется в единицах среднего расстояния между соседними энергетическими уровнями Δ . В трехмерных системах существование перехода металл-изолятор сопровождается переходом между распределением Вигнера в проводящей фазе и распределением Пуассона в диэлектрической фазе.

В критической точке перехода распределение спэйсингов $P(s)$ является совершенно отличающимся от двух вышеупомянутых фундаментальных распределений. При этом это «переходное» распределение не зависит от размеров исследуемого образца [8, 9]. Для малых расстояний между уровнями оно все же ведет себя как распределение Вигнера, в то время как на больших расстояниях (т.е. на больших масштабах энергий) ее асимптотический спад происходит значительно медленнее. Аналитические приближения дают следующую оценку

$$\ln P(s) \sim 1 + 1/d\nu, \quad (1)$$

где ν – критический индекс длины локализации [13,14]. С другой стороны, компьютерные вычисления с высокой точностью показали следующее поведение функции распределения

$$\ln P(s) \sim -s, \quad (2)$$

которое совпадает с предсказаниями, сделанными в работе [8]. Указанное противоречие является предметом продолжающихся дискуссий, которые включают также обсуждение важности фундаментальной симметрии – ортогональной и унитарной симметрий в трехмерных системах [15-17], и симплектической симметрии в двумерных системах [10,18]. В последних случаях значения критического беспорядка и критических индексов известны.

Ввиду вышеуказанных несоответствий нам представляется, что наиболее удачным для независимой проверки критичности является метод статистики уровней, который можно успешно применять для высоких размерностей. Им могут быть исследованы не только четырехмерные системы, как указывалось в работах [4,5], но и системы более высокой пространственной размерности. Например, для $d = 5$ и $d = 6$ необходимо найти критическую статистику уровней энергии и, в свою очередь, критические показатели длины локализации. Это нужно для того, чтобы проверить область справедливости имеющихся аналитических подходов. Кроме того, по результатам высокой точности, более ценная количественная информация о верхней критической размерности будет более доступна. Следует принять во внимание тот факт, что, с одной стороны, аналитические теории часто страдают неконтролируемыми погрешностями, которые происходят на основе различного рода приближений. Но с другой стороны, численные моделирования подвержены неизбежной критике за некорректное исключение систематических ошибок вследствие конечности размеров исследуемых систем. Поэтому представляется очень важным учесть нежелательные эффекты, связанные с конечностью размеров систем особенно для высокой размерности пространства.

На рис. 1 демонстрируется наглядный, и в то же время яркий пример того, как дискретные уровни энергии меняют свое взаимное положение в спектре по мере того как степень беспорядка нарастает. Особенно четко наблюдается граница между двумя коллективными типами поведения для малых и больших степеней беспорядка. Слева от положения стрелок, соответствующего критическому значению беспорядка $W_c = 16.5$ для трехмерных систем, спектр более упорядочен и флуктуации уровней незначительны. Это говорит о том, что спектральные корреляции велики и система уровней энергии более жесткая. При этом наблюдается явление отталкивания уровней энергии. Такая ситуация соответствует проводящей фазе, то есть металлической стороне фазового перехода Андерсона.

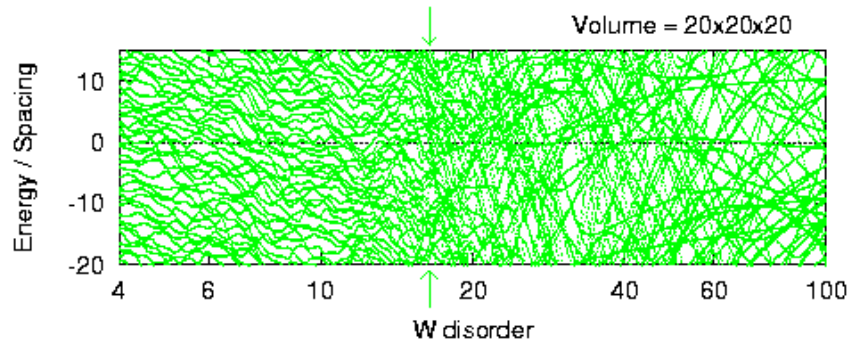


Рис. 1. Энергетический дискретный спектр модели Андерсона для неупорядоченной трехмерной кубической системы со стороной $L = 20$ как функция степени беспорядка W для одной реализации узловых потенциалов. Фазовый переход проводник-изолятор соответствует резкому изменению поведения спектра при увеличении беспорядка W (слева направо). Стрелками показано положение критического значения беспорядка $W_c = 16.5$

Справа от стрелок, то есть для $W > W_c$ электронный спектр резко меняет свой характер. Флуктуации становятся более хаотическими, а электронные термы могут пересекаться – отталкивание уровней энергии исчезает. Эта фаза соответствует диэлектрической стороне перехода проводник-изолятор. Таким образом, даже по одной реализации случайного потенциала можно идентифицировать критическую точку перехода и найти значение критического беспорядка. Мониторинг по множеству уровней энергии в спектре единственного образца эквивалентен усреднению по ансамблю образцов. Таким образом, условие эргодичности выполняется.

В этой статье мы докладываем результаты численного моделирования по статистике уровней энергии в четырехмерных, пятимерных и шестимерных неупорядоченных системах. Показано, что

функция распределения расстояний между ближайшими уровнями энергии проявляет критическое поведение вплоть до высокой размерности $d = 6$. Они размерно-независимы (т.е. удовлетворяют условию универсальности в термодинамическом пределе). При определенных значениях беспорядка $W = 34.5$, $W = 57.3$ и $W = 85.0$, соответственно для $d = 4$, $d = 5$ и $d = 6$, наступает переход от проводника к изолятору, что в значительно отличается от результата в обычных трехмерных системах $W = 16.5$ [15]. На нижней границе андерсоновского перехода $d_l = 2$ все электронные состояния локализованы независимо от энергии и степени конечного беспорядка. Естественно предположить, что в этом случае распределение Вигнера может служить критическим распределением, отвечающим критическому беспорядку $W_c = 0$.

С другой стороны, на верхней границе размерности для перехода металл-изолятор d_u все состояния делокализованы при любом сколь угодно большом значении беспорядка. Статистика уровней энергии для конечных W не проявляет никаких критических особенностей и всегда управляется теорией Вигнера-Дайсона. Отсюда можно сделать предположение, что закон Пуассона играет роль критического распределения на верхней границе перехода d_u .

Анализируя скэйлинговые свойства статистики уровней, мы определяем величины критических показателей длины локализации $\nu = 1.1$ и $\nu = 0.7$ для размерностей $d = 4$ и $d = 5$. Из-за сравнительно малых размеров систем, которые были достигнуты для размерности $d = 6$, вычисленное значение критического индекса имеет порядок систематической ошибки, поэтому мы его здесь не приводим. Однако на основании уже полученных результатов можно сделать вывод о том, что критический индекс падает с ростом размерности. Этот факт качественно совпадает с теорией среднего поля [6], которая утверждает, что в пределе бесконечной размерности значение критического индекса является точным и равно $\nu = 0.5$.

Мы также нашли, что критическая статистика уровней специфична для каждой размерности, то есть функция распределения расстояний между уровнями энергии и спектральные корреляции зависят от числа размерностей, которое имеет исследуемая неупорядоченная система. Причем критическое распределение само испытывает непрерывный переход от распределения Вигнера для двумерных систем к закону Пуассона при увеличении размерности d . Точное пуассоновское распределение достигается в пределе бесконечно-размерных систем.

Рассуждая далее в духе полевой теории, можно предположить, что верхняя критическая размерность для перехода Андерсона является бесконечной, т.е. $d_c = \infty$, а не $d_c = 4$, как утверждалось в работах [4, 5]. В этом заключается ключевой момент этой работы.

При численном моделировании мы использовали гамильтониан Андерсона для неупорядоченных систем. В представлении вторичного квантования он имеет следующий вид.

$$H = I \left[\sum_i \varepsilon_i a_i^+ a_i + \sum_{i \neq j} (a_j^+ a_i + h.c.) \right], \quad (3)$$

где a_i^+ и a_i – операторы рождения и аннигиляции, соответственно, состояния на узле i гиперкубической решетки; j – номера шести ближайших к решетке соседей узла i ; ε_i – случайная энергия узлов; I – интеграл перекрытия ближайших узлов; $h.c.$ – эрмитово сопряжение. Для численного моделирования мы применяли случайное равномерное распределение локальных энергий узлов ε_i в интервале от $-W/2$ до $W/2$.

На рис. 2 показано поведение спектрального коррелятора $R(s)$ для разной степени беспорядка W в четырехмерной и шестимерной системе. Видно, что с увеличением числа размерности от $d = 3$ до $d = 4$ кривая для критического коррелятора прижимается к оси ординат. Это означает, что спектральные корреляции ослабевают с ростом размерности пространства.

Чтобы определить скейлинговый сценарий, мы изучили зависимость статистики энергетических уровней от пространственной размерности на фазовом переходе изолятор-проводник. Для этого вычислялась зависимость дисперсии спейсинга Jo от степени беспорядка W . Точки пересечения кривых $Jo(W)$ соответствуют критическим значениям беспорядка W_c . Было установлено, что с увеличением числа измерений критический беспорядок растет. Одновременно растет критическое значение дисперсии спейсингов Jo (ординаты точек пересечений), что свидетельствует о кроссовере критической статистики уровней от распределения Вигнера к предельному закону Пуассона.

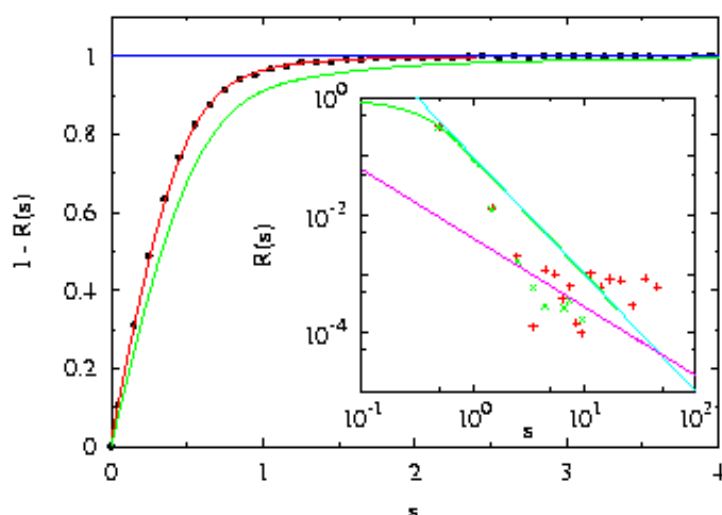


Рис. 2. Двухуровневая корреляционная функция $R(s)$ для размерности $d = 4$ и $d = 6$ для различной степени беспорядка W , полученная в результате диагонализации гамильтониана (3) для различных гиперрешеток. На вставке приведена асимптотика коррелятора

Таким образом, увеличивая пространственную размерность от $d = 3$ до $d = 6$, мы обнаружили непрерывный переход спектральных корреляций от результатов теории хаотических матриц, справедливой для проводящей фазы, до пуассоновского предела совершенно некоррелированных переменных, которым управляет изолирующая фаза. Аналогичный результат был получен ранее в работе [5], где использовался другой метод, а именно процедура трансфер-матриц, которая больше соответствует задачам на квантово-механическом рассеянии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Zharekeshev I.Kh. Spectral density of states in quantum nanoclusters // Вестник КазНУ, серия физическая. – 2010. – Т. 32, № 1. – С. 47-50.
2. Abrahams E., Anderson P.W., Licciardello D.C., Ramakrishnan T.V. Scaling theory of localization: Absence of quantum diffusion in two dimensions // Phys. Rev. Lett. – 1979. – V. 42, N 10. – P. 673-676.
3. Kramer B., MacKinnon A. Localization: theory and experiment // Rep. Prog. Phys. – 1993. – Vol.56. – P. 1496-1564; MacKinnon A. Critical exponents for the metal-insulator transition // J. Phys.: Condens. Matter. – 1994. – V. 6. – P. 2511-2516.
4. Markos P. Metal-insulator transition in two-dimensional Ando model // J. Phys. I France. – 1994. – V. 4. – P. 551-564.
5. Schreiber M., Grussbach H. Dimensionality dependence of the metal-insulator transition in the Anderson model of localization // Phys. Rev. Lett. – 1996. – V. 76. – P. 1687-1690
6. Efetov K.B. Supersymmetry in Disorder and Chaos. – Cambridge: Cambridge University, 1997. – 540 p.
7. MacKinnon A., Kramer B. One-parameter scaling of localization length and conductance in disordered systems // Phys.Rev.Lett. – 1981. –V. 47. – P. 1546-1549.
8. Shklovskii B.I., Shapiro B., Sears B.R., Lambrianides P., Shore H.B. Statistics of spectra of disordered systems near the metal-insulator transition // Phys. Rev. B. – 1993. – V. 47. – P. 11487-11490.
9. Hofstetter E., Schreiber M. Relation between energy-level statistics and phase transition and its application to the Anderson model // Phys. Rev. B. – 1994. – V. 49. – P. 14726-14729.
10. Batsch M., Zharekeshev I.Kh, Kramer B. Decimation algorithm for the statistics of energy levels // Sol. State Commun. – 1995. – V. 95. – P. 353-356.
11. Wigner E.P. Statistical theories of spectral fluctuations / ed. by C.E. Porter. – New York: Acad. Press, 1965. – 576 p.
12. Mehta M.L. Random Matrices. – Boston: Academic Press, 1991. – 532 p.
13. Aronov A.G., Kravtsov V.E., Lerner I.V. Spectral correlations in disordered electronic systems: Crossover from metal to insulator regime // Phys. Rev. Lett. – 1995. – V. 74. – P. 1174-1177.
14. Kravtsov V.E., Lerner I.V., Altshuler B.L., Aronov A.G. Universal spectral correlations at the mobility edge // Phys. Rev. Lett. – 1994. – V. 72. – P. 888-891.
15. Zharekeshev I.Kh., Kramer B. Scaling of level statistics at the disorder-induced metal-insulator transition // Phys. Rev. B. – 1995. – V. 51. – P. 17239-17242.
16. Evangelou S.N. Level-spacing function $P(S)$ at the mobility edge // Phys. Rev. B. – 1994. – V. 49. – P. 16805-16808.
17. Batsch M., Schweitzer L., Zharekeshev I.Kh., Kramer B. Crossover from Critical Orthogonal to Critical Unitary Statistics at the Anderson Transition // Phys. Rev. Lett. – 1996. – V. 77. – P. 1552-1555.
18. Schweitzer L., Zharekeshev I.Kh. Critical level spacing distribution of two-dimensional disordered systems with spin-orbit coupling // J. Phys.: Condens. Matter. – 1995. – V. 7. – P. L377-L382.

И. Х. Жәрекешев

ИЗОЛЯТОРДАН ӨТКІЗГІШТІККЕ ФАЗАЛЫҚ АУЫСУДЫҢ
ӨЛШЕМДІЛІК БАЙЛАНЫСТЫЛЫҒЫ

Изолятор-металдың ретсіздіктен туындайтын фазалық ауысуы үшін энергия деңгейлері критикалық статистикасының өлшеулер санына байланыстылығы зерттелген. $d = 4, 5$ және 6 кеңістіктік өлшемдер үшін сандық қорытындыларға қол жеткізілген. Ұқсастықтың қасиеттері анықталған ретсіздіктің критикалық өлшемі және локализация ұзындылығының критикалық көрсеткіштері табылған.

Түйін сөздер: электрондық өткізгіштік, реттелмеген жүйелер, критикалық құбылыстар, кванттық локализация.

I. Kh. Zharekeshev

DIMENSIONALITY DEPENDENCE OF THE PHASE TRANSITION
FROM INSULATOR TO CONDUCTOR

The dependence of the critical statistics of the energy levels on the number of dimensions is investigated for the phase transition insulator-conductor induced by randomness. The numerical results for special dimensionalities $d = 4, 5$ and 6 are obtained. The scaling properties are established and the critical values of disorder and the critical indices of the localization length are found.

Key words: electron conductivity, disordered systems, critical phenomena, quantum localization.

*КазНУ им. аль-Фараби,
г. Алматы*

Поступила 20.12.2012 г.

МАЗМҰНЫ
Атомдық ядро және элементарлық бөлшектер физикасы

<i>Рыстығұлова В.Б., Белисарова Ф.Б.</i> Пластинаның еркін механикалық сипаттамалары ескерілген деформациясы.....	3
<i>Рыстығұлова В.Б., Белисарова Ф.Б.</i> Құрама цилиндрлік қабықшаның біртекті емес температуралық өрістегі деформациясы.....	6
<i>Рыстығұлова В.Б., Белисарова Ф.Б.</i> Құрама серпімді біртекті емес пластина иілімінің есебі.....	12

Информатика

<i>Саденов А.Е.</i> Қазақ тілінің сөйлеу синтезі тапсырмаларына арналған жасырын Марков тізбегінің ықтималдылық үлгісін қолдану.....	17
--	----

Космостық зерттеулер

<i>Жылысбаева Қ.С.</i> Жасаңды аспан денесінің ұйытқыған қозғалысын әсер-бұрыш айнаымалылар арқылы зерттеу.....	21
---	----

Математикалық физика

<i>Жұмабаев Д.С., Иманчиев А.Е.</i> Жай дифференциальдық теңдеулер жүйесі үшін көпнүктелі шеттік есептің оқшауланған шешімі бар болуының критерийі.....	25
<i>Сейітмұратов А.Ж.</i> Қалыңдығы 2h болатын тік төртбұрышты пішіндегі жазық элементтің өзіндік тербелісінің жиілігін анықтау есебі.....	30
<i>Жәрекешев И.Х.</i> Изолятордан өткізгіштікке фазалық ауысудың өлшемділік байланыстылығы.....	36

СОДЕРЖАНИЕ

Физика атомного ядра и элементарных частиц

<i>Рыстыгулова В.Б., Белисарова Ф.Б.</i> Деформация пластины с произвольными механическими характеристиками.....	3
<i>Рыстыгулова В.Б., Белисарова Ф.Б.</i> Деформация составной цилиндрической оболочки в неоднородном температурном поле.....	6
<i>Рыстыгулова В.Б., Белисарова Ф.Б.</i> Задача об изгибе составной упругой неоднородной пластины.....	12

Информатика

<i>Саденов А. Е.</i> Синтез речи казахского языка с использованием вероятностной модели скрытых марковских цепей.....	17
---	----

Космические исследования

<i>Жилисбаева К.С.</i> Исследование возмущенного движения искусственного небесного тела в переменных действие-угол.....	21
---	----

Математическая физика

<i>Джумабаев Д.С., Иманчиев А.Е.</i> Критерий существования изолированного решения многоточечной краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.....	25
<i>Сейтмуратов А.Ж.</i> Приближенные уравнения колебания двухслойной пластинки постоянной толщины.....	30
<i>Жарекешев И.Х.</i> Размерностная зависимость фазового перехода от изолятора к проводнику.....	36

CONTENTS

Nuclear physics and elementary particles physics

- Rystygulova V.B., Belisarova F.B.* Deformation plate with arbitrary mechanical characteristics.....3
Rystygulova V.B., Belisarova F.B. Deformation of composite cylindrical shell in inhomogeneous temperature field..... 6
Rystygulova V.B., Belisarova F.B. The bending problem of the complex elastic heterogeneous plate..... 12

Informatics

- Sadenov A.E.* Kazakh language speech synthesis using Hidden Markov Models..... 17

Space activities

- Zhilisbayeva K.S.* Research of perturbed movement of the artificial celestial body in action-angle variables.....21

Mathematical physics

- Dzhumabaev D.S., Imanchiev A.E.* The criteria of existence isolated solution multipoint boundary value problem for system of ordinary differential equations..... 25
Seitmuratov A.Zh. The exercise of oscillation is examined with the flat element of rectangular form, the stoutness of which is equalize in ($\approx 2h$) it is occupied the pout of expanse.....30
Zharekeshev I.Kh. Dimensionality dependence of the phase transition from insulator to conductor..... 36

Редактор *М. С. Ахметова, Ж. М. Нургожина*
Верстка на компьютере *Д. Н. Калкабековой*

Подписано в печать 22.12.2012.
Формат 60x88^{1/8}. Бумага офсетная. Печать – ризограф.
2,75 п.л. Тираж 300. Заказ 6.

ПРАВИЛА для авторов журналов НАН РК

В журналах публикуются научные статьи и заметки, экспресс-сообщения о результатах исследований в различных областях естественно-технических и общественных наук.

Журналы публикуют сообщения академиков НАН РК, а также статьи других ученых, представленные действительными членами НАН РК (академиками НАН РК), несущими ответственность за достоверность и значимость научных результатов и актуальность научного содержания рекомендуемых работ.

Представленные для опубликования материалы должны удовлетворять следующим требованиям:

1. Содержать результаты оригинальных научных исследований по актуальным проблемам в области физики, математики, механики, информатики, биологии, медицины, геологии, химии, экологии, общественных и гуманитарных наук, ранее не опубликованные и не предназначенные к публикации в других изданиях. Статья сопровождается разрешением на опубликование от учреждения, в котором выполнено исследование и представлением от академика НАН РК.

2. Статья представляется в одном экземпляре. Размер статьи не должен превышать 5 машинописных страниц (статьи обзорного характера – до 10 стр.), включая аннотацию в начале статьи перед основным текстом (аннотация до 1/3 стр. через 1 компьютерный интервал, 12 пт), таблицы, рисунки, список литературы (12 пт через 1 компьютерный интервал), напечатанных в редакторе Word, шрифтом Times New Roman 14 пт, с пробелом между строк 1,5 компьютерных интервала, поля – верхнее и нижнее 2 см, левое 3 см, правое 1,5 см. Количество рисунков – не более пяти. В начале статьи вверху слева следует указать индекс УДК. Далее посередине страницы прописными буквами (курсивом) – инициалы и фамилии авторов, ниже также посередине заглавными буквами (полужирным шрифтом) – название статьи; затем посередине строчными буквами в круглых скобках – название организации(ий), в которой выполнена работа, и город. Последняя страница подписывается всеми авторами. Прилагается электронный вариант на новом CD-диске.

3. Статьи публикуются на русском, казахском, английском языках. К статье необходимо приложить на отдельной странице Ф.И.О. авторов, название статьи, аннотацию на двух языках (на казахском и английском или на русском и английском), а также сведения об авторах (ученая степень, ученое звание, адрес, место работы, телефон, факс, e-mail) на отдельной странице.

4. Ссылки на литературные источники даются цифрами в прямых скобках по мере упоминания. Список литературы оформляется следующим образом:

1. *Адамов А.А.* Процессы протаивания грунта // Доклады НАН РК. 2007. №1. С. 16-19.

2. *Чудновский А.Ф.* Теплообмен в дисперсных средах. М.: Гостехиздат, 1994. 444 с.

5. В случае переработки статьи по просьбе редакционной коллегии журнала датой поступления считается дата получения редакцией окончательного варианта. Если статья отклонена, редакция сохраняет за собой право не вести дискуссию по мотивам отклонения.