

ISSN 2518-1726 (Online),  
ISSN 1991-346X (Print)

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ  
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ  
әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университетінің

# Х А Б А Р Л А Р Ы

---

---

## ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК  
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН  
Қазақстан Республикасының  
Ғылым Академиясының  
им. аль-Фараби

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES  
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN  
Al-Farabi  
Kazakh National University

**SERIES**  
**PHYSICO-MATHEMATICAL**

**2 (336)**

MARCH – APRIL 2021

PUBLISHED SINCE JANUARY 1963

PUBLISHED 6 TIMES A YEAR

ALMATY, NAS RK

---

*NAS RK is pleased to announce that News of NAS RK. Series physico-mathematical journal has been accepted for indexing in the Emerging Sources Citation Index, a new edition of Web of Science. Content in this index is under consideration by Clarivate Analytics to be accepted in the Science Citation Index Expanded, the Social Sciences Citation Index, and the Arts & Humanities Citation Index. The quality and depth of content Web of Science offers to researchers, authors, publishers, and institutions sets it apart from other research databases. The inclusion of News of NAS RK. Series of chemistry and technologies in the Emerging Sources Citation Index demonstrates our dedication to providing the most relevant and influential content of chemical sciences to our community.*

*Қазақстан Республикасы Ұлттық ғылым академиясы "ҚР ҰҒА Хабарлары. Физикалық-математикалық сериясы" ғылыми журналының Web of Science-тің жаңаланған нұсқасы Emerging Sources Citation Index-те индекстелуге қабылданғанын хабарлайды. Бұл индекстелу барысында Clarivate Analytics компаниясы журналды одан әрі the Science Citation Index Expanded, the Social Sciences Citation Index және the Arts & Humanities Citation Index-ке қабылдау мәселесін қарастыруда. Web of Science зерттеушілер, авторлар, баспашылар мен мекемелерге контент тереңдігі мен сапасын ұсынады. ҚР ҰҒА Хабарлары. Химия және технология сериясы Emerging Sources Citation Index-ке енуі біздің қоғамдастық үшін ең өзекті және беделді химиялық ғылымдар бойынша контентке адалдығымызды білдіреді.*

*НАН РК сообщает, что научный журнал «Известия НАН РК. Серия физико-математическая» был принят для индексирования в Emerging Sources Citation Index, обновленной версии Web of Science. Содержание в этом индексировании находится в стадии рассмотрения компанией Clarivate Analytics для дальнейшего принятия журнала в the Science Citation Index Expanded, the Social Sciences Citation Index и the Arts & Humanities Citation Index. Web of Science предлагает качество и глубину контента для исследователей, авторов, издателей и учреждений. Включение Известия НАН РК в Emerging Sources Citation Index демонстрирует нашу приверженность к наиболее актуальному и влиятельному контенту по химическим наукам для нашего сообщества.*

Б а с р е д а к т о р  
ф.-м.ғ.д., проф., ҚР ҰҒА академигі  
**Ғ.М. Мұтанов**

Р е д а к ц и я а л қ а с ы:

**Асанова А.Т.** проф. (Қазақстан)  
**Бошкаев К.А.** PhD докторы (Қазақстан)  
**Байгунчеков Ж.Ж.** проф., академик (Қазақстан)  
**Quevedo Hernando** проф. (Мексика)  
**Жүсіпов М.А.** проф. (Қазақстан)  
**Ковалев А.М.** проф., академик (Украина)  
**Калимолдаев М.Н.** проф., академик (Қазақстан)  
**Михалевич А.А.** проф., академик (Белорусь)  
**Мырзакулов Р.** проф., академик (Қазақстан)  
**Рамазанов Т.С.** проф., академик (Қазақстан)  
**Такибаев Н.Ж.** проф., академик (Қазақстан), бас ред. орынбасары  
**Тигиняну И.** проф., академик (Молдова)  
**Уалиев З.Г.** проф., чл.-корр. (Қазақстан)  
**Харин С.Н.** проф., академик (Қазақстан)

**«ҚР ҰҒА Хабарлары. Физика-математикалық сериясы».**

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Меншіктенуші: «Қазақстан Республикасының Ұлттық ғылым академиясы» РҚБ (Алматы қ.).

Қазақстан Республикасының Ақпарат және коммуникациялар министрлігінің Ақпарат комитетінде  
14.02.2018 ж. берілген № 16906-Ж мерзімдік басылым тіркеуіне қойылу туралы куәлік.

**Тақырыптық бағыты:** *физика-математика ғылымдары және ақпараттық  
технологиялар саласындағы басым ғылыми зерттеулерді  
жариялау.*

Мерзімділігі: жылына 6 рет.

Тиражы: 300 дана.

Редакцияның мекен-жайы: 050010, Алматы қ., Шевченко көш., 28; 219 бөл.;  
тел.: 272-13-19; 272-13-18

<http://physics-mathematics.kz/index.php/en/archive>

---

© Қазақстан Республикасының Ұлттық ғылым академиясы, 2021

Типографияның мекен-жайы: «Аруна» ЖК, Алматы қ., Мұратбаева көш., 75.

Главный редактор  
д.ф.-м.н., проф. академик НАН РК  
**Г.М. Мутанов**

Редакционная коллегия:

**Асанова А.Т.** проф. (Казахстан)  
**Бошкаев К.А.** доктор PhD (Казахстан)  
**Байгунчеков Ж.Ж.** проф., академик (Казахстан)  
**Quevedo Hernando** проф. (Мексика)  
**Жусупов М.А.** проф. (Казахстан)  
**Ковалев А.М.** проф., академик (Украина)  
**Калимолдаев М.Н.** проф., академик (Казахстан)  
**Михалевич А.А.** проф., академик (Беларусь)  
**Мырзакулов Р.** проф., академик (Казахстан)  
**Рамазанов Т.С.** проф., академик (Казахстан)  
**Такибаев Н.Ж.** проф., академик (Казахстан), зам. гл. ред.  
**Тигиняну И.** проф., академик (Молдова)  
**Уалиев З.Г.** проф., чл.-корр. (Казахстан)  
**Харин С.Н.** проф., академик (Казахстан)

**«Известия НАН РК. Серия физика-математическая».**

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы).

Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации Министерства информации и коммуникаций Республики Казахстан № 16906-Ж, выданное 14.02.2018 г.

**Тематическая направленность:** *публикация приоритетных научных исследований в области физико-математических наук и информационных технологий.*

Периодичность: 6 раз в год.

Тираж: 300 экземпляров.

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28; ком. 219; тел.: 272-13-19; 272-13-18

<http://physics-mathematics.kz/index.php/en/archive>

---

© Национальная академия наук Республики Казахстан, 2021

Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75.

Editor in chief

doctor of physics and mathematics, professor, academician of NAS RK

**G.M. Mutanov**

Editorial board:

**Asanova A.T.** prof. (Kazakhstan)

**Boshkayev K.A.** PhD (Kazakhstan)

**Baigunchekov Zh.Zh.** prof., akademik (Kazakhstan)

**Quevedo Hemando** prof. (Mexico)

**Zhusupov M.A.** prof. (Kazakhstan)

**Kovalev A.M.** prof., academician (Ukraine)

**Kalimoldaev M.N.** prof., akademik (Kazakhstan)

**Mikhalevich A.A.** prof., academician (Belarus)

**Myrzakulov R.** prof., akademik (Kazakhstan)

**Ramazanov T.S.** prof., akademik (Kazakhstan)

**Takibayev N.Zh.** prof., academician (Kazakhstan), deputy editor in chief.

**Tiginyanu I.** prof., academician (Moldova)

**Ualiev Z.G.** prof., chl.-korr. (Kazakhstan)

**Kharin S.N.** prof., academician (Kazakhstan)

**News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physical-mathematical series.**

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Owner: RPA "National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan" (Almaty).

The certificate of registration of a periodical printed publication in the Committee of information of the Ministry of Information and Communications of the Republic of Kazakhstan No. 16906-Ж, issued on 14.02.2018.

**Thematic scope: *publication of priority research in the field of physical and mathematical sciences and information technology.***

Periodicity: 6 times a year.

Circulation: 300 copies.

Editorial address: 28, Shevchenko str., of. 219, Almaty, 050010, tel. 272-13-19; 272-13-18

<http://physics-mathematics.kz/index.php/en/archive>

---

© National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, 2021

Address of printing house: ST "Aruna", 75, Muratbayev str., Almaty.

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN  
 PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 336 (2021), 33 – 38

<https://doi.org/10.32014/2021.2518-1726.18>

UDC514.83, 514.84, 51-71, 51-73  
 MRNTI27.31.21, 27.35.00, 27.33.17

Zh. R. Myrzakulova<sup>1</sup>, K. R. Yesmakhanova<sup>1</sup>, Zh. S. Zhubayeva<sup>2</sup>

<sup>1</sup>L.N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan;

<sup>2</sup>Ratbay Myrzakulov Eurasian International Centre for Theoretical Physics, Nur-Sultan, Kazakhstan.

E-mail: zhrmyrzakulova@gmail.com

## EQUIVALENCE OF THE HUNTER-SAXTON EQUATION AND THE GENERALIZED HEISENBERG FERROMAGNET EQUATION

**Abstract.** Integrable systems play an important role in modern mathematics, theoretical and mathematical physics. The display of integrable equations with exact solutions and some special solutions can provide important guarantees for the analysis of its various properties. The Hunter-Saxton equation belongs to the family of integrable systems. The extensive and interesting mathematical theory, underlying the Hunter-Saxton equation, creates active mathematical and physical research. The Hunter-Saxton equation (HSE) is a high-frequency limit of the famous Camassa-Holm equation. The physical interpretation of HSE is the propagation of weakly nonlinear orientation waves in a massive nematic liquid crystal director field.

In this paper, we propose a matrix form of the Lax representation for HSE in  $su(n+1)/s(u(1) \oplus u(n))$ -symmetric space for the case  $n = 2$ . Lax pairs, introduced in 1968 by Peter Lax, are a tool for finding conserved quantities of integrable evolutionary differential equations. The Lax representation expands the possibilities of the equation we are considering. For example, in this paper, we will use the matrix Lax representation for the HSE to establish the gauge equivalence of this equation with the generalized Heisenberg ferromagnet equation (GHFE). The famous Heisenberg Ferromagnet Equation (HFE) is one of the classical equations integrable through the inverse scattering transform. In this paper, we will consider its generalization. And also the connection between the decisions of the HSE and the GHFE will be presented.

**Key words:** integrable systems, the Hunter-Saxton equation, generalized Heisenberg ferromagnet equation, the Lax representation, gauge equivalence.

**Introduction.** The equation describing an asymptotic model of liquid crystals was introduced by J.K. Hunter and R. Saxton [1] in the form

$$(u_t + uu_x)_x = \frac{1}{2}u_x^2, \quad (1)$$

$$m_t + um_x + 2u_x m = 0, \quad (2)$$

$$m = -u_{xx}, \quad (3)$$

where  $u = u(x, t)$  and  $m = m(x, t)$  - real functions.

J.K. Hunter and Y. Zheng Hunter and Zheng introduced the Hamiltonian structure of the HSE, and they also proved the complete integrability of this equation [2]. Further, in work [3], was presented solutions to the inverse scattering problem for HSE. In later works [4-8], analytical and geometric interpretations were reduced to the equation (1).

### Lax Representation of the Hunter-Saxton Equation

As mentioned above, the HSE (2), (3) is integrable using the inverse scattering method and has a pseudo-differential formulation of a Lax representation [9] in the form

$$\Phi_{xx} = \lambda m \Phi, \quad (4)$$

$$\Phi_t = \left( \frac{1}{2\lambda} - u \right) \Phi_x + \frac{1}{2} u_x \Phi, \quad (5)$$

where  $\Phi(x, t) = \Phi(\Phi_1, \Phi_2)^T$  - eigenfunction and, accordingly,  $\lambda$  - eigenvalues.

To establish the gauge equivalence between HSE and GFHE (spin system), we need the Lax matrix representation. Since the coefficients of linear systems corresponding to the spin equations are related to the symmetric matrix Lax representations [10].

**Definition 1.** (Lax Equations). Let  $\Phi(x, t, \lambda)$  be  $SU(2)$  valued function such that  $(x, t) \in O \subset \mathbb{R}^2$  and  $\lambda \in C$  is spectral parameter. Lax equations are defined as

$$\Phi_x = U\Phi, \quad \Phi_t = V\Phi, \quad (6)$$

where  $U(x, t, \lambda)$  and  $V(x, t, \lambda)$  are  $su(2)$  valued functions and they satisfy the following equation

$$U_t - V_x + [U, V] = 0. \quad (7)$$

Equation (7) is the compatibility condition of the (6). The matrices  $U$  and  $V$  are known as Lax pairs.

**Proposition 1.1** The Lax representation for the HSE (2), (3) in symmetric space  $su(n+1)/s(u(1) \oplus u(n))$  at  $n = 2$  is given in the form

$$\Phi_x = U_2\Phi, \quad (8)$$

$$\Phi_t = V_2\Phi, \quad (9)$$

where

$$U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda m & 0 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} \frac{u_x}{2} & \frac{1}{2\lambda} - u \\ \frac{u_{xx}}{2} + \left(\frac{1}{2\lambda} - u\right)\lambda m & -\frac{u_x}{2} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

**Proof.** From the compatibility condition for system (4), (5) matrices  $U_2(x, t, \lambda)$  and  $V_2(x, t, \lambda)$  satisfy the zero curvature condition

$$U_{2t} - V_{2x} + [U_2, V_2] = 0. \quad (11)$$

Let us calculate the necessary components of the equation (11)

$$U_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda m_t & 0 \end{pmatrix}, \quad V_x = \begin{pmatrix} \frac{u_{xx}}{2} & -u_x \\ \frac{1}{2}(u_{xxx} + m_x) - \lambda(u_x m + u m_x) & -\frac{u_{xx}}{2} \end{pmatrix},$$

$$[U, V] = \begin{pmatrix} \frac{u_{xx}}{2} & -u_x \\ \lambda m u_x & -\frac{u_{xx}}{2} \end{pmatrix},$$

and substitute it into the zero curvature condition. Equating the corresponding elements of the second rows and first columns of the matrices in the equations (11), we obtain

$$\lambda m_t - \frac{u_{xxx}}{2} - \left[ \left( \frac{1}{2\lambda} - u \right) \lambda m \right]_x + \lambda m u_x = 0. \quad (12)$$

The rest of the elements will be identically equal to zero. Collecting the terms of the equation (12) by degree  $\lambda$ , we get the HSE (2), (3)

$$\lambda^0: \quad -\frac{1}{2}(u_{xxx} + m_x) = 0,$$

$$m_x = -u_{xxx},$$

$$m = -u_{xx},$$

$$\lambda^1: \quad m_t + u_x m + u m_x + m u_x = 0,$$

$$m_t + 2m u_x + u m_x = 0.$$

Thereby the proposition 1 is proved.

**A Generalized Heisenberg Ferromagnet Equation**

In this subsection, we present one of the integrable generalized Heisenberg ferromagnet equations, which has the form

$$[A, A_{xt} + (uA_x)_x] = 0, \tag{13}$$

where  $A = (A_1, A_2, A_3)$  is the spin vector and  $A^2 = I$ .

Here the real function  $u$  is expressed in terms of the spin matrix  $A$  as follows:

$$u = \frac{1}{8\beta^2} \partial_x^{-2} (tr(A_x^2)), \tag{14}$$

where  $\beta = const$  and

$$A = \begin{pmatrix} A_3 & A^- \\ A^+ & -A_3 \end{pmatrix}, \quad A^\pm = A_1 \pm iA_2. \tag{15}$$

The Lax representation corresponding to the GHFE looks as follows

$$\Psi_x = U_1 \Psi, \tag{16}$$

$$\Psi_t = V_1 \Psi, \tag{17}$$

here

$$U_1 = \frac{(\beta - \lambda)}{2} \left[ A, \left( u - \frac{1}{2\beta} \right) A_x + A_t \right], \tag{18}$$

$$V_1 = \frac{(\beta - \lambda)}{2} \left( \frac{1}{2\lambda} - u \right) [A, A_t] + \frac{(\beta - \lambda)u}{2} \left( \frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{2\beta} - u \right) [A, A_x]. \tag{19}$$

**Gauge equivalence HSE and GHFE**

**Definition 2.** Two systems of nonlinear equations, integrable using the inverse scattering method, are called gauge-equivalent if the corresponding flat connections  $U_j, V_j, j = 1, 2$  are defined in one bundle and are obtained from each other by a gauge transformation independent of  $\lambda$ , that is, if

$$U_1 = gU_2g^{-1} + g_xg^{-1}, \quad V_1 = gV_2g^{-1} + g_tg^{-1},$$

where  $g(x, t) \in GL(n, C)$ . It is clear that in this case, in the corresponding systems of linear differential equation  $\Phi_1 = g\Phi_2$ .

Proposition 2.2 The HSE (2), (3) with matrix Lax representation (8), (9) and the GHFE (13) with Lax representation (16), (17) are gauge equivalent to each other [10, 11].

**Proof.** Based on the classical theory of gauge equivalence [10], we begin the proof of the theorem with the transformation

$$\Psi = g^{-1}\Phi, \quad g = \Phi|_{\lambda=\beta}, \tag{20}$$

where  $\Psi$  is a solution to the system of the corresponding the GHFE (11),  $\Phi$  - solution of system, corresponding to the HSE (2)-(3), and  $g(x, t)$  - an arbitrary 2x2 matrix function that is a solution to the system (8)-(9) for  $\lambda = \beta$ .



The derivative of the vector function  $\Psi$  with respect to  $x$  is equal to

$$\Psi_x = (g^{-1}\Phi)_x = (\lambda - \beta)mg^{-1}\Sigma g = U_1\Psi. \quad (21)$$

Carrying out a similar calculation for the derivatives with respect to  $t$ , we obtain

$$\Psi_t = (g^{-1}\Phi)_t = (\beta - \lambda)umg^{-1}\Sigma g + \frac{(\beta - \lambda)}{2\lambda\beta}g^{-1}\Upsilon g = V_1\Psi, \quad (22)$$

where

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Upsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Let us introduce the notation

$$A = g^{-1}\sigma_3 g, \quad (23)$$

where  $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  is Pauli matrix.

After some calculations, we get

$$[A, A_x] = 4\beta mg^{-1}\Sigma g + 4g^{-1}\Upsilon g, \quad (24)$$

$$[A, A_t] = \left( \frac{u_{xx}}{2\beta m} + \frac{1}{2\beta} - u \right) [A, A_x] - \frac{2u_{xx}}{\beta m} g^{-1}\Upsilon g, \quad (25)$$

$$g^{-1}\Sigma g = \frac{1}{4\beta m} [A, A_x] - \frac{1}{\beta m} g^{-1}\Upsilon g, \quad (26)$$

and

$$g^{-1}\Upsilon g = \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{m}{u_{xx}} \right) [A, A_x] - \frac{\beta m}{2u_{xx}} [A, uA_x + A_t]. \quad (27)$$

Substituting (24) - (27) into (21), (22), we obtain the Lax representation for GHFE (18), (19). Now it is easy to verify that the zero curvature condition

$$U_{1t} - V_{1x} + [U_1, V_1] = 0, \quad (28)$$

with allowance for (16) and (17) is equivalent to the GHFE. Proposition 2 is proved.

**Corollary.** If the functions  $u(x,t)$  and  $m(x,t)$  are solutions of the HSE (2)-(3), then their connections with the solution  $A$  for the GHFE (13) are expressed as (14).

**Conclusion.** In this paper, a matrix form of the Lax representation of the HSE in symmetric space  $su(n+1)/s(u(1) \oplus u(n))$  for the case  $n = 2$  was proposed. The Lax representation of this type expands the possibilities of studying the equation under consideration. In particular, using the matrix form of the Lax representation for the HSE, we have established the gauge equivalence of this equation to the GHFE and presented the relationship between their solutions.

This research has been funded by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP 08856912).

Ж. Р. Мырзакулова<sup>1</sup>, К. Р. Есмаханова<sup>1</sup>, Ж. С. Жубаева<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Нұр-Сұлтан, Қазақстан;

<sup>2</sup> Еуразиялық халықаралық теориялық физика орталығы, Нұр-Сұлтан, Қазақстан.

### ХАНТЕР-САКСТОН ТЕНДЕУІ МЕН ГЕЙЗЕНБЕРГ ФЕРРОМАГНЕТИГІНІҢ ЖАЛПЫЛАНҒАН ТЕНДЕУІНІҢ ЭКВИВАЛЕНТТІЛІГІ

**Аннотация.** Интегралданатын жүйелер қазіргі математикада, теориялық және математикалық физикада маңызды рөл атқарады. Нақты шешімдері бар интегралданатын тендеулер мен кейбір арнайы шешімдердің көрінісі оның әр түрлі қасиеттерін талдауда маңызды шарттарды қамтамасыз ете алады. Мұндай интегралданатын жүйелер тобына Хантер-Сакстон тендеуі жатады. Бұл тендеудің негізінде жатқан көлемді әрі қызықты математикалық теория белсенді түрде математикалық және физикалық зерттеулерге ие болып келеді. Хантер-Сакстон тендеуі (ХСТ) – бәрімізге белгілі Камасса-Холм тендеуінің жоғары жиілікті шегі. ХСТ-нің физикалық мағынасы әлсіз сызықты емес бағдарланған толқындардың сұйық кристалл директорының массивті нематикалық өрісінде таралуы болып табылады.

Бұл мақалада  $su(n+1)/s(u(1) \oplus u(n))$  симметриялық кеңістігінде,  $n = 2$  жағдайы үшін ХСТ -нің Лакс көрінісінің матрицалық түрін ұсынамыз. 1968 жылы Питер Лакс енгізген Лакс жұптары интегралданатын эволюциялық дифференциалдық тендеулердің сақталатын шамаларын табуға септігін тигізеді. Лакс көрінісі қарастыратын тендеудің мүмкіншіліктерін арттырады. Мысалы, берілген жұмыста біз Гейзенберг ферромагнетигінің жалпыланған тендеуімен (ГФЖТ) ХСТ-нің калибрлік эквиваленттілігін орнату үшін, ХСТ-нің матрицалық түрдегі Лакс көрінісін пайдалана-мыз. Әйгілі Гейзенбергтің ферромагнетик тендеуі (ГФТ) кері шашырау түрлендіруі арқылы интегралданатын классикалық тендеулердің бірі болып табылады. Бұл мақалада біз оның жалпылауын қарастырамыз. Сонымен қатар, ХСТ мен ГФЖТ шешімдерінің арасындағы байла-нысты көрсетеміз.

**Түйін сөздер:** интегралданатын жүйелер, Хантер-Сакстон тендеуі, Гейзенберг ферромагнетигінің жалпыланған тендеуі, Лакс көрінісі, калибрлік эквиваленттілік.

Ж. Р. Мырзакулова<sup>1</sup>, К. Р. Есмаханова<sup>1</sup>, Ж. С. Жубаева<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан;

<sup>2</sup> Евразийский международный центр теоретической физики, Нур-Султан, Казахстан

### ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ УРАВНЕНИЯ ХАНТЕРА-САКСОНА И ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ФЕРРОМАГНЕТИКА ГЕЙЗЕНБЕРГА

**Аннотация.** Интегрируемые системы играют важную роль в современной математике, теоретической и математической физике. Отображение интегрируемых уравнений с точными решениями и некоторых специальных решений может обеспечить важные условия для анализа его различных свойств. К семейству таких интегрируемых систем принадлежит уравнение Хантера-Саксона. Обширная и интересная математическая теория, которая лежит в основе уравнения Хантера-Саксона вызывает активные математические и физические исследования. Уравнение Хантера-Саксона (УХС) – это высокочастотный предел известного уравнения Камассы-Холма. Физической интерпретацией УХС является распространение слабонелинейных ориентационных волн в массивном нематическом поле директора жидкого кристалла.

В этой статье мы предлагаем матричную форму представления Лакса УХС в симметричном пространстве  $su(n+1)/s(u(1) \oplus u(n))$  для случая  $n = 2$ . Пары Лакса, введенные в 1968 году Питером Лаксом, являются инструментом для нахождения сохраняющихся величин интегрируемых эволюционных дифференциальных уравнений. Представление Лакса расширяет возможности рассматриваемого уравнения. Например, в данной работе мы будем использовать матричное представление Лакса для УХС, чтобы установить калибровочную эквивалентность этого уравнения с обобщенным уравнением ферромагнетика Гейзенберга (ОУФГ). Знаменитое уравнение ферромагнетика Гейзенберга (УФГ) является одним из классических уравнений, интегрируемых посредством обратного преобразования рассеяния. В этой статье мы рассмотрим его обобщение, а также будет представлена связь между решениями УХС и ОУФГ.

**Ключевые слова:** интегрируемые системы, уравнение Хантера-Саксона, обобщенное уравнение ферромагнетика Гейзенберга, представление Лакса, калибровочная эквивалентность.

**Information about authors:**

Yesmakhanova KuralayRatbaykyzy, associate professor of the department "Mathematical computer modeling" Eurasian National University named after L.N. Gumilyov, PhD, candidate of phys.-math. science of the Republic of Kazakhstan; kryesmakhanova@gmail.com;

MyrzakulovaZhaidaryRatbaykyzy, teacher of the Department of "Algebra and geometry"Eurasian National University named after L.N. Gumilyov; zhrmyrzakulova@gmail.com; <https://orcid.org/0000-0002-4047-4484>;

ZhubayevaZhuldyzSuiyndykkyzy, junior researcher of "Ratbay Myrzakulov Eurasian International Centre for Theoretical Physics ", zhuldyz.zhubayeva@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0001-7137-3793>

**REFERENCES**

- [1] Hunter J.K., Saxton R. Dynamics of director fields. *SIAM Journal on Applied Mathematics*. Volume 51, Number 6 (1991), PP.1498–1521. <https://doi.org/10.1137/0151075>
- [2] Hunter J.K., Zheng Y.X. On a completely integrable nonlinear hyperbolic variational equation. *Physica D*. Volume 79 (1994), PP.361–386. [https://doi.org/10.1016/S0167-2789\(05\)80015-6](https://doi.org/10.1016/S0167-2789(05)80015-6)
- [3] Beals R., Sattinger D.H., Szmigielski J. Inverse scattering solutions of the Hunter-Saxton equation. *Applicable Analysis*. Volume 78 (2001), PP.255-269. <http://dx.doi.org/10.1080/00036810108840938>
- [4] Bressan A., Constantin A. Global Solutions of the Hunter-Saxton Equation. *SIAM J. Math. Anal.* Volume 37 (2005), PP.996-1026. [arXiv:math/0502059](https://arxiv.org/abs/math/0502059)
- [5] Lenells J. The Hunter-Saxton Equation Describes the Geodesic Flow on a Sphere. *Journal of Geometry and Physics*. Volume 57, Number 10 (2007), PP.2049-2064. <https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2007.05.003>
- [6] Hunter J. K., Saxton R. A. Dynamics of director fields, *SIAM J. Appl. Math.* Volume 51 (1991), PP. 1498-1521.
- [7] R. Beals, D. Sattinger, and J. Szmigielski, Inverse scattering solutions of the Hunter-Saxton equation, *Applicable Analysis* 78 (2001), 255-2
- [8] Taishiyeva A., Myrzakul T., Nugmanova G., Myrzakul Sh. Geometric Flows of Curves, Two-Component Camassa-Holm Equation and Generalized Heisenberg Ferromagnet Equation. <https://arxiv.org/abs/1910.13281v1>
- [9] Rossen, Ivanov I. Algebraic Discretization of the Camassa-Holm and Hunter-Saxton Equations. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*. Volume 15, Number 2 (2008), PP 1-12 <https://doi.org/10.2991/jnmp.2008.15.s2.1>
- [10] Myrzakul S.R., Myrzakulova Zh. R. Gauge equivalence between the  $\Gamma$ -spin system and (2+1)-dimensional two-component nonlinear Schrödinger equation. *Volume 2, Number 330 (2020)*, PP.112–119. <https://doi.org/10.32014/2020.2518-1726.22>
- [11] Zakharov V.E., Takhtadzhyan L.A. Equivalence of the nonlinear Schrödinger equation and the equation of a Heisenberg ferromagnet. *Theoretical and Mathematical Physics*. Volume 38 (1979), PP. 17-23. <https://doi.org/10.1007/BF01030253>

**Publication Ethics and Publication Malpractice**  
**in the journals of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan**

For information on Ethics in publishing and Ethical guidelines for journal publication see <http://www.elsevier.com/publishingethics> and <http://www.elsevier.com/journal-authors/ethics>.

Submission of an article to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan implies that the described work has not been published previously (except in the form of an abstract or as part of a published lecture or academic thesis or as an electronic preprint, see <http://www.elsevier.com/postingpolicy>), that it is not under consideration for publication elsewhere, that its publication is approved by all authors and tacitly or explicitly by the responsible authorities where the work was carried out, and that, if accepted, it will not be published elsewhere in the same form, in English or in any other language, including electronically without the written consent of the copyright-holder. In particular, translations into English of papers already published in another language are not accepted.

No other forms of scientific misconduct are allowed, such as plagiarism, falsification, fraudulent data, incorrect interpretation of other works, incorrect citations, etc. The National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan follows the Code of Conduct of the Committee on Publication Ethics (COPE), and follows the COPE Flowcharts for Resolving Cases of Suspected Misconduct ([http://publicationethics.org/files/u2/New\\_Code.pdf](http://publicationethics.org/files/u2/New_Code.pdf)). To verify originality, your article may be checked by the Cross Check originality detection service <http://www.elsevier.com/editors/plagdetect>.

The authors are obliged to participate in peer review process and be ready to provide corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. All authors of a paper should have significantly contributed to the research.

The reviewers should provide objective judgments and should point out relevant published works which are not yet cited. Reviewed articles should be treated confidentially. The reviewers will be chosen in such a way that there is no conflict of interests with respect to the research, the authors and/or the research funders.

The editors have complete responsibility and authority to reject or accept a paper, and they will only accept a paper when reasonably certain. They will preserve anonymity of reviewers and promote publication of corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. The acceptance of a paper automatically implies the copyright transfer to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.

The Editorial Board of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan will monitor and safeguard publishing ethics.

(Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайтах:

[www.nauka-nanrk.kz](http://www.nauka-nanrk.kz)

<http://physics-mathematics.kz/index.php/en/archive>

**ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)**

Редакторы: *М. С. Ахметова, Д. С. Аленов, Р.Ж. Мрзабаева*  
Верстка на компьютере *А.М. Кульгинбаевой*

Подписано в печать 15.04.2021.

Формат 60x881/8. Бумага офсетная. Печать – ризограф.

11,6 п.л. Тираж 300. Заказ 2.