

ISSN 2518-1726 (Online),
ISSN 1991-346X (Print)

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ

Х А Б А Р Л А Р Ы

ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА
СЕРИЯСЫ**



СЕРИЯ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ



**PHYSICO-MATHEMATICAL
SERIES**

6 (310)

**ҚАРАША – ЖЕЛТОҚСАН 2016 Ж.
НОЯБРЬ – ДЕКАБРЬ 2016 г.
NOVEMBER – DECEMBER 2016**

1963 ЖЫЛДЫҢ ҚАҢТАР АЙЫНАН ШЫҒА БАСТАҒАН
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1963 ГОДА
PUBLISHED SINCE JANUARY 1963

ЖЫЛЫНА 6 РЕТ ШЫҒАДЫ
ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД
PUBLISHED 6 TIMES A YEAR

АЛМАТЫ, ҚР ҰҒА
АЛМАТЫ, НАН РК
ALMATY, NAS RK

Б а с р е д а к т о р ы
ф.-м.ғ.д., проф., ҚР ҰҒА академигі **Ғ.М. Мұтанов**

Р е д а к ц и я а л қ а с ы:

Жұмаділдаев А.С. проф., академик (Қазақстан)
Кальменов Т.Ш. проф., академик (Қазақстан)
Жантаев Ж.Ш. проф., корр.-мүшесі (Қазақстан)
Өмірбаев У.У. проф. корр.-мүшесі (Қазақстан)
Жүсіпов М.А. проф. (Қазақстан)
Жұмабаев Д.С. проф. (Қазақстан)
Асанова А.Т. проф. (Қазақстан)
Бошқаев К.А. PhD докторы (Қазақстан)
Сұраған Д. PhD докторы (Қазақстан)
Quevedo Hernando проф. (Мексика),
Джунушалиев В.Д. проф. (Қырғыстан)
Вишневский И.Н. проф., академик (Украина)
Ковалев А.М. проф., академик (Украина)
Михалевич А.А. проф., академик (Белорус)
Пашаев А. проф., академик (Әзірбайжан)
Такибаев Н.Ж. проф., академик (Қазақстан), бас ред. орынбасары
Тигиняну И. проф., академик (Молдова)

«ҚР ҰҒА Хабарлары. Физика-математикалық сериясы».

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Меншіктенуші: «Қазақстан Республикасының Ұлттық ғылым академиясы» РҚБ (Алматы қ.)
Қазақстан республикасының Мәдениет пен ақпарат министрлігінің Ақпарат және мұрағат комитетінде
01.06.2006 ж. берілген №5543-Ж мерзімдік басылым тіркеуіне қойылу туралы куәлік

Мерзімділігі: жылына 6 рет.
Тиражы: 300 дана.

Редакцияның мекенжайы: 050010, Алматы қ., Шевченко көш., 28, 219 бөл., 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,
www.nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

© Қазақстан Республикасының Ұлттық ғылым академиясы, 2016

Типографияның мекенжайы: «Аруна» ЖК, Алматы қ., Муратбаева көш., 75.

Главный редактор
д.ф.-м.н., проф. академик НАН РК **Г.М. Мутанов**

Редакционная коллегия:

Джумадильдаев А.С. проф., академик (Казахстан)
Кальменов Т.Ш. проф., академик (Казахстан)
Жантаев Ж.Ш. проф., чл.-корр. (Казахстан)
Умирбаев У.У. проф. чл.-корр. (Казахстан)
Жусупов М.А. проф. (Казахстан)
Джумабаев Д.С. проф. (Казахстан)
Асанова А.Т. проф. (Казахстан)
Бошкаев К.А. доктор PhD (Казахстан)
Сураган Д. доктор PhD (Казахстан)
Quevedo Hernando проф. (Мексика),
Джунушалиев В.Д. проф. (Кыргызстан)
Вишневский И.Н. проф., академик (Украина)
Ковалев А.М. проф., академик (Украина)
Михалевич А.А. проф., академик (Беларусь)
Пашаев А. проф., академик (Азербайджан)
Такибаев Н.Ж. проф., академик (Казахстан), зам. гл. ред.
Тигиняну И. проф., академик (Молдова)

«Известия НАН РК. Серия физико-математическая».

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы)

Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации и архивов
Министерства культуры и информации Республики Казахстан №5543-Ж, выданное 01.06.2006 г.

Периодичность: 6 раз в год.

Тираж: 300 экземпляров.

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, ком. 219, 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,
www.nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

© Национальная академия наук Республики Казахстан, 2016

Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75.

E d i t o r i n c h i e f
doctor of physics and mathematics, professor, academician of NAS RK **G.M. Mutanov**

E d i t o r i a l b o a r d:

Dzhumadildayev A.S. prof., academician (Kazakhstan)
Kalmenov T.Sh. prof., academician (Kazakhstan)
Zhantayev Zh.Sh. prof., corr. member. (Kazakhstan)
Umirbayev U.U. prof. corr. member. (Kazakhstan)
Zhusupov M.A. prof. (Kazakhstan)
Dzhumabayev D.S. prof. (Kazakhstan)
Asanova A.T. prof. (Kazakhstan)
Boshkayev K.A. PhD (Kazakhstan)
Suragan D. PhD (Kazakhstan)
Quevedo Hernando prof. (Mexico),
Dzhunushaliyev V.D. prof. (Kyrgyzstan)
Vishnevskiy I.N. prof., academician (Ukraine)
Kovalev A.M. prof., academician (Ukraine)
Mikhalevich A.A. prof., academician (Belarus)
Pashayev A. prof., academician (Azerbaijan)
Takibayev N.Zh. prof., academician (Kazakhstan), deputy editor in chief.
Tiginyanu I. prof., academician (Moldova)

News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physical-mathematical series.

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Owner: RPA "National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan" (Almaty)

The certificate of registration of a periodic printed publication in the Committee of information and archives of the Ministry of culture and information of the Republic of Kazakhstan N 5543-Ж, issued 01.06.2006

Periodicity: 6 times a year

Circulation: 300 copies

Editorial address: 28, Shevchenko str., of. 219, 220, Almaty, 050010, tel. 272-13-19, 272-13-18,
www.nauka-nanrk.kz/physics-mathematics.kz

© National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, 2016

Address of printing house: ST "Aruna", 75, Muratbayev str, Almaty

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 6, Number 310 (2016), 67 – 73

UDC 521.1

M.Zh. Minglibayev^{1,2}, T.M. Zhumabek¹¹Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan²Fesenkov Astrophysical Institute, Almaty, Kazakhstanminglibayev@mail.ru**ON THE ISOSCELES RESTRICTED THREE-BODY PROBLEM**

Abstract. In this work there has been investigated the classical spatial restricted three-body problem in the barycentric reference frame when all three bodies form triangle during all the time of motion. In the barycentric reference frame, there has been emphasized a particular case when the Newtonian total force of attraction of two primary bodies acting on a massless body is central during all the time of motion. It has been proven that in order to make the Newtonian total force of attraction of two primary bodies acting on a massless body central, it is needed and sufficient triangle formed by three bodies to be isosceles and a massless body should be on the vertex of this triangle. It is shown that in this particular case all three bodies are form isosceles triangle and massless body is on the vertex of this triangle. It is proven that orbit of the isosceles restricted three-body problem is planar.

Keywords: restricted three-body problem, barycentric coordinate system, isosceles solution.

УДК 521.1

М.Дж. Минглибаев^{1,2}, Т.М. Жумабек¹¹КазНУ имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан²Астрофизический институт имени В.Г.Фесенкова, Алматы, Казахстан**К РАВНОБЕДРЕННОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ**

Аннотация. В настоящей работе исследована классическая пространственная ограниченная задача трех тел в барицентрической системе координат, когда три тела, все время движения, образуют треугольник. В барицентрической системе координат выявлен частный случай, когда ньютоновская суммарная сила притяжения двух основных тел действующая на безмассовое тело, все время движения центральная. Доказано: для того, чтобы ньютоновская суммарная сила притяжения двух основных тел, действующая на безмассовое тело, была центральная, необходимо и достаточно, чтобы треугольник, образованный тремя телами, был равнобедренный, на вершине которого находится безмассовое тело. Оказалось, что в этом частном случае три тела все время движения образуют равнобедренный треугольник, на вершине которого находится безмассовое тело.

Сформулирована равнобедренная ограниченная задача трех тел, то есть задача трех тел, когда три тела все время движения образуют равнобедренный треугольник, на вершине которого находится безмассовое тело. Доказано, что орбита в равнобедренной ограниченной задаче трех тел плоская.

Ключевые слова: ограниченная задача трех тел, барицентрическая система координат, равнобедренные решения.

1. Введение. Движения малого естественного или искусственного небесного тела в поле тяготения двух больших небесных тел (далее основные тела) хорошо описывается математической моделью широко известной ограниченной задачей трех тел [1-6]. При произвольных значениях масс основных тел задача имеет пять точек либрации - точные частные решения. Две из них решение Лагранжа, когда три тела все время движения образуют равносторонний треугольник.

Три коллинеарные решения Эйлера, когда три тела все время движения расположены на одной и той же прямой. Известны также решения в форме равнобедренного треугольника при условии, что массы основных тел, расположенных на основании равнобедренного треугольника, равны между собой [7-9]. В связи с отсутствием общего аналитического решения задачи в конечном виде многие аспекты задачи изучены различными качественными и численными методами [1-9]. Поиск новых точных частных аналитических решения задачи представляется актуальным.

Отметим, что во всех вышеуказанных известных точных частных решениях ограниченной задачи трех тел ньютоновская суммарная сила притяжения двух основных тел, действующая на малое тело, в барицентрической системе координат все время движения *центральная*. В связи с этим представляют интерес все случаи ограниченной задачи трех тел, когда ньютоновская суммарная сила притяжения двух основных тел, действующее на малое тело, *центральная*.

В настоящей работе рассмотрена классическая пространственная ограниченная задача трех тел в барицентрической системе координат. Исследован случай, когда три тела все время движения образуют треугольник, то есть треугольная ограниченная задача трех тел. В треугольной ограниченной задачи трех тел исследован частный случай, когда три тела все время движения образуют равнобедренный треугольник, на вершине которого находится малое тело, то есть равнобедренная ограниченная задача трех тел. Доказано, что в равнобедренной ограниченной задаче трех тел суммарная ньютоновская сила притяжения двух основных тел *центральная*. Показано, что орбита в равнобедренной ограниченной задаче трех тел *плоская*.

2. Уравнения движения ограниченной задачи трех тел в различных системах координат.

2.1. Классические уравнения движения ограниченной задачи трех тел в абсолютной системе координат. Рассмотрим движения малого тела, исчезающее малой массой m_2 (далее безмассовое тело) в поле тяготения двух основных тел с постоянными массами m_1 и m_3 . При этом тела рассматриваются как материальные точки. Математические условия ограниченной постановки задачи трех тел [1-4] могут быть написаны в виде

$$m_2 \ll m_1, m_2 \ll m_3, m_2 \approx 0. \quad (2.1)$$

Дифференциальные уравнения пространственных движений этих трех тел в абсолютной системе координат $OX^*Y^*Z^*$ имеет широко известный вид

$$\ddot{\vec{R}}_1^* = fm_3 \frac{\vec{R}_3^* - \vec{R}_1^*}{R_{13}^{*3}}, \quad \ddot{\vec{R}}_3^* = fm_1 \frac{\vec{R}_1^* - \vec{R}_3^*}{R_{31}^{*3}}, \quad (2.2)$$

$$\ddot{\vec{R}}_2^* = f \left(m_1 \frac{\vec{R}_1^* - \vec{R}_2^*}{R_{21}^{*3}} + m_3 \frac{\vec{R}_3^* - \vec{R}_2^*}{R_{23}^{*3}} \right), \quad (2.3)$$

где $\vec{R}_i^* = \vec{R}_i^*(X_i^*, Y_i^*, Z_i^*)$ - радиус-вектора тел, \vec{R}_{ij}^* ($i \neq j$) - расстояние между тел. Точкой в этих уравнениях и далее обозначается дифференцирование по времени t . Из системы дифференциальных уравнений (2.2) получим известное соотношение

$$m_1 \vec{R}_1^* + m_3 \vec{R}_3^* = \vec{a}^* t + \vec{b}^*, \quad \vec{a}^* = \overrightarrow{const}, \quad \vec{b}^* = \overrightarrow{const}. \quad (2.4)$$

Отсюда получим хорошо известное аналитическое выражение радиус-вектора точки G -барицентра двух основных тел в абсолютной системе координат

$$\vec{R}_G^* = \frac{m_1 \vec{R}_1^* + m_3 \vec{R}_3^*}{m_1 + m_3} = \frac{\vec{a}^*}{m_1 + m_3} t + \frac{\vec{b}^*}{m_1 + m_3}. \quad (2.5)$$

Система дифференциальных уравнений (2.2) описывает задачу двух тел. Из (2.5) следует $\ddot{\vec{R}}_G^* = 0$, то есть барицентрическая система координат инерциальная. Уравнения движения (2.3) описывает движения безмассового тела в ньютоновской поле тяготения двух основных тел m_1, m_3 - классическую пространственную ограниченную задачу трех тел в абсолютной системе координат.

2.2. Уравнение движения в барицентрической системе координат. Переходим на барицентрическую систему координат по формулам

$$\vec{R}_i^* = \vec{R}_G + \vec{r}_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.6)$$

где \vec{R}_G - радиус-вектор точки G - барицентра двух основных тел в абсолютной системе координат, \vec{r}_i - радиус-векторы тел в барицентрической системе координат. Пусть оси барицентрической системы координат $Gx_1y_1z_1$ параллельные соответствующим осям абсолютной системы координат $Ox^*y^*z^*$. Преобразованные уравнения движения (2.2) и (2.3) имеют вид

$$\ddot{\vec{r}}_1 = f m_3 \frac{\vec{r}_{13}}{r_{13}^3}, \quad \vec{r}_{13} = \vec{r}_3 - \vec{r}_1, \quad \ddot{\vec{r}}_3 = f m_1 \frac{\vec{r}_{31}}{r_{31}^3}, \quad \vec{r}_{31} = \vec{r}_1 - \vec{r}_3, \quad (2.7)$$

$$r_{31} = [(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2]^{1/2} = r_{13},$$

$$\ddot{\vec{r}}_2 = f \left(m_1 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{\Delta_{21}^3} + m_3 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_2}{\Delta_{23}^3} \right), \quad (2.8)$$

$$\Delta_{21} = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{1/2} = \Delta_{12},$$

$$\Delta_{23} = [(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2]^{1/2} = \Delta_{32}.$$

В барицентрической системе координат соотношения (2.4) преобразуется в инвариант центра масс

$$m_1 \vec{r}_1 + m_3 \vec{r}_3 = 0. \quad (2.9)$$

Уравнение (2.8) описывает пространственную классическую ограниченную задачу трех тел в барицентрической системе координат.

2.3. Решение задачи двух тел. Из уравнений (2.7) следуют

$$\ddot{\vec{r}}_{31} = -f \frac{m_3 + m_1}{r_{31}^3} \vec{r}_{31}. \quad (2.10)$$

Из интеграла площадей

$$\vec{r}_{31} \times \dot{\vec{r}}_{31} = \vec{c}_{31} = \overrightarrow{const} \quad (2.11)$$

следует, что в задаче двух тел орбита плоская, без потери общности, можно считать, что орбита лежит на плоскости Gx_1y_1 . Решение дифференциального уравнения движения задачи двух тел (2.10) в относительной системе координат имеет вид [10]

$$r_{31} = r = \frac{P}{1 + e \cos \theta}, \quad r^2 \dot{\theta} = c_{31} = c = const, \quad (2.12)$$

$$p = a(1 - e^2), \quad c^2 = \mu p, \quad \mu = f(m_1 + m_3). \quad (2.13)$$

3. Теорема о равнобедренной ограниченной задаче трех тел Перепишем уравнение движения пространственной ограниченной задачи трех тел в барицентрической системе координат (2.8) в виде

$$\ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_2, \quad (3.1)$$

$$\vec{F}_2 = f \left(m_1 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{\Delta_{21}^3} + m_3 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_2}{\Delta_{23}^3} \right). \quad (3.2)$$

Введем обозначение для единичного вектора

$$\vec{e}_2 = \frac{\vec{r}_2}{r_2}. \quad (3.3)$$

3.1 Определения.

Определение 1. Ограниченную задачу трех тел назовем треугольной, если три тела все время движения образует треугольник.

Определение 2. Треугольную ограниченную задачу трех тел назовем равнобедренной, если треугольник образованного тремя телами все время движения образует равнобедренный треугольник, на вершине которого находится безмассовое тело.

Определение 3. В барицентрической системе координат $Gxuz$, в треугольной ограниченной задаче трех тел ньютоновскую силу притяжения двух основных тел \vec{F}_2 назовем центральной, если все время движения она направлена к началу координат и представима в виде

$$\vec{F}_2 = -F_2 \vec{e}_2, \quad F_2 = |\vec{F}_2|. \quad (3.4)$$

3.2 Теорема. В треугольной ограниченной задаче трех тел, в барицентрической системе координат, для того чтобы сила \vec{F}_2 все время движения была центральной, необходимо и достаточно, чтобы все время движения выполнялось условие

$$\Delta_{21} = \Delta_{23} = \Delta, \quad (3.5)$$

то есть треугольник образованный тремя телами все время движения – равнобедренный, на вершине которого находится безмассовое тело.

Доказательство.

Необходимость. Допустим, что \vec{F}_2 - центральная.

Докажем, что тогда имеет место

$$\Delta_{21} = \Delta_{23} = \Delta, \quad (3.6)$$

то есть треугольник образованного тремя телами все время движения равнобедренный.

Так как сила \vec{F}_2 - центральная, имеем

$$\vec{F}_2 \times \vec{r}_2 = 0. \quad (3.7)$$

Используя аналитическое выражение силы (3.2), уравнение (3.7) в раскрытом виде можно написать в следующей форме

$$f \left(\frac{m_1}{\Delta_{21}^3} \vec{r}_1 + \frac{m_3}{\Delta_{23}^3} \vec{r}_3 \right) \times \vec{r}_2 - f \left(\frac{m_1}{\Delta_{21}^3} + \frac{m_3}{\Delta_{23}^3} \right) \vec{r}_2 \times \vec{r}_2 = 0. \quad (3.8)$$

Из последнего уравнения следует

$$\left(\frac{m_1}{\Delta_{21}^3} \vec{r}_1 + \frac{m_3}{\Delta_{23}^3} \vec{r}_3 \right) \times \vec{r}_2 = 0. \quad (3.9)$$

В барицентрической системе координат имеет место инвариант центра масс (2.9). Из уравнения (2.9) получим

$$m_1 \vec{r}_1 = -m_3 \vec{r}_3. \quad (3.10)$$

Подставляя (3.10) в уравнения (3.9) получим

$$m_3 \left(-\frac{1}{\Delta_{21}^3} + \frac{1}{\Delta_{23}^3} \right) \vec{r}_3 \times \vec{r}_2 = 0. \quad (3.11)$$

Так как мы рассматриваем треугольную ограниченную задачу трех тел $\vec{r}_3 \times \vec{r}_2 \neq 0$, а также учитывая, что $m_3 \neq 0$, из равенство (3.11) получим

$$\Delta_{21} = \Delta_{23} = \Delta.$$

Итак, необходимость теоремы доказана.

Достаточность. Допустим, что треугольник, образованный тремя телами равнобедренный, то есть выполняется равенство

$$\Delta_{21} = \Delta_{23} = \Delta. \quad (3.12)$$

Докажем, что тогда сила \vec{F}_2 - центральная, то есть

$$\vec{F}_2 = -F_2 \vec{e}_2. \quad (3.13)$$

Перепишем аналитическое выражение (3.2) для силы \vec{F}_2 в виде

$$\vec{F}_2 = f \left(\frac{m_1}{\Delta_{21}^3} \vec{r}_1 + \frac{m_3}{\Delta_{23}^3} \vec{r}_3 \right) - f \left(\frac{m_1}{\Delta_{21}^3} + \frac{m_3}{\Delta_{23}^3} \right) \vec{r}_2. \quad (3.14)$$

Используя равенство (3.12), преобразуем правую часть последнего равенства

$$\vec{F}_2 = \frac{f}{\Delta^3} (m_1 \vec{r}_1 + m_3 \vec{r}_3) - \frac{f}{\Delta^3} (m_1 + m_3) \vec{r}_2. \quad (3.15)$$

Согласно инварианту центра сил (2.9), который выполняется в барицентрической системе координат, имеем

$$m_1 \vec{r}_1 + m_3 \vec{r}_3 = 0. \quad (3.16)$$

Из соотношений (3.15) и (3.16) получим

$$\vec{F}_2 = -\frac{f}{\Delta^3} (m_1 + m_3) \vec{r}_2. \quad (3.17)$$

Учитывая обозначение (3.3), выражение (3.17) перепишем в виде

$$\vec{F}_2 = -F_2 \vec{e}_2, \quad F_2 = \frac{f}{\Delta^3} (m_1 + m_3) r_2 \quad (3.18)$$

то есть сила \vec{F}_2 центральная.

Таким образом, достаточность теоремы доказана.

3.3. Следствия.

Следствие 1. В равнобедренной ограниченной задаче трех тел, в барицентрической системе координат, ньютоновская сила притяжения двух основных тел имеет вид

$$\vec{F}_2 = -\frac{f}{\Delta^3} (m_1 + m_3) \vec{r}_2, \quad \Delta = \Delta_{21} = \Delta_{23}. \quad (3.19)$$

Следствие 2. Уравнение движения равнобедренной ограниченной задачи трех тел в барицентрической системе координат имеет вид

$$\ddot{\vec{r}}_2 = -\frac{f}{\Delta^3}(m_1 + m_3)\vec{r}_2, \quad \Delta = \Delta_{21} = \Delta_{23}. \quad (3.20)$$

Следствие 3. Из уравнений (3.20) следует, что $\vec{r}_2 \times \dot{\vec{r}}_2 = \vec{c}_2 = \overrightarrow{const}$, следовательно, орбита в равнобедренной ограниченной задаче трех тел плоская.

3.4. Преобразование уравнение движения равнобедренной ограниченной задачи трех тел к удобному виду. Далее, используя теорему Пифагора, выразим Δ^3 через r_{31} , r_2 , m_1 и m_3 . Из соответствующих прямоугольных треугольников получим

$$r_2^2 = \Delta^2 - \frac{m_1 m_3}{(m_1 + m_3)^2} r_{31}^2. \quad (3.21)$$

Из равенства (3.21) следует

$$\Delta^3 = (\sigma^2 r_{31}^2 + r_2^2)^{3/2}, \quad \sigma^2 = \frac{m_1 m_3}{(m_1 + m_3)^2}. \quad (3.22)$$

Учитывая (3.22), из (3.20) получим дифференциальное уравнение движения ограниченной равнобедренной задачи трех тел в барицентрической системе координат в векторной форме

$$\ddot{\vec{r}}_2 = -\mu \frac{\vec{r}_2}{(\sigma^2 r_{31}^2(t) + r_2^2)^{3/2}}, \quad \mu = f(m_1 + m_3). \quad (3.23)$$

Из уравнений (3.23) следует интеграл площадей

$$\vec{r}_2 \times \dot{\vec{r}}_2 = \vec{c}_2 = \overrightarrow{const} \quad (3.24)$$

следовательно, *орбита плоская.*

4. Об области возможных движений. Таким образом, в барицентрической системе координат $Gxuz$ может быть поставлена такая частная задача в ограниченной задаче трех тел, в которой все время движения три тела образует равнобедренный треугольник, на вершине которого находится безмассовое тело.

Как следует из интегралов площадей, орбита в задаче двух основных тел (2.11), а также орбита в ограниченной равнобедренной задаче трех тел (3.24) каждая в отдельности, плоская. При этом плоскость орбиты задачи двух основных тел и плоскость орбиты ограниченной равнобедренной задачи трех тел в общем случае не совпадают

В тоже время эти три тела все время движения образуют равнобедренный треугольник, который в общем случае меняет размеры, форму и ориентацию в пространстве. Поэтому необходимо анализировать сочетания этих свойств и в области возможных движений этих трех тел, что является предметом отдельной работы.

5. Заключение. В настоящей работе аналитически исследована пространственная ограниченная задача трех тел. Исследован случай, когда три тела все время образуют равнобедренный треугольник, на вершине которого находится безмассовое тело. Доказано, что в этом частном случае суммарная ньютоновская сила притяжения двух основных тел центральная. Следовательно, орбита в равнобедренной ограниченной задаче трех тел плоская.

Работа частично финансированы грантами МОН РК №0069/ГФ4 и №0003-1/ПЦФ.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Себехей В. Теория орбит. Ограниченная задача трех тел. - М.: Наука, 1982. – 656 с.
- [2] Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. – М.: Наука, 1978. – 312 с.
- [3] Dvorak R., Lhotka Ch. Celestial Dynamics. Chaoticity and Dynamics of Celestial Systems. WILEY-VCH VerlagGmbH&Co.KGaA, 2013 –309 p.
- [4] Гребеников Е.А. Математические проблемы гомографической динамики.– М.: МАКС Пресс, 2010. – 256 с.
- [5] Морбиделли А. Современная небесная механика. Аспекты динамики Солнечной системы. – М. – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2014. – 432с.

- [6] Брюно А.Д. Ограниченная задача трех тел. Плоские периодические орбиты. – М.: Наука, 1990. – 295с.
 [7] Уинтнер А. Аналитические основы небесной механики. – М.: Наука, 1967. – 524с.
 [8] Дубошин Г.Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы. – 2-е изд. – М.: Наука, 1978. – 456 с.
 [9] Маршал К. Задача трех тел. Москва. – Ижевск: Инст. комп. иссл., 2014. – 640с.
 [10] Лукьянов Л.Г., Ширмин Г.И. Лекции по небесной механике. Алматы: Эверо, 2009. – 277с.

REFERENCES

- [1] Sebehej V. Teorija orbit. Ogranichennaja zadacha treh tel. - M.: Nauka, 1982. – 656 p.
 [2] Markeev A.P. Točki libracii v nebesnoj mehanike i kosmodinamike. – M.: Nauka, 1978. – 312 p.
 [3] Dvorak R., Lhotka Ch. Celestial Dynamics. Chaoticity and Dynamics of Celestial Systems. WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2013 – 309 p.
 [4] Grebenikov E.A. Matematicheskie problemy gomograficheskoj dinamiki. – M.: MAKS Press, 2010. – 256 p.
 [5] Morbidelli A. Sovremennaja nebesnaja mehanika. Aspekty dinamiki Solnečnoj sistemy. – M. – Izhevsk: Institut komp'juternyh issledovanij, 2014. – 432 p.
 [6] Brjuno A.D. Ogranichennaja zadacha treh tel. Ploskie periodicheskie orbity. – M.: Nauka, 1990. – 295 p.
 [7] Wintner A. Analiticheskie osnovy nebesnoj mehaniki. – M.: Nauka, 1967. – 524 p.
 [8] Duboshin G.N. Nebesnaja mehanika. Analiticheskie i kachestvennye metody. – 2-e izd. – M.: Nauka, 1978. – 456 p.
 [9] Marshal K. Zadacha treh tel. Moskva. – Izhevsk: Inst. komp. issl., 2014. – 640 p.
 [10] Luk'janov L.G., Shirmin G.I. Lekcii po nebesnoj mehanike. Almaty: Jevero, 2009. – 277p.

М.Ж. Минглибаев^{1,2}, Т.М. Жұмабек¹

¹әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Қазақстан, Алматы;
²В.Г. Фесенков атындағы Астрофизика институты, Қазақстан, Алматы

ТЕҢБҮЙІРЛІ ШЕКТЕЛГЕН ҮШ ДЕНЕ МӘСЕЛЕСІ

Аннотация. Бұл жұмыста барицентрлік координаталар жүйесінде классикалық шектелген үш дене мәселесі қарастырылған. Осы мәселенің дербес жағдайы қозғалыс кезінде үш дене барлық уақытта теңбүйірлі үшбұрыш жасайтын жағдайы зерттелінген. Бұл дербес жағдайда, барицентрлік координата жүйесінде, негізгі екі дененің массасыз денеге әсер ететін қосынды ньютондық тарту күші әрқашан да центрлік күш екені нақтыланған. Негізгі екі дененің массасыз денеге әсер ететін қосынды ньютондық тарту күші әрқашан да центрлік күш екені болуы үшін үш дене теңбүйірлі үшбұрыш жасауы қажетті және жеткілікті екені дәлелденген. Бұл жағдайда барлық уақытта теңбүйірлі үшбұрыштың төбесінде массасыз дене орналасқан. Осы дербес жағдайдың теңбүйірлі шектелген үш дене мәселесі ретінде мәселенің қойылымы қалыптасқан. Шектелген теңбүйірлі үш дене мәселесінде орбитаның жазық қисық екені дәлелденген.

Түйін сөздер: шектелген үш дене есебі, барицентрлік координата жүйесі, теңбүйірлі шешімдер.

Сведения об авторах:

Минглибаев М.Дж. – корреспондент автор, д.ф.-м.н., профессор, Казахский Национальный Университет им. аль-Фараби, Астрофизический Институт им. В.Г. Фесенкова, Телефон: : +7 727 247 60 86 +7 707 108 7565, e-mail: minglibayev@mail.ru;

Жұмабек Т.М. - Магистрант 2-курса Казахского Национального Университета им. аль-Фараби, кафедры механики, Телефон: +7 727 247 60 86 +7 747 579 03 82, e-mail: torebekzhumabek@gmail.com

МАЗМҰНЫ

<i>Бакранова Д.И., Кукушкин С.А., Бейсембетов И.К., Осипов А.В., Нусупов К.Х., Бейсенханов Н.Б., Кенжалиев Б.К., Сейтов Б.Ж.</i> Ақауы аз кремний матрицаларындағы атомдардың орнын басу әдісімен алынған эпитаксиалды SiC кабыршақтарын рентгендік талдау.....	5
<i>Батрышев Д.Ф., Рамазанов Т.С., Досболаев М.К., Габдуллин М.Т., Ерланұлы Е.</i> Жоғары жиілікті сыйымдылық разрядында газдық фазадан плазмохимиялық әдісімен көміртек нанотүтікшелерін синтездеу.....	10
<i>Демьянова А.С., Данилов А.Н., Буртебаев Н., Джансейтов Д.М., Керимкулов Ж., Алимов Д.К., Мухамеджанов Е.С.</i> ¹³ C ядросының экзотикалық күйлерінің радиустары.....	17
<i>Сарсенгельдин М.М., Слямхан М.М., Бижигитова Н.Т.</i> Қозғалмалы шекарасы бар оське тимейтін жылуөткізгіштік тендеуінің жылу көпмүшелері арқылы аналитикалық шешімі.....	21
<i>Бакранова Д.И., Кукушкин С.А., Бейсембетов И.К., Осипов А.В., Нусупов К.Х., Бейсенханов Н.Б., Кенжалиев Б.К., Сейтов Б.Ж.</i> Ақауы аз кремний матрицаларындағы атомдардың орнын басу әдісімен алынған эпитаксиалды SiC кабыршақтарын рентгендік талдау.....	25
<i>Диханбаев К.К., Мусабек Г.К., Сиваков В.А., Ермухамед Д., Мейрам А.Т.</i> Кремний наноталшықтарының микрофотолюминесценциясы.....	32
<i>Батрышев Д.Ф., Рамазанов Т.С., Досболаев М.К., Габдуллин М.Т., Ерланұлы Е.</i> Жоғары жиілікті сыйымдылық разрядында газдық фазадан плазмохимиялық әдісімен көміртек нанотүтікшелерін синтездеу.....	38
<i>Демьянова А.С., Данилов А.Н., Буртебаев Н., Джансейтов Д.М., Керимкулов Ж., Алимов Д.К., Мухамеджанов Е.С.</i> ¹³ C ядросының экзотикалық күйлерінің радиустары.....	45
<i>Сергеев Д.М., Шұңқеев Қ.Ш.</i> «Ниобий – көміртекті нанотүтікше (5,5) – ниобий» нанотүйіспесінің транспорттық сипаттамаларының компьютерлік модельдеуі.....	49
<i>Досболаев М.К., Утегенов А.У., Тажен А.Б., Рамазанов Т.С., Габдуллин М.Т.</i> Импульстік плазмалық ағынның динамикалық қасиеттері мен импульсті плазмалық деткіштегі тозаңның пайда болуы.....	59
<i>Минглибаев М.Ж., Жұмабек Т.М.</i> Теңбүйірлі шектелген үш дене мәселесі	67
<i>Оразбаев С.А., Өмірбеков Д.Б., Досболаев М.Қ., Габдуллин М.Т., Рамазанов Т.С.</i> Сынақта тозаңды-плазмалы шамның жарық беру қасиетін зерттеу.....	74
<i>Жақып К.Б.</i> Сұйықтықтар мен газдардағы химиялық реакциялары бар термобародиффузияларды моделдеу.....	80
<i>Оразбаев С.А., Өмірбеков Д.Б., Габдуллин М.Т., Досболаев М.Қ., Рамазанов Т.С.</i> Газ температурасының тозаңды нанобөлшектердің өлшемі мен құрылымына әсері.....	89
<i>Жақып-тегі К. Б.</i> Гуктың заңымен серпілімдік теориясында моделдеу. Кернеулер тензорында симметрия жоқтығы.....	96
<i>Буртебаев Н., Алимов Д., Зазулин Д.М., Керимкулов Ж.К., Юшков А.В., Джансейтов Д.М., Мухамеджанов Е., Насрулла М.</i> Төменгі энергиялы протондардың ¹⁴ N ядросымен әсерлесу потенциал параметрлерін анықтау.....	104
<i>Буртебаев Н., Керимкулов Ж.К., Амангелді Н., Алимов Д.К., Мухамеджанов Е.С., Джансейтов Д.М., Мауей Б., Аймаганбетов А., Қурахмедов А.Е., Бекбаев С.М., Мадиярова А.Ж.</i> 17,5 және 41 МэВ энергияларда ¹¹ B ядроларынан ¹⁴ N иондарының серпімді шашырауын зерттеу.....	109
<i>Искакова У.А., Төрбек Б.Т.</i> Лаплас операторы үшін робен-коши қисынсыз есебін шешудің бір әдісі туралы.....	115
<i>Шинибаев М.Д., Беков А.А., Даирбеков С.С., Жолдасов С.А., Мырзақасова Г.Е., Алиаскаров Д.Р., Шекербекова С.А., Садыбек А.Ж.</i> Екі жылжымайтын нүкте проблемасының жаңа нұсқасы.....	121
<i>Сарсенбаев Х.А., Хамзина Б.С., Колдасова Г.А., Исаева Г.Б.</i> Модификацияланған алс лигносульфонатты реагентін (НПП «Азимут») зерттеу.....	126

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Бакранова Д.И., Кукушкин С.А., Бейсембетов И.К., Осипов, А.В. Нусупов К.Х., Бейсенханов Н.Б., Кенжалиев Б.К., Сейтов Б.Ж.</i> Рентгеновский анализ эпитаксиальных пленок SiC, выращенных методом замещения атомов на подложках низкодефектного кремния.....	5
<i>Батрышев Д.Г., Рамазанов Т.С., Досболаев М.К., Габдуллин М.Т., Ерланулы Е.</i> Синтез углеродных нанотрубок плазмохимическим методом осаждения из газовой фазы в высокочастотном емкостном разряде.....	10
<i>Демьянова А.С., Данилов А.Н., Буртебаев Н., Джансейтов Д.М., Керимкулов Ж., Алимов Д.К., Мухамеджанов Е.С.</i> Экзотические состояния ядра ¹³ C с аномальными радиусами.....	17
<i>Сарсенгельдин М.М., Слямхан М.М., Бижигитова Н.Т.</i> Аналитическое решение уравнения теплопроводности с движущимися границами не касающиеся оси тепловыми полиномами.....	21
<i>Бакранова Д.И., Кукушкин С.А., Бейсембетов И.К., Осипов А.В., Нусупов К.Х., Бейсенханов Н.Б., Кенжалиев Б.К., Сейтов Б.Ж.</i> Рентгеновский анализ эпитаксиальных пленок SiC, выращенных методом замещения атомов на подложках низкодефектного кремния.....	25
<i>Диханбаев К.К., Мусабек Г.К., Сиваков В.А., Ермухамед Д., Мейрам А.Т.</i> Фотолюминесценция кремниевых нанонитей.....	32
<i>Батрышев Д.Г., Рамазанов Т.С., Досболаев М.К., Габдуллин М.Т., Ерланулы Е.</i> Синтез углеродных нанотрубок плазмохимическим методом осаждения из газовой фазы в высокочастотном емкостном разряде.....	38
<i>Демьянова А.С., Данилов А.Н., Буртебаев Н., Джансейтов Д.М., Керимкулов Ж., Алимов Д.К., Мухамеджанов Е.С.</i> Экзотические состояния ядра ¹³ C с аномальными радиусами.....	45
<i>Сергеев Д.М., Шункеев К.Ш.</i> Компьютерное моделирование транспортных характеристик наноконтакта «Ниобий – углеродная нанотрубка (5,5) – ниобий».....	49
<i>Досболаев М.К., Утегенов А.У., Тажен А.Б., Рамазанов Т.С., Габдуллин М.Т.</i> Динамические свойства импульсного плазменного потока и пылеобразование в ИПУ.....	59
<i>Минглибаев М.Дж., Жумабек Т.М.</i> К равнобедренной ограниченной задаче трех тел.....	67
<i>Оразбаев С.А., Омирбеков Д.Б., Досболаев М.К., Габдуллин М.Т., Рамазанов Т.С.</i> Экспериментальное исследование свойства светоотдачи плазменно-пылевой лампы.....	74
<i>Джакупов К.Б.</i> Моделирование термобародиффузий с химическими реакциями в жидкостях и газах.....	80
<i>Оразбаев С.А., Омирбеков Д.Б., Габдуллин М.Т., Досболаев М.К., Рамазанов Т.С.</i> Влияние температуры газа на размеры и структуры пылевых наночастиц.....	89
<i>Джакупов К.Б.</i> Моделирование по закону Гука в теории упругости. Несимметричность тензора напряжений.....	96
<i>Буртебаев Н., Алимов Д., Зазулин Д.М., Керимкулов Ж.К., Юшков А.В., Джансейтов Д.М., Мухамеджанов Е., Насрулла М.</i> Определение параметров потенциала взаимодействия протона с ¹⁴ N при низких энергиях.....	104
<i>Буртебаев Н., Керимкулов Ж.К., Амангелді Н., Алимов Д.К., Мухамеджанов Е.С., Джансейтов Д.М., Мауей Б., Аймаганбетов А., Курахмедов А.Е., Бекбаев С.М., Мадиярова А.Ж.</i> Исследование упругого рассеяния ионов ¹⁴ N на ядрах ¹¹ B при энергиях 17,5 и 41 МэВ.....	109
<i>Искакова У.А., Торекбек Б.Т.</i> Об одном методе решения некорректной задачи робена-коши для оператора лапласа... ..	115
<i>Шинибаев М.Д., Беков А.А., Даирбеков С.С., Жолдасов С.А., Мырзакасова Г.Е., Алиаскаров Д.Р., Шекербекова С.А., Садыбек А.Ж.</i> О новой версии задачи двух неподвижных центров.....	121
<i>Сарсенбаев Х.А., Хамзина Б.С., Колдасова Г.А., Исаева Г.Б.</i> Исследование модифицированного реагента АЛС лигносульфонатная (НПП «Азимут»).....	126

CONTENTS

<i>Bakranova D.I., Kukushkin S.A., Beisembetov I.K., Osipov A.V., Nussupov K.Kh., Beisenkhanov N.B., Kenzhaliev B.K., Seitov B.Zh.</i> X-Ray analysis of SiC epitaxial films grown by method of atom replacement on low dislocation silicon substrate.....	5
<i>Batryshev D.G., Ramazanov T.S., Dosbolayev M.K., Gabdullin M.T., Yerlanuly Ye.</i> Synthesis of carbon nanotubes by plasma chemical deposition method from vapour-phase in radio-frequency capacitive discharge.....	10
<i>Demyanova A.S., Danilov A.N., Burtebayev N., Janseitov D.M., Kerimkulov Zh., Alimov D.K., Mukhamejanov Y.S.</i> Exotic states of ¹³ C nuclei with abnormal radii.....	17
<i>Sarsengeldin M.M., Slyamkhan M.M., Bizhigitova N.T.</i> Analytical solution of heat equation with moving boundary tangent to axis by heat polynomials.....	21
<i>Bakranova D.I., Kukushkin S.A., Beisembetov I.K., Osipov A.V., Nussupov K.Kh., Beisenkhanov N.B., Kenzhaliev B.K., Seitov B.Zh.</i> X-ray analysis of SiC epitaxial films grown by method of atom replacement on low dislocation silicon Substrate.....	25
<i>Dikhanbayev K.K., Mussabek G.K., Sivakov V.A., Yermukhamed D., Meiram A.T.</i> Micro-photoluminescence in silicon nano-wires.....	32
<i>Batryshev D.G., Ramazanov T.S., Dosbolayev M.K., Gabdullin M.T., Yerlanuly Ye.</i> Synthesis of carbon nanotubes by plasma chemical deposition method from vapour-phase in radio-frequency capacitive discharge.....	38
<i>Demyanova A.S., Danilov A.N., Burtebayev N., Janseitov D.M., Kerimkulov Zh., Alimov D.K., Mukhamejanov Y.S.</i> Exotic states of ¹³ C nuclei with abnormal radii.....	45
<i>Sergeyev D.M., Shunkeyev K.Sh.</i> Computer simulation of transport properties of nanocontact "Niobium – carbon nanotubes (5.5) – niobium".....	49
<i>Dosbolayev M.K., Utegenov A.U., Tazhen A.B., Ramazanov T.S., Gabdullin M.T.</i> Dynamic properties of pulse plasma flow and dust formation in the pulsed plasma accelerator.....	59
<i>Minglibayev M.Zh., Zhumabek T.M.</i> On the isosceles restricted three-body problem.....	67
<i>Orazbayev S.A., Omirbekov D.B., Dosbolayev M.K., Gabdullin M.T., Ramazanov T.S.</i> Experimental research of luminous efficiency of dusty plasma lamp.....	74
<i>Zhakupov K.B.</i> Modeling thermal barodiffusion with chemical reactions in liquids and gases.....	80
<i>Orazbayev S.A., Omirbekov D.B., Gabdullin M.T., Dosbolayev M.K., Ramazanov T.S.</i> The influence of gas temperature on size and structure of the dust nanoparticles.....	89
<i>Jakupov K.B.</i> Modeling Hooke's law in the theory of elasticity. Unsymmetrical stress tensor.....	96
<i>Burtebayev N., Alimov D.K., Zazulin D.M., Kerimkulov Zh.K., Yushkov A.V., Janseitov D.M., Mukhamejanov Y., Nassurulla M.</i> Determination of parameters of proton ¹⁴ N interaction potential at low energies.....	104
<i>Burtebayev N., Kerimkulov Zh.K., Amangeldi N., Alimov D.K., Mukhamejanov Y.S., Janseitov D.M., Mauey B., Aymaganbetov A., Kurakhmedov A., Bekbaev S.M., Madiyarova A.Zh.</i> Study of elastic scattering of ¹⁴ N ions from ¹⁶ O at energies 17,5 and 41 MeV.....	109
<i>Iskakova U.A., Torebek B.T.</i> Certain method of solving ill-posed cauchy-robin problem for the laplace operator.....	115
<i>Shinibaev M.D., Bekov A.A., Dairbekov S.S., Zholdasov S.A., Myrzakasova G.E., Aliaskarov D.R., Shekerbekova S.A., Sadybek A.G.</i> A new version of the problem of two fixed centers.....	121
<i>Sarsenbayev Kh.A., Khamzina B.S., Koldassova G.A., Issayeva G.B.</i> Research of modified reagent ALS lignosulfonate (NPP «Azimut»).....	126

Publication Ethics and Publication Malpractice in the journals of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan

For information on Ethics in publishing and Ethical guidelines for journal publication see <http://www.elsevier.com/publishingethics> and <http://www.elsevier.com/journal-authors/ethics>.

Submission of an article to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan implies that the described work has not been published previously (except in the form of an abstract or as part of a published lecture or academic thesis or as an electronic preprint, see <http://www.elsevier.com/postingpolicy>), that it is not under consideration for publication elsewhere, that its publication is approved by all authors and tacitly or explicitly by the responsible authorities where the work was carried out, and that, if accepted, it will not be published elsewhere in the same form, in English or in any other language, including electronically without the written consent of the copyright-holder. In particular, translations into English of papers already published in another language are not accepted.

No other forms of scientific misconduct are allowed, such as plagiarism, falsification, fraudulent data, incorrect interpretation of other works, incorrect citations, etc. The National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan follows the Code of Conduct of the Committee on Publication Ethics (COPE), and follows the COPE Flowcharts for Resolving Cases of Suspected Misconduct (http://publicationethics.org/files/u2/New_Code.pdf). To verify originality, your article may be checked by the Cross Check originality detection service <http://www.elsevier.com/editors/plagdetect>.

The authors are obliged to participate in peer review process and be ready to provide corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. All authors of a paper should have significantly contributed to the research.

The reviewers should provide objective judgments and should point out relevant published works which are not yet cited. Reviewed articles should be treated confidentially. The reviewers will be chosen in such a way that there is no conflict of interests with respect to the research, the authors and/or the research funders.

The editors have complete responsibility and authority to reject or accept a paper, and they will only accept a paper when reasonably certain. They will preserve anonymity of reviewers and promote publication of corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. The acceptance of a paper automatically implies the copyright transfer to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.

The Editorial Board of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan will monitor and safeguard publishing ethics.

Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайтах:

www.nauka-nanrk.kz

<http://www.physics-mathematics.kz>

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Редактор *М. С. Ахметова, Д.С. Аленов, Т.А. Апендиев*
Верстка на компьютере *А.М. Кульгинбаевой*

Подписано в печать 2016.
Формат 60x881/8. Бумага офсетная. Печать – ризограф.
4 п.л. Тираж 300. Заказ 6.