ISSN 2518-1726 (Online),
ISSN 1991-346X (Print)

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ

Х А Б А Р Л А Р Ы

ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

N E W S

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА СЕРИЯСЫ

♦

СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

♦

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

6 (310)

ҚАРАША – ЖЕЛТОҚСАН 2016 Ж.
НОЯБРЬ – ДЕКАБРЬ 2016 г.
NOVEMBER – DECEMBER 2016

1963 ЖЫЛДЫҢ ҚАҢТАР АЙЫНАН ШЫҒА БАСТАҒАН
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1963 ГОДА
PUBLISHED SINCE JANUARY 1963

ЖЫЛЫНА 6 РЕТ ШЫҒАДЫ
ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД
PUBLISHED 6 TIMES A YEAR

АЛМАТЫ, ҚР ҰҒА
АЛМАТЫ, НАН РК
ALMATY, NAS RK

«ҚР ҰҒА Хабарлары. Физика-математикалық сериясы».

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346Х (Print)

Меншіктенуші: «Қазақстан Республикасының Ұлттық ғылым академиясы» РҚБ (Алматы қ.)
Қазақстан республикасының Мәдениет пен ақпарат министрлігінің Ақпарат және мұрағат комитетінде 01.06.2006 ж. берілген **№5543-Ж** мерзімдік басылым тіркеуіне қойылу туралы куәлік

Мерзімділігі: жылына 6 рет.
Тиражы: 300 дана.

Редакцияның мекенжайы: 050010, Алматы қ., Шевченко көш., 28, 219 бөл., 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18, www:nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

---

Типографияның мекенжайы: «Аруна» ЖК, Алматы қ., Муратбаева көш., 75.

«Известия НАН РК. Серия физико-математическая».

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы)
Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации и архивов Министерства культуры и информации Республики Казахстан **№5543-Ж**, выданное 01.06.2006 г.

Периодичность: 6 раз в год.
Тираж: 300 экземпляров.

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, ком. 219, 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,
www:nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75.

News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physical-mathematical series.

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Owner: RPA "National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan" (Almaty)
The certificate of registration of a periodic printed publication in the Committee of information and archives of the Ministry of culture and information of the Republic of Kazakhstan N 5543-Ж, issued 01.06.2006

Periodicity: 6 times a year
Circulation: 300 copies

Editorial address: 28, Shevchenko str., of. 219, 220, Almaty, 050010, tel. 272-13-19, 272-13-18,
www:nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

Address of printing house: ST "Aruna", 75, Muratbayev str, Almaty

N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346Х
Volume 6, Number 310 (2016), 115 – 120

UDC 517.956.29

U.A. Iskakova, B.T. Torebek

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
torebek@math.kz

CERTAIN METHOD OF SOLVING ILL-POSED CAUCHY-ROBIN PROBLEM FOR THE LAPLACE OPERATOR

Abstract. In this paper we consider the Robin-Cauchy problem for Laplace equations in a cylindrical domain. The method of spectral expansion in eigenfunctions of the Robin-Cauchy problem for equations with deviating argument establishes a criterion of the strong solvability of the considered Robin-Cauchy problem. It is shown that the ill-posedness Robin-Cauchy problem is equivalent to the existence of an isolated point of the continuous spectrum for a self-adjoint operator with deviating argument.

Key words: Laplace equation, Robin-Cauchy problem, self-adjoint operator, ill-posedness.

УДК 517.956.29

У.А. Искакова, Б.Т. Торебек

Институт математики и математического моделирования, г. Алматы, Республика Казахстан

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ НЕКОРЕКТНОЙ ЗАДАЧИ РОБЕНА-КОШИ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА

Аннотация. В настоящей работе рассматривается задача Робена-Коши для уравнения Лапласа в цилиндрической области. Методом спектрального разложения по собственным функциям задачи Робена-Коши для уравнения с отклоняющимся аргументом, установлен критерий сильной разрешимости рассматриваемой задачи Робена-Коши. Показывается, что некорректность задачи Робена-Коши оказывается эквивалентной существованию изолированной точки непрерывного спектра для самосопряженного оператора с отклоняющимся аргументом.

Ключевые слова: уравнение Лапласа, задача Робена-Коши, самосопряженный оператор, некорректность.

1. Введение и основной результат.

Как известно, Ж. Адамаром [1] был построен пример, показывающий неустойчивость решения задачи Коши для уравнения Лапласа. В [2], [3] и других, эта задача Коши сведена к интегральным уравнениям первого рода, и даны различные методы регуляризации задачи и установлена ее условная корректность.

В отличие от приведенных результатов, в настоящей работе обосновывается новый критерий корректности (некорректности) начально-краевой задачи для эллиптического уравнения второго порядка в трехмерном цилиндре. Принципиальное отличие нашей работы от работ других авторов заключается в применении спектральных задач для уравнений с отклоняющимся аргументом при исследовании некорректных краевых задач. Данный метод впервые применялась в [4] к решению задачи Коши для двумерного уравнения Лапласа.

Пусть $D=(0,1)\times\Omega$ - цилиндр, $\Omega\subset R^n, n>1$ - ограниченная область с границей S.

В D рассмотрим смешанную задачу Коши для эллиптического уравнения

$$Lu\equiv u_{tt}(x,t)+\Delta u(x,t)=f(x,t),(x,t)\in D, \quad (1)$$

с условиями Робена $$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x,t)+\alpha u(x,t)=0, x\in S, t\in[0,1], \tag{2}$$
(ν – вектор внешней нормали к S) и Коши
$$u(0,x)=u_t(0,x)=0, x\in\Omega\bigcup S. \tag{3}$$

Здесь $\alpha\geq 0$ - действительное число.

Определение. *Функцию* $u\in L_2(D)$ *назовем сильным решением смешанной задачи Робена-Коши (1)-(3), если существует такая последовательность функций* $u_n\in C^2(\bar{D})$, *удовлетворяющих условиям (2) и (3), и таких, что* u_n *и* Lu_n *сходятся в норме* $L_2(D)$ *соответственно к* $u(x,t)$ *и* $f(x,t)$.

В дальнейшем важную роль будет играть следующая задача на собственные значения для эллиптического уравнения с отклоняющимся аргументом.

Найти числовые значения λ (собственные значения), при которых задача для дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом
$$Lu\equiv u_{tt}(x,t)+\Delta u(x,t)=\lambda u(x,1-t),(x,t)\in D, \tag{4}$$
имеет ненулевые решения (собственные функции), удовлетворяющие условиям (2) и (3).

Очевидно, что эквивалентная запись уравнения (4) имеет вид $LPu=\lambda u,(t,x)\in D,$ где $Pu(x,t)=u(x,1-t)$ - унитарный оператор.

Рассмотрим следующую спектральную задачу Робена для оператора Лапласа
$$-\Delta u_k(x)=\mu_k u_k(x), x\in\Omega, \tag{5}$$
$$\frac{\partial u_k}{\partial \nu}(x)+\alpha u_k(x)=0, x\in S. \tag{6}$$

Известно, что задача (5)-(6) является самосопряженным, неотрицательно определенным оператором в $L_2(\Omega)$. Все собственные значения задачи (5)-(6) неотрицательны и дискретны, а система всех собственных функций образуют полную ортонормированную систему в $L_2(\Omega)$. Пусть μ_k - все собственные значения (занумерованные в порядке неубывания), а $u_k(x), k\in N$ - полная система всех ортонормированных собственных функций спектральной задачи (5)-(6).

Теорема 1.1 *Спектральная задача Коши (4), (3) имеет полную ортонормированную систему собственных векторов*
$$u_{km}(x,t)=u_k(x)\cdot v_{km}(t), \tag{7}$$
где $k,m\in N$, $v_{km}(t)$ - ненулевые решения задачи
$$v''_{km}(t)-\mu_k v_{km}(t)=\lambda_{km}v_{km}(1-t),\ 0<t<1, v_{km}(0)=v'_{km}(0)=0, \tag{8}$$
а λ_{km} - собственные значения задачи (4), (3). При этом для больших k наименьшее собственное значение λ_{k1} имеет асимптотику
$$\lambda_{k1}=4\mu_k e^{-\sqrt{\mu_k}}(1+o(1)). \tag{9}$$

Теорема 1.2 *Сильное решение смешанной задачи Коши (1) - (3) существует тогда и только тогда, когда* $f(x,t)$ *удовлетворяет неравенству*
$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\tilde{f}_{k1}}{\lambda_{k1}}\right|^2<\infty, \tag{10}$$
где $\tilde{f}_{km}=(f(x,1-t),u_{km}(x,t))$.

Если выполняется условия (10), то решение задачи (1)-(3) можно представить в виде
$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\tilde{f}_{k1}}{\lambda_{k1}}u_{k1}(x,t)+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=2}^{\infty}\frac{\tilde{f}_{km}}{\lambda_{km}}u_{km}(x,t). \tag{11}$$

Обозначим через $\tilde{L}_2(D)$ подпространство $L_2(D)$, натянутое на собственные вектора $\{u_{k1}(x,t)\}_{k=p+1}^{\infty}$, $p\in N$ а через $\hat{L}_2(D)$ - его ортогональное дополнение $L_2(D)=\tilde{L}_2(D)\oplus\hat{L}_2(D)$.

Теорема 1.3. *Для любого* $f \in \overset{\circ}{E}_2(D)$ *решение задачи (1)-(3) существует, единственно и принадлежит* $\overset{\circ}{E}_2(D)$. *Это решение устойчиво и имеет вид*

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{p}\frac{\tilde{f}_{k1}}{\lambda_{k1}}u_{k1}(x,t)+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=2}^{\infty}\frac{\tilde{f}_{km}}{\lambda_{km}}u_{km}(x,t). \quad (12)$$

3. Some auxiliary statements

В этом пункте приведем некоторые вспомогательные утверждения для доказательства основных результатов.

Лемма 1.1 При каждом фиксированном значении индекса k спектральная задача (8) имеет полную ортонормированную в $L_2(0,1)$ систему собственных векторов $v_{km}(t)$, $m=1,2,...$, соответствующих собственным значениям λ_{km}. Эти собственные значения λ_{km} являются корнями уравнения

$$\sqrt{\mu_k-\lambda}ch\frac{\sqrt{\mu_k+\lambda}}{2}ch\frac{\sqrt{\mu_k-\lambda}}{2}-\sqrt{\mu_k+\lambda}sh\frac{\sqrt{\mu_k+\lambda}}{2}sh\frac{\sqrt{\mu_k-\lambda}}{2}=0. \quad (13)$$

Доказательство. Действительно, применяя к задаче Коши (8) обратный оператор L_C^{-1} приходим к операторному уравнению

$$v_{km}(t)=\lambda L_C^{-1}Pv_{km}(t),$$

где $Pf(t)=f(1-t)$, а функция $\phi(t)=L_C^{-1}f(t)$ является решением задачи Коши

$$\phi''(t)-\mu_k\phi(t)=f(t),\phi(0)=\phi'(0)=0,\forall f(t)\in L_2(0,1).$$

Тогда для оператора L_C^{-1} имеем представление

$$L_C^{-1}f(t)=\frac{1}{\sqrt{\mu_k}}\int_0^t f(\xi)sh\sqrt{\mu_k}(t-\xi)d\xi,\forall f(t)\in L_2(0,1). \quad (14)$$

Следовательно, сопряженный оператор имеет вид

$$\left(L_C^{-1}\right)^* f(t)=\frac{1}{\sqrt{\mu_k}}\int_t^1 f(\xi)sh\sqrt{\mu_k}(\xi-t)d\xi,\forall f(t)\in L_2(0,1). \quad (15)$$

Учитывая представления (14) и (15), нетрудно убедиться, что $L_C^{-1}Pf=P\left(L_C^{-1}\right)^* f$.

Тогда цепочка равенств $L_C^{-1}Pf=P\left(L_C^{-1}\right)^* f=P^*\left(L_C^{-1}\right)^* f=\left(L_C^{-1}P\right)^* f,\forall f(t)\in L_2(0,1)$, позволяет заключить, что оператор $L_C^{-1}P$ является вполне непрерывным самосопряженным оператором Гильберта-Шмидта [5]. Следовательно при каждом $k=1,2,...$, спектральная задача (8)-(6) имеет полную ортонормированную систему функций $v_{km}(t),m=1,2,...$ в $L_2(0,1)$.

Собственные функции задачи (4), (3) ищем методом разделения переменных в виде

$$u_k(x,t)=u_k(x)v(t),$$

где $k\in N$. Тогда для определения неизвестной функции $v(t)$ имеем спектральную задачу для уравнения с отклоняющимся аргументом (8).

Нетрудно показать, что общее решение уравнения из (8) имеет вид

$$v(t)=c_1\ ch\sqrt{\mu_k+\lambda}\left(t-\frac{1}{2}\right)+c_2\ sh\sqrt{\mu_k-\lambda}\left(t-\frac{1}{2}\right),$$

где c_1 и c_2 – некоторые постоянные.

Используя начальные условия в (8), приходим к системе линейных однородных уравнений относительно этих постоянных. Как известно, чтобы эта система имела нетривиальное решение, выражение (13) должен равняться нулю. Таким образом, для определения параметра λ имеем (13).

Лемма 1.1 доказана полностью.

Пусть

$$\varpi_k(\lambda) = \ln\left(cth\frac{\sqrt{\mu_k+\lambda}}{2}\right) + \ln\left(cth\frac{\sqrt{\mu_k-\lambda}}{2}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\mu_k+\lambda}{\mu_k-\lambda}\right) = 0. \qquad (16)$$

Лемма 1.2 Существует число λ_0 такое, что при всех

$$0 < \lambda < \lambda_0 < \frac{\mu_k}{4\mu_k+\theta}, k \geq 1, \theta \in (0,1),$$

справедливы следующие утверждения:

1) функция $\varpi'_k(\lambda)$ сохраняет постоянный знак;

2) для функции $\varpi''_k(\lambda)$ выполняется неравенство $\left|\lambda\mu_k\varpi''_k(\lambda)\right| < 1, k > 1.$

Доказательство. В силу леммы 1.1 имеем вещественность собственных значений задачи (8) - (6), то есть вещественность корней λ_{km} уравнения (13).

При этом легко проверить, что $\lambda_{km} > 0$. Действительно, выпишем асимптотику наименьших собственных значений λ_{km} при $k \to \infty$.

После нетривиальных преобразований уравнения (13), имеем

$$\frac{\sqrt{\mu_k+\lambda}}{\sqrt{\mu_k-\lambda}} = cth\frac{\sqrt{\mu_k+\lambda}}{2} cth\frac{\sqrt{\mu_k-\lambda}}{2}. \qquad (17)$$

Считая $|\lambda| < 1$ и логарифмируя обе части равенства (17), получаем (16). Вычислив здесь производную, получаем $\varpi'_k(0) = -\frac{1}{\mu_k}$. Тогда искомую границу монотонности функции $\varpi_k(\lambda)$ можно определить из соотношения $\varpi'_k(\lambda_0) = \varpi'_k(0) + \varpi''_k(\theta\lambda_0)\lambda_0 < 0$. Здесь $0 < \lambda_0 < 1$ а $\theta \in (0, 1)$ - произвольное число. Таким образом, для определения λ_0 имеем условие

$$\lambda_0\mu_k\varpi''_k(\theta\lambda_0) < 1. \qquad (18)$$

Распишем явно вторую производную функций $\varpi_k(\lambda)$:

$$\varpi''_k(\lambda) = \frac{ch\sqrt{\mu_k+\lambda}}{4(\mu_k+\lambda)sh^2\sqrt{\mu_k+\lambda}} + \frac{ch\sqrt{\mu_k-\lambda}}{4(\mu_k-\lambda)sh^2\sqrt{\mu_k-\lambda}} +$$
$$+\frac{1}{4\sqrt{(\mu_k+\lambda)^3}sh\sqrt{\mu_k+\lambda}} + \frac{1}{4\sqrt{(\mu_k-\lambda)^3}sh\sqrt{\mu_k-\lambda}} - \frac{2\lambda\mu_k}{\left(\mu_k^2-\lambda^2\right)^2}.$$

Так как $\frac{2\lambda_0\theta\mu_k}{\left(\mu_k^2-(\lambda_0\theta)^2\right)^2} \geq -\frac{1}{\left(\mu_k+\lambda_0\theta\right)^2}$ и $\frac{ch\sqrt{\mu_k \pm \lambda_0\theta}}{sh^2\sqrt{\mu_k \pm \lambda_0\theta}} \leq \frac{1}{ch\sqrt{\mu_k \pm \lambda_0\theta}-1}$.

Тогда верно неравенство $\varpi''_k(\lambda_0\theta) \leq \frac{1}{\left(\mu_k-\lambda_0\theta\right)} \frac{2+\left(1-e^{-\sqrt{\mu_k-\lambda_0\theta}}\right)^2}{\left(1-e^{-\sqrt{\mu_k-\lambda_0\theta}}\right)^2}$.

Значит

$$\varpi''_k(\lambda_0\theta) < \frac{1}{\left(\mu_k-\lambda_0\theta\right)} \frac{3-2e^{-\sqrt{\mu_k-\lambda_0\theta}}+e^{-2\sqrt{\mu_k-\lambda_0\theta}}}{\left(1-e^{-\sqrt{\mu_k-\lambda_0\theta}}\right)^2} \qquad (19)$$

Далее, при больших значениях k из (19) получаем справедливость неравенства

$$\varpi''_k(\lambda_0\theta) \leq \frac{4}{\mu_k-\lambda_0\theta}.$$

К последнему применяя условие (18), получим требуемую границу для λ_0: $\lambda_0 < \frac{\mu_k}{4\mu_k+\theta}, \mu_k > 1, 0 < \theta < 1$. Лемма 1.2 доказана.

Рассмотрим теперь вопрос об асимптотике собственных значений задачи (8) при больших k.

Лемма 1.3 *Асимптотика собственных значений задачи (8), не превосходящих* λ_0, *при больших* k *имеет следующий вид* (9).

Доказательство. Согласно лемме 1.2, монотонная функция $f_k(\lambda)$ на интервале $(0,\lambda_0)$ может иметь только один нуль. По формуле Тейлора имеем

$$\varpi_k(\lambda)=\varpi_k(0)+\frac{\varpi_k'(0)}{1!}\lambda+\frac{\varpi_k''(\theta\lambda)}{2!}\lambda^2<0\,,0<\theta<1.$$

Подставляя вычисленные значения функций и ее производной, получаем

$$\varpi_k(\lambda)=2\ln\left(cth\frac{\sqrt{\mu_k}}{2}\right)-\frac{\lambda}{\mu_k}+\varpi_k''(\theta\lambda)\frac{\lambda^2}{2}.$$

Тогда нулем линейной части функции $\mu_k\varpi_k(\lambda)=2\mu_k\ln\left(cth\frac{\sqrt{\mu_k}}{2}\right)-\lambda+\frac{\mu_k\lambda^2}{2}\varpi_k''(\theta\lambda)$ будет $\lambda_{k1}=2\mu_k\ln\left(\frac{1+e^{-\sqrt{\mu_k}}}{1-e^{-\sqrt{\mu_k}}}\right)$. При достаточно больших значениях $k\in N$, учитывая асимптотические формулы последнее можно записать виде $\lambda_{k1}=4\mu_k e^{-\sqrt{\mu_k}}\left(1+o(1)\right)$.

Учитывая результат леммы 1.2, на окружности $|\lambda|=4\mu_k e^{-\sqrt{\mu_k}}(1+\varepsilon)$, где ε - сколь угодное малое положительное число, для достаточно больших $k\ge k_0(\varepsilon)$ легко проверить справедливость неравенства

$$\left|\varpi_k''(\theta\lambda)\mu_k\lambda^2\right|_{|\lambda|=4\mu_k e^{-\sqrt{\mu_k}}(1+\varepsilon)}\le C\left|2\mu_k\ln\left(\frac{1+e^{-\sqrt{\mu_k}}}{1-e^{-\sqrt{\mu_k}}}\right)-\lambda\right|_{|\lambda|=4\mu_k e^{-\sqrt{\mu_k}}(1+\varepsilon)}.$$

Тогда по теореме Руше [7] имеем, что количество нулей функции $\mu_k\varpi_k(\lambda)$ и ее линейной части совпадают и лежат внутри круга $|\lambda|=4\mu_k e^{-\sqrt{\mu_k}}(1+\varepsilon)$. Следовательно, функция $\mu_k\varpi_k(\lambda)$ при $0<\lambda<\lambda_0$ имеет один нуль, асимптотика которого задается формулой (9). Лемма 1.3 доказана.

4. Proof of the main results

Доказательство теоремы 1.1. Через $u_k(x), k\in N$ мы обозначили полную систему ортонормированных собственных функций задачи (5) в $L_2(\Omega)$. В силу леммы 1.1 при каждом фиксированном значении индекса k спектральная задача (8) имеет полную ортонормированную систему собственных векторов $v_{km}(t)$, $m=1,2,...$ в $L_2(0,1)$. Тогда система (7) образует полную ортогональную систему в $L_2(D)$. Следовательно, других собственных значений и собственных функций задача (4), (3) не имеет. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 1.2. Пусть $u(x,t)\in C^2(D)$ - решение задачи (1) - (3). Тогда, в силу полноты и ортонормированности собственных функций $u_{km}(x,t)$ задачи (4), (3), функцию $u(x,t)$ в пространстве $L_2(D)$ можно разложить в ряд [6]

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}a_{km}u_{km}(x,t), \tag{20}$$

где a_{km} – коэффициенты Фурье по системе $u_{km}(x,t)$. Переписав уравнение (1) в виде

$$LPu=P\left(u_{tt}(x,t)-L_x u(x,t)\right)=Pf(x,t), \tag{21}$$

и подставив решение вида (20) в равенство (21), с учетом соотношения

$$P\left(\frac{\partial^2 u_{km}}{\partial t^2}(x,t)-L_x u_{km}(x,t)\right)=\lambda_{km}u_{km}(x,t),$$

имеем $a_{km}=\dfrac{\tilde f_{km}}{\lambda_{km}}$, где $\tilde f_{km}=\left(f(x,1-t),u_{km}(x,t)\right)$.

Таким образом, для решения $u(x,t)$ получим следующее явное представление

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\tilde{f}_{km}}{\lambda_{km}}u_{km}(x,t)\,. \tag{22}$$

Отметим, что представление (22) остается справедливым для любого сильного решения задачи (1) - (3). Это представление нами получено в предположении, что решение задачи Коши (1) - (3) существует.

Естественно возникает вопрос, для какого подмножества функций $f\in L_2(D)$ существует сильное решение? Для ответа на этот вопрос представим формулу (22) в виде (11) из которого, в силу равенства Парсеваля, следует

$$\|\mathrm{u}\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\tilde{f}_{k1}}{\lambda_{k1}}\right|^2+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=2}^{\infty}\left|\frac{\tilde{f}_{km}}{\lambda_{km}}\right|^2\,. \tag{23}$$

В силу леммы 1.3 имеем $\lambda_{km}\geq\frac{1}{4}, m>1$. Поэтому правая часть равенства (23) ограничена только для тех $f(x,t)$, для которых ограничена весовая норма (10).

Тем самым доказана теорема 1.2.

Доказательство теоремы 1.3. Очевидно, что оператор L является инвариантным в $\hat{L}_2(D)$. В силу теоремы 1.2 для любой $f\in\hat{L}_2(D)$ существует единственное решение задачи (1)-(3) и его можно представить в виде (12).

Таким образом определенное бесконечномерное пространство $\hat{L}_2(D)$ является пространством корректности задачи Коши (1)-(3). Теорема 1.3 доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантового финансирования Комитета науки МОН РК по проекту № 0820/ГФ4.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Hadamard J., Lectures on the Cauchy Problem in Linear Differential Equations, Yale University Press, New Haven, CT, 1923.

[2] Лаврентьев М. М. О задаче Коши для уравнения Лапласа // Известия АН СССР. Сер. мат. 1956. Т.20, №6. С.819-842.

[3] Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 142 с.

[4] Кальменов Т.Ш., Искакова У.А. Критерий сильной разрешимости смешанной задачи Коши для уравнения Лапласа // Доклады РАН. 2007. Т. 414, № 2. С.168-171.

[5] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972.

[6] Naimark M.A., Linear Differential Operators, Part II. Ungar, New York, 1968.

[7] Титчмарш Е. Теория функций. М.: Наука, 1980.

REFERENCES

[1] Hadamard J. Lectures on the Cauchy Problem in Linear Differential Equations, Yale University Press, New Haven, CT, 1923.

[2] Lavrentev M.M. On a Cauchy Problem for the Poisson Equation, //Izvestya AS USSR, ser. Math., 1955. V.20, №6. P.819–842.

[3] Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. Methods for solving ill-posed problems. M .: Nauka, 1979. 142 p.

[4] Kal'menov T.S., Iskakova U.A. A criterion for the strong solvability of the mixed Cauchy problem for the Laplace equation //Doklady Mathematics. 2007. V.75. №3. P.370-373.

[5] Kolmogorov A.N. and Fomin S.V. Elements of the theory of functions and functional analysis. M .: Nauka, 1972.

[6] Naimark M. A.: Linear Differential Operators, Part II. Ungar, New York, 1968.

[7] Titchmarsh E. The theory of functions. M .: Nauka, 1980.

У.А. Искакова, Б.Т.Төребек

ЛАПЛАС ОПЕРАТОРЫ ҮШІН РОБЕН-КОШИ ҚИСЫНСЫЗ ЕСЕБІН ШЕШУДІҢ БІР ӘДІСІ ТУРАЛЫ

Аннотация. Бұл жұмыста цилиндрлік облыста Лаплас операторы үшін Робен-Коши есебі қарастырылады. Ауытқулы аргументті теңдеу үшін Робен-Коши есебінің меншікті функциялары бойынша спектралды жіктеу әдісі арқылы, қарастырылған Робен-Коши есебінің әлді шешілімдлігінің критериі алынған. Робен-Коши есебінің қисынсыздығы ауытқулы аргументті өз-өзіне түйіндес оператордың үзіліссіз спектрінің оқшауланған нүктелерінің бар болуына пара-пар екендігі көрсетілген.

Тірек сөздер: Лаплас теңдеуі, Робен-Коши есебі, өз-өзіне түйіндес оператор, қисынсыздық.

МАЗМҰНЫ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

Publication Ethics and Publication Malpractice in the journals of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan

For information on Ethics in publishing and Ethical guidelines for journal publication see http://www.elsevier.com/publishingethics and http://www.elsevier.com/journal-authors/ethics.

Submission of an article to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan implies that the described work has not been published previously (except in the form of an abstract or as part of a published lecture or academic thesis or as an electronic preprint, see http://www.elsevier.com/postingpolicy), that it is not under consideration for publication elsewhere, that its publication is approved by all authors and tacitly or explicitly by the responsible authorities where the work was carried out, and that, if accepted, it will not be published elsewhere in the same form, in English or in any other language, including electronically without the written consent of the copyright-holder. In particular, translations into English of papers already published in another language are not accepted.

No other forms of scientific misconduct are allowed, such as plagiarism, falsification, fraudulent data, incorrect interpretation of other works, incorrect citations, etc. The National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan follows the Code of Conduct of the Committee on Publication Ethics (COPE), and follows the COPE Flowcharts for Resolving Cases of Suspected Misconduct (http://publicationethics.org/files/u2/New_Code.pdf). To verify originality, your article may be checked by the Cross Check originality detection service http://www.elsevier.com/editors/plagdetect.

The authors are obliged to participate in peer review process and be ready to provide corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. All authors of a paper should have significantly contributed to the research.

The reviewers should provide objective judgments and should point out relevant published works which are not yet cited. Reviewed articles should be treated confidentially. The reviewers will be chosen in such a way that there is no conflict of interests with respect to the research, the authors and/or the research funders.

The editors have complete responsibility and authority to reject or accept a paper, and they will only accept a paper when reasonably certain. They will preserve anonymity of reviewers and promote publication of corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. The acceptance of a paper automatically implies the copyright transfer to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.

The Editorial Board of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan will monitor and safeguard publishing ethics.

Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайтах:

www:nauka-nanrk.kz

http://www.physics-mathematics.kz

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Редактор *М. С. Ахметова, Д.С. Аленов, Т.А. Апендиев*
Верстка на компьютере *А.М. Кульгинбаевой*

Подписано в печать 2016.
Формат 60х881/8. Бумага офсетная. Печать – ризограф.
4 п.л. Тираж 300. Заказ 6.

Национальная академия наук РК
050010, Алматы, ул. Шевченко, 28, т. 272-13-18, 272-13-19