

ISSN 2518-1726 (Online),
ISSN 1991-346X (Print)

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ
Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университетінің

Х А Б А Р Л А Р Ы

ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН
Қазақстан Республикасының Ғылым
Академиясының Әл-Фараби атындағы
Қазақ ұлттық университетінің

NEWS

OF THE ACADEMY OF SCIENCES
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
Al-Farabi Kazakh
National University

SERIES
PHYSICO-MATHEMATICAL

3 (337)

MAY – JUNE 2021

PUBLISHED SINCE JANUARY 1963

PUBLISHED 6 TIMES A YEAR

ALMATY, NAS RK

NAS RK is pleased to announce that News of NAS RK. Series physico-mathematical journal has been accepted for indexing in the Emerging Sources Citation Index, a new edition of Web of Science. Content in this index is under consideration by Clarivate Analytics to be accepted in the Science Citation Index Expanded, the Social Sciences Citation Index, and the Arts & Humanities Citation Index. The quality and depth of content Web of Science offers to researchers, authors, publishers, and institutions sets it apart from other research databases. The inclusion of News of NAS RK. Series of chemistry and technologies in the Emerging Sources Citation Index demonstrates our dedication to providing the most relevant and influential content of chemical sciences to our community.

Қазақстан Республикасы Ұлттық ғылым академиясы «ҚР ҰҒА Хабарлары. Физикалық-математикалық сериясы» ғылыми журналының Web of Science-тің жаңаланған нұсқасы Emerging Sources Citation Index-те индекстелуге қабылданғанын хабарлайды. Бұл индекстелу барысында Clarivate Analytics компаниясы журналды одан әрі the Science Citation Index Expanded, the Social Sciences Citation Index және the Arts & Humanities Citation Index-ке қабылдау мәселесін қарастыруда. Web of Science зерттеушілер, авторлар, баспашылар мен мекемелерге контент тереңдігі мен сапасын ұсынады. ҚР ҰҒА Хабарлары. Химия және технология сериясы Emerging Sources Citation Index-ке енуі біздің қоғамдастық үшін ең өзекті және беделді химиялық ғылымдар бойынша контентке адалдығымызды білдіреді.

НАН РК сообщает, что научный журнал «Известия НАН РК. Серия физико-математическая» был принят для индексирования в Emerging Sources Citation Index, обновленной версии Web of Science. Содержание в этом индексировании находится в стадии рассмотрения компанией Clarivate Analytics для дальнейшего принятия журнала в the Science Citation Index Expanded, the Social Sciences Citation Index и the Arts & Humanities Citation Index. Web of Science предлагает качество и глубину контента для исследователей, авторов, издателей и учреждений. Включение Известия НАН РК в Emerging Sources Citation Index демонстрирует нашу приверженность к наиболее актуальному и влиятельному контенту по химическим наукам для нашего сообщества.

Бас редактор:

МҰТАНОВ Ғалымқайыр Мұтанұлы, техника ғылымдарының докторы, профессор, ҚР ҰҒА академигі, ҚР БҒМ ҒК «Ақпараттық және есептеу технологиялары институты» бас директорының м.а. (Алматы, Қазақстан) Н-5

Редакция алқасы:

ҚАЛИМОЛДАЕВ Мақсат Нұрәділұлы (бас редактордың орынбасары), физика-математика ғылымдарының докторы, профессор, ҚР ҰҒА академигі, ҚР БҒМ ҒК «Ақпараттық және есептеу технологиялары институты» бас директорының кеңесшісі, зертхана меңгерушісі (Алматы, Қазақстан) Н-7

БАЙГУНЧЕКОВ Жұмаділ Жаңабайұлы (бас редактордың орынбасары), техника ғылымдарының докторы, профессор, ҚР ҰҒА академигі, Кибернетика және ақпараттық технологиялар институты, Сатпаев университетінің Қолданбалы механика және инженерлік графика кафедрасы, (Алматы, Қазақстан) Н-3

ВОЙЧИК Вальдемар, техника ғылымдарының докторы (физика), Люблин технологиялық университетінің профессоры (Люблин, Польша) Н=23

БОШКАЕВ Қуантай Авғазыұлы, Ph.D. Теориялық және ядролық физика кафедрасының доценті, әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті (Алматы, Қазақстан) Н-10

QUEVEDO Hernando, профессор, Ядролық ғылымдар институты (Мехико, Мексика) Н-28

ЖҮСПОВ Марат Абжанұлы, физика-математика ғылымдарының докторы, теориялық және ядролық физика кафедрасының профессоры, әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті (Алматы, Қазақстан) Н-7

КОВАЛЕВ Александр Михайлович, физика-математика ғылымдарының докторы, Украина ҰҒА академигі, Қолданбалы математика және механика институты (Донецк, Украина) Н-5

МИХАЛЕВИЧ Александр Александрович, техника ғылымдарының докторы, профессор, Беларусь ҰҒА академигі (Минск, Беларусь) Н-2

РАМАЗАНОВ Тілекқабұл Сәбитұлы, физика-математика ғылымдарының докторы, профессор, ҚР ҰҒА академигі, әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университетінің ғылыми-инновациялық қызмет жөніндегі проректоры, (Алматы, Қазақстан) Н-26

ТАКИБАЕВ Нұрғали Жабағаұлы, физика-математика ғылымдарының докторы, профессор, ҚР ҰҒА академигі, әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті (Алматы, Қазақстан) Н-5

ТИГИНЯНУ Ион Михайлович, физика-математика ғылымдарының докторы, академик, Молдова Ғылым Академиясының президенті, Молдова техникалық университеті (Кишинев, Молдова) Н-42

ХАРИН Станислав Николаевич, физика-математика ғылымдарының докторы, профессор, ҚР ҰҒА академигі, Қазақстан-Британ техникалық университеті (Алматы, Қазақстан) Н-10

ДАВЛЕТОВ Асқар Ербуланович, физика-математика ғылымдарының докторы, профессор, әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті (Алматы, Қазақстан) Н – 12

КАЛАНДРА Пьетро, Ph.D (физика), Наноқұрылымды материалдарды зерттеу институтының профессоры (Рим, Италия) Н = 26

«ҚР ҰҒА Хабарлары. Физика-математикалық сериясы».

ISSN 2518-1726 (Online),

ISSN 2224-346X (Print)

Меншіктенуші: «Қазақстан Республикасының Ұлттық ғылым академиясы» РҚБ (Алматы қ.).

Қазақстан Республикасының Ақпарат және қоғамдық даму министрлігінің Ақпарат комитетінде 14.02.2018 ж. берілген № 16906-Ж мерзімдік басылым тіркеуіне қойылу туралы куәлік.

Тақырыптық бағыты: *физика-математика ғылымдары және ақпараттық техникалар саласындағы басым ғылыми зерттеулерді жариялау.*

Мерзімділігі: жылына 6 рет.

Тиражы: 300

Редакцияның мекен-жайы: 050010, Алматы қ., Шевченко көш., 28, 219 бөл., тел.: 272-13-19, 272-13-18
<http://www.physico-mathematical.kz/index.php/en/>

© Қазақстан Республикасының Ұлттық ғылым академиясы, 2021

Типографияның мекен-жайы: «Аруна» ЖК, Алматы қ., Муратбаева көш., 75.

Главный редактор:

МУТАНОВ Галимкаир Мутанович, доктор технических наук, профессор, академик НАН РК, и.о. генерального директора «Института информационных и вычислительных технологий» КН МОН РК (Алматы, Казахстан) Н - 5

Редакционная коллегия:

КАЛИМОЛДАЕВ Максат Нурадилович, (заместитель главного редактора), доктор физико-математических наук, профессор, академик НАН РК, советник генерального директора «Института информационных и вычислительных технологий» КН МОН РК, заведующий лабораторией (Алматы, Казахстан) Н - 7

БАЙГУНЧЕКОВ Жумадил Жанабаевич, (заместитель главного редактора), доктор технических наук, профессор, академик НАН РК, Институт кибернетики и информационных технологий, кафедра прикладной механики и инженерной графики, университет Сатпаева (Алматы, Казахстан) Н - 3

ВОЙЧИК Вальдемар, доктор технических наук (физ.-мат.), профессор Люблинского технологического университета (Люблин, Польша) Н=23

БОШКАЕВ Куантай Авгазыевич, доктор Ph.D, преподаватель, доцент кафедры теоретической и ядерной физики, Казахский национальный университет им. аль-Фараби (Алматы, Казахстан) Н - 10

QUEVEDO Hemando, профессор, Национальный автономный университет Мексики (UNAM), Институт ядерных наук (Мехико, Мексика) Н - 28

ЖУСУПОВ Марат Абжанович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической и ядерной физики, Казахский национальный университет им. аль-Фараби (Алматы, Казахстан) Н - 7

КОВАЛЕВ Александр Михайлович, доктор физико-математических наук, академик НАН Украины, Институт прикладной математики и механики (Донецк, Украина) Н - 5

МИХАЛЕВИЧ Александр Александрович, доктор технических наук, профессор, академик НАН Беларуси (Минск, Беларусь) Н - 2

РАМАЗАНОВ Тлеккабул Сабитович, доктор физико-математических наук, профессор, академик НАН РК, проректор по научно-инновационной деятельности, Казахский национальный университет им. аль-Фараби (Алматы, Казахстан) Н – 26

ТАКИБАЕВ Нургали Жабагаевич, доктор физико-математических наук, профессор, академик НАН РК, Казахский национальный университет им. аль-Фараби (Алматы, Казахстан) Н - 5

ТИГИНЯНУ Ион Михайлович, доктор физико-математических наук, академик, президент Академии наук Молдовы, Технический университет Молдовы (Кишинев, Молдова) Н - 42

ХАРИН Станислав Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор, академик НАН РК, Казахстанско-Британский технический университет (Алматы, Казахстан) Н – 10

ДАВЛЕТОВ Аскар Ербуланович, доктор физико-математических наук, профессор, Казахский национальный университет им. аль-Фараби (Алматы, Казахстан) Н – 12

КАЛАНДРА Пьетро, доктор философии (Ph.D, физика), профессор Института по изучению наноструктурированных материалов (Рим, Италия) Н = 26

«Известия НАН РК. Серия физика-математическая».

ISSN 2518-1726 (Online),

ISSN 2224-346X (Print)

Собственник: Республиканское общественное объединение «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы).

Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации Министерства информации и общественного развития Республики Казахстан № 16906-Ж выданное 14.02.2018 г.

Тематическая направленность: *публикация статей по геологии и техническим наукам.*

Периодичность: 6 раз в год.

Тираж: 300

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, оф. 219, тел.: 272-13-19, 272-13-18

<http://www.physico-mathematical.kz/index.php/en/>

© Национальная академия наук Республики Казахстан, 2021

Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75.

Editor in chief

MUTANOV Galimkair Mutanovich, doctor of technical Sciences, Professor, Academician of NAS RK, acting director of the Institute of Information and Computing Technologies of SC MES RK (Almaty, Kazakhstan) H - 5

Editorial board:

KALIMOLDAYEV Maksat Nuradilovich (Deputy Editor-in-Chief), doctor in Physics and Mathematics, Professor, Academician of NAS RK, Advisor to the General Director of the Institute of Information and Computing Technologies of SC MES RK, Head of the Laboratory (Almaty, Kazakhstan) H - 7

BAYGUNCHEKOV Zhumadil Zhanabayevich, (Deputy Editor-in-Chief), doctor of Technical Sciences, Professor, Academician of NAS RK, Institute of Cybernetics and Information Technologies, Department of Applied Mechanics and Engineering Graphics, Satbayev University (Almaty, Kazakhstan) H - 3

WOICIK Waldemar, Doctor of Phys.-Math. Sciences, Professor, Lublin University of Technology (Lublin, Poland) H=23

BOSHKAYEV Kuantai Avgazievich, PhD, Lecturer, Associate Professor of the Department of Theoretical and Nuclear Physics, Al-Farabi Kazakh National University (Almaty, Kazakhstan) H - 10

QUEVEDO Hemando, Professor, National Autonomous University of Mexico (UNAM), Institute of Nuclear Sciences (Mexico City, Mexico) H - 28

ZHUSSUPOV Marat Abzhanovich, Doctor in Physics and Mathematics, Professor of the Department of Theoretical and Nuclear Physics, al-Farabi Kazakh National University (Almaty, Kazakhstan) H - 7

KOVALEV Alexander Mikhailovich, Doctor in Physics and Mathematics, Academician of NAS of Ukraine, Director of the State Institution «Institute of Applied Mathematics and Mechanics» DPR (Donetsk, Ukraine) H - 5

MIKHALEVICH Alexander Alexandrovich, Doctor of Technical Sciences, Professor, Academician of NAS of Belarus (Minsk, Belarus) H - 2

RAMAZANOV Tlekkabul Sabitovich, Doctor in Physics and Mathematics, Professor, Academician of NAS RK, Vice-Rector for Scientific and Innovative Activity, al-Farabi Kazakh National University (Almaty, Kazakhstan) H – 26

TAKIBAYEV Nurgali Zhabagaevich, Doctor in Physics and Mathematics, Professor, Academician of NAS RK, al-Farabi Kazakh National University (Almaty, Kazakhstan) H - 5

TIGHINEANU Ion Mikhailovich, Doctor in Physics and Mathematics, Academician, Full Member of the Academy of Sciences of Moldova, President of the AS of Moldova, Technical University of Moldova (Chisinau, Moldova) H - 42

KHARIN Stanislav Nikolayevich, Doctor in Physics and Mathematics, Professor, Academician of NAS RK, Kazakh-British Technical University (Almaty, Kazakhstan) H – 10

DAVLETOV Askar Erbulanovich, Doctor in Physics and Mathematics, Professor, al-Farabi Kazakh National University (Almaty, Kazakhstan) H - 12

CALANDRA Pietro, PhD in Physics, Professor at the Institute of Nanostructured Materials (Monterotondo Station Rome, Italy)

News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.

Physical-mathematical series.

ISSN 2518-1726 (Online),

ISSN 2224-346X (Print)

Owner: RPA «National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan» (Almaty).

The certificate of registration of a periodical printed publication in the Committee of information of the Ministry of Information and Social Development of the Republic of Kazakhstan No. 16906-Ж, issued 14.02.2018

Thematic scope: *publication of papers on geology and technical sciences.*

Periodicity: 6 times a year.

Circulation: 300

Editorial address: 28, Shevchenko str., of. 219, Almaty, 050010, tel. 272-13-19, 272-13-18,
<http://www.physico-mathematical.kz/index.php/en/>

© National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, 2021

Address of printing house: ST «Aruna», 75, Muratbayev str, Almaty.

NEWSOF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 3, Number 337 (2021), 113 – 120

<https://doi.org/10.32014/2020.2518-1726.53>

UDC 521.1

Г.Т. Омарова, Ж.Т. Омарова, Ч.Т. Омаров

Астрофизический институт им. В.Г. Фесенкова, Алматы, Казахстан

E-mail: gulnara.omarova@gmail.com**К ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ**

Аннотация. Данная работа посвящена обратной задаче небесной механики, исследование которой приобрело актуальность в связи с интенсивным освоением космического пространства и изучением гравитационных и других силовых полей планет Солнечной системы, других небесных тел и гравитирующих систем. Обратная задача небесной механики - это задача об определении потенциала, порождающего заданный набор, или семейство орбит.

Широкою известность получило уравнение Себехея – линейное уравнение в частных производных первого порядка для потенциала автономной консервативной системы с двумя степенями свободы, порождающего заданное однопараметрическое семейство плоских орбит. Это уравнение дало импульс целой серии исследований в области небесной механики.

Существует целая серия работ, посвященных обобщению уравнения Себехея и его различным аналогам. В ряде исследований были представлены свойства и интерпретации уравнения Себехея с точки зрения аналитической механики, некоторые из которых обобщены в данной статье.

Расширенный обзор проделан с целью подчеркнуть важность проведения дальнейших исследований обратной задачи небесной механики и ее применения для изучения актуальных проблем динамики различных гравитирующих систем.

Ключевые слова: небесная механика, обратная задача, уравнение Себехея.

Введение. В небесной механике существует целая серия работ [2-7, 9-12,15-18, 22-27], посвященных развитию обратной задачи небесной механики, сформулированной В. Себехеем [27], в ряде которых исследованы ее некоторые важные свойства и интерпретации [10, 12, 17, 22,23,25], описанные кратко в [21], основные из них представлены здесь и дополнены кратким обзором новейших исследований.

Рассмотрим консервативную динамическую систему, описываемую в системе координат Oxy уравнениями

$$\ddot{x} = U_x \quad , \quad \ddot{y} = U_y \quad , \quad (1)$$

где $U = U(x, y)$ - искомый потенциал, точка обозначает дифференцирование по времени, а нижние индексы в правых частях уравнения - дифференцирование частным образом по x и y соответственно.

В качестве базового возьмем линейное уравнение в частных производных первого порядка для искомого потенциала $U = U(x, y)$ (уравнение Себехея) вида

$$f_x U_x + f_y U_y + 2(U + h) \frac{f_{xx} f_y^2 - 2f_{xy} f_x f_y + f_{yy} f_x^2}{f_x^2 + f_y^2} = 0 \quad , \quad (2)$$

где h - постоянная энергии, а однопараметрическое семейство плоских орбит задано уравнение

$$f(x, y) = u \quad (3)$$

Решение уравнения (2) эквивалентно решению системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{f_x} = \frac{dy}{f_y} = -\frac{dU}{2\Psi(U+h)} \quad (4)$$

где введено обозначение

$$\Psi = \frac{f_{xx}f_y^2 - 2f_{xy}f_xf_y + f_{yy}f_x^2}{f_x^2 + f_y^2} \quad .$$

Интеграл энергии имеет вид

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2(U+h) \quad (5)$$

1. С точки зрения векторного и тензорного анализа уравнение (2) отражает простое свойство движения материальной точки, а именно: отсутствие составляющей реакции связи по нормали к траектории движения [22]. Иначе говоря, если на кривую (3) смотреть как на рельс, по которому должна двигаться частица, то уравнение (2) выражает собой нулевое давление на него из-за уравновешивания гравитационных и центробежных сил. Это свойство можно записать при помощи векторного уравнения

$$\varepsilon \frac{v^2}{\rho} + \vec{N}\vec{F} = 0 \quad , \quad (6)$$

где v – скорость точки, ρ – радиус кривизны траектории, \vec{F} – вектор действующей на точку силы, а \vec{N} – единичный вектор нормали к траектории, направление которого определяет знак параметра ε : если он направлен к центру кривизны, то $\varepsilon = 1$, а если от него, то $\varepsilon = -1$.

В итоге, уравнение (6) записано в виде

$$2(U+h)\operatorname{div}\left(\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}\right) + \nabla U \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = 0 \quad , \quad (7)$$

а в случае прямоугольных координат x, y уравнение (7) имеет вид уравнения (2).

2. В работе [23] показано, что уравнение Себежия эквивалентно уравнению Эйлера для вариационного принципа Мопертюи. Действительно, в задаче о движении частицы в пространстве под действием консервативных сил с потенциалом U имеет просто вариационное уравнение

$$\delta S = 0 \quad , \quad (8)$$

где

$$S = \int \sqrt{2(U+h)} dl \quad , \quad (9)$$

а l – длина дуги. Интегрирование (9) по всей области изменения постоянной энергии h на плоскости дает

$$\Pi = \iint \sqrt{2(U+h)} dl dh \quad . \quad (10)$$

Полагая в (10)

$$dldh = \|\nabla h\| d\sigma \quad , \quad (11)$$

будем иметь

$$\Pi = \iint \sqrt{2(U+h)} \|\nabla h\| d\sigma \quad , \quad (12)$$

где $d\sigma$ - элемент площади плоскости.

Таким образом, принцип Мопертюи сводится к уравнению

$$d\Pi = 0 \quad . \quad (13)$$

Рассмотрим вариацию функции $\Phi(x, y, h, h_x, h_y)$

$$\delta \iint \Phi(x, y, h, h_x, h_y) dx dy = \iint \delta h \left[\frac{\partial \Phi}{\partial h} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial h_x} \right) - \frac{d}{dy} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial h_y} \right) \right] dx dy \quad , \quad (14)$$

где

$$\Phi = \|\nabla h\| \sqrt{U+h} \quad . \quad (15)$$

Уравнение Эйлера (14) для функционала (12) приводится к виду

$$\nabla U \frac{\nabla h}{\|\nabla h\|} + 2(U+h) \operatorname{div} \left(\frac{\nabla h}{\|\nabla h\|} \right) = 0 \quad . \quad (16)$$

Это уравнение выражает собой необходимое и достаточное условие движения частицы по некоторой плоскости траектории $f(\mu)$ с энергией $h(\mu)$ под действием консервативных сил с потенциалом $U(\mu)$.

Для семейства траекторий

$$f(\mu) = u \quad , \quad (17)$$

где u – параметр, в случае

$$f(\mu) = g(h(\mu)) \quad (18)$$

уравнение (16) приводится к виду [15]

$$\nabla U \nabla f + 2(U+h) \|\nabla f\| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} \right) = 0 \quad , \quad (19)$$

где $\|\nabla f\| = \sqrt{(\nabla f)^2}$, а знак ∇ означает градиент по координатам.

Уравнение (19), в координатах x, y имеет вид уравнения (2). В этой связи, уравнение Себехея выражает собой необходимое и достаточное условие, которому должен удовлетворять искомый потенциал $U = U(x, y)$.

3. Исследована эквивалентность уравнения (2) формулам Дайнелли-Уиттекера в случае консервативного поля [10, 12].

Если записать компоненты скорости как

$$\dot{x} = +H(x, y) f_y \quad (20)$$

$$\dot{y} = -H(x, y) f_x \quad ,$$

то формулы Дайнелли-Уиттекера принимают вид

$$\ddot{x} = \frac{1}{2} (H^2 f_y^2)_x - \frac{1}{2} \frac{f_x}{f_y} (H^2 f_y^2)_y \quad , \quad (21)$$

$$\ddot{y} = \frac{1}{2} (H^2 f_x^2)_y - \frac{1}{2} \frac{f_y}{f_x} (H^2 f_x^2)_x .$$

Интеграл энергии (3) запишется в виде

$$U(x, y) = \frac{1}{2} H^2 (f_x^2 + f_y^2) - h(u) , \quad (22)$$

а компоненты силового поля (21)

$$\ddot{x} = U_x - \frac{1}{2f_y} \left[f_x (H^2 f_y^2)_y + f_y (H^2 f_x^2)_x - 2h_u f_x f_y \right] \quad (23)$$

$$\ddot{y} = U_y - \frac{1}{2f_x} \left[f_x (H^2 f_y^2)_y + f_y (H^2 f_x^2)_x - 2h_u f_x f_y \right]$$

В уравнениях (23) величины U_x и U_y являются градиентом потенциала $U = U(x, y)$ в том случае, когда

$$f_x (H^2 f_y^2)_y + f_y (H^2 f_x^2)_x - 2h_u f_x f_y = 0 . \quad (24)$$

В работе [10], исключив в уравнении (24) величину H^2 при помощи интеграла энергии (22), получено уравнение (2).

4. В терминах векторного поля существует также нижеследующая интерпретация уравнения Себекея [23]. Если рассматриваемое изоэнергетическое семейство орбит (3) ортогонально к какой-либо поверхности, то уравнение (2) эквивалентно утверждению об отсутствии вихря поля скоростей, составляющему главный результат теоремы Якоби и определяемому уравнением

$$\text{rot } \vec{v} = 0 . \quad (25)$$

Этот результат получен посредством ввода ортогональных векторов $\vec{\tau}$ и $\vec{\beta}$, где $\vec{\tau}$ лежит в плоскости xu , а вектор $\vec{\beta}$ ортогонален к этой плоскости, а вектор скорости запишется в виде

$$\vec{v} = \sqrt{2(U+h)} \vec{\tau} , \quad (26)$$

тогда

$$\text{rot } \vec{v} = \sqrt{2(U+h)} \text{rot } \vec{\tau} + \frac{\text{grad } \vec{U} \times \vec{\tau}}{\sqrt{2(U+h)}} , \quad (27)$$

где

$$\text{rot } \vec{\tau} = \frac{\vec{\beta}}{\rho} , \quad (28)$$

а ρ – радиус кривизны семейства орбит (3).

Уравнение (27) принимает вид

$$2(U+h) \frac{1}{\rho} + \frac{\text{grad } \vec{U} \cdot \text{grad } f}{\|\text{grad } f\|} = 0 , \quad (29)$$

которое в координатах x, y примет вид уравнения (2).

5. Для монопараметрического семейства орбит (3), порождаемых плоским потенциалом $U(x, y)$, введено понятие семейства граничных кривых (СГК) [7]. При этом все члены семейства орбит расположены в допустимой области плоскости xu , определяемой соответствующим СГК с общей энергией $E = E(c)$, изменяющейся вдоль семейства. СГК также найдены для двухпараметрического семейства орбит. Этот подход расширен на неконсервативные автономные

системы с двумя степенями свободы и получены формулы для компонент силового поля $X(x, y)$, $Y(x, y)$, создающие заданное семейство (3), лежащих в заданной, открытой или закрытой области $B(x, y) \geq 0$ плоскости xy [8].

6. Используя метод ортогональных координат Жуковского, исследовано определение потенциалов, имеющих два семейства ортогональных траекторий [26] и доказано в совместимых случаях существование и единственность решения с точностью до постоянного фактора и введено понятие «изотермического» набора кривых. В качестве примера рассмотрен набор геометрически подобных конических кривых и ортогональных траекторий.

7. Исследована обратная задача динамики для систем с нестационарным Лагранжианом [19]. Получено уравнение для нестационарного пространственно-симметричного потенциала, порождающего заданное семейство эволюционирующих во времени орбит. Изучена также задача восстановления нестационарного пространственно-симметричного регулярного потенциала гравитирующей системы по семейству эволюционирующих орбит, используемых в динамике стационарных звездных систем [20].

8. Исследована обратная задача небесной механики для прямолинейных орбит в Гамильтоновом силовом поле [1], а также рассмотрены однородные потенциалы и их суперпозиции, включая потенциал Энона-Хэйлса, который имеет важное значение при изучении моделей движения звезд в цилиндрически симметричном автономном потенциальном поле, в частности, методом сечения Пуанкаре [14].

Потенциал Энона-Хэйлса имеет вид

$$U(x, y) = \frac{1}{2} \left(x^2 + y^2 + 2x^2 y - \frac{2}{3} y^3 \right), \quad (30)$$

для которого, используя численные методы, получены фазовые траектории [14]. В этой связи представляется перспективным исследовать систему Энона-Хэйлса в рамках обратной задачи в одной из следующих работ.

Таким образом, в исследовании обратной задачи небесной механики отправной точкой стало уравнение Себехей (2), которое имеет ряд важных вышеприведенных свойств. При этом область применения обратной задачи небесной механики весьма разнообразна, в том числе при решении актуальных задач, связанных с необходимостью восстановления нестационарного потенциала по заданному семейству эволюционирующих во времени орбит в различных динамических системах.

Статья выполнена в рамках Проекта № AP09259383 «Эллиптические галактики: структура, динамика и источники гравитационных волн» Министерства образования и науки РК.

УДК 521.1

Г.Т. Омарова, Ж.Т. Омарова, Ч.Е. Омаров

В.Г. Фесенков атындағы Астрофизика институты, Алматы, Қазақстан

E-mail gulnara.omarova@gmail.com

АСПАН МЕХАНИКАСЫНЫҢ КЕРІ ЕСЕПТЕРІНЕ

Аннотация. Бұл жұмыс аспан механикасының кері мәселесіне арналған, оны зерттеу ғарыш кеңістігін қарқынды зерттеуге және Күн жүйесі планеталарының, басқа аспан денелері мен басқа гравитациялық және басқа да күш өрістерін зерттеуге байланысты өзекті мәселе болды. Аспан механикасының кері есебі дегеніміз - берілген жиынтықты немесе орбиталар тобын тудыратын потенциалды анықтау мәселесі.

Автономды консервативті жүйенің потенциалы үшін Себехей теңдеуі, бірінші ретті сызықтық дербес дифференциалдық теңдеу, екі еркіндік дәрежесі бар, жазықтық орбиталарының берілген бір параметрлі отбасын тудырады. Бұл теңдеу аспан механикасы саласындағы зерттеулердің тұтас сериясын тудырды.

Себехей теңдеуін және оның әр түрлі аналогтарын қорытуға арналған құжаттардың тұтас сериясы бар. Бірқатар зерттеулерде Себехей теңдеуінің қасиеттері мен түсіндірмелері аналитикалық механика тұрғысынан келтірілген, олардың кейбіреулері осы мақалада келтірілген.

Кеңейтілген шолу аспан механикасының кері мәселесін әрі қарай зерттеудің маңыздылығын және оны әртүрлі гравитациялық жүйелер динамикасының өзекті мәселелерін зерттеуге қолдану маңыздылығын көрсету мақсатында жасалған.

Түйін сөздер: Аспан механикасы- Кері проблемасы – Себехей теңдеуі

UDK 521.1

G.T. Omarova, Zh.T. Omarova, Ch.T. Omarov
Fesenkov Astrophysical Institute, Almaty, Kazakhstan
E-mail gulnara.omarova@gmail.com

TO THE INVERSE PROBLEM OF CELESTIAL MECHANICS

Abstract. This work is devoted to the inverse problem of celestial mechanics, the study of which has become relevant in connection with the intensive exploration of outer space and the study of the gravitational and other force fields of the planets of the Solar system, other celestial bodies and gravitational systems. The inverse problem of celestial mechanics is the problem of determining the potential that generates a given set, or family of orbits.

Szebehely equation is a first - order linear partial differential equation for the potential of an autonomous conservative system with two degrees of freedom that generates a given one-parameter family of plane orbits, is widely known. This equation gave rise to a whole series of studies in the field of celestial mechanics.

There is a number of papers devoted to the generalization of the Szebehely equation and its various analogues. A number of studies have presented properties and interpretations of the Szebehely equation from the point of view of analytical mechanics, some of which are summarized in this article.

The extended review is made in order to emphasize the importance of further research of the inverse problem of celestial mechanics and its application to the study of actual problems of the dynamics of various gravitational systems.

Key words: Celestial Mechanics, Inverse problem, Szebehely's equation

Information about authors:

Omarova G.T. , PhD in Physics and Mathematics, Senior Scientific Researcher, Fesenkov Astrophysical Institute, Almaty, Kazakhstan, <http://orcid.org/0000-0003-4782-8545>, Gulnara.omarova@gmail.com

Omarova Zh.T. Engineer, DAAD Fellowship in Max Plank Institute (Heidelberg, 2005), Fesenkov Astrophysical Institute, Almaty, Kazakhstan, <https://orcid.org/0000-0002-4825-0178>, juldisomarova@gmail.com

Omarov Ch.T., PhD in Physics and Mathematics, Director, Fesenkov Astrophysical Institute, Almaty, Kazakhstan, <https://orcid.org/0000-0002-1672-894X>, chingis.omarov@aphy.kz

ЛИТЕРАТУРА

[1] Anisiu M.C., Blaga C & Bozis G. Special families of orbits in the Direct Problem of Dynamics//Celest. Mech.2004, Vol.88, P. 245-257.

[2] Borgero F. , Melis A. On Szebehely's problem for holonomic systems involving generalized potential functions//Celest. Mech. 1990 Vol.49.N.3 .P.273.

[3] Bozis G. Generalization of Szebehely's equation//Celest.Mech. 1983.Vol.29.N.4. P.329-334.

[4] Bozis G. Determination of autonomous three dimensional force field from a two-parameter family of orbits//Celest.Mech.1983.Vol.31.N.1.P.43-51.

- [5] Bozis G. Inverse problem with two-parametric families of planar orbits//*Celest.Mech.* 1983.Vol.31.N.2.P.129-142.
- [6] Bozis G. Szebehely's inverse problem for finite symmetrical material concentrations//*Astron.and Astrophys.* 1984. Vol.134. N.2. P.360-364.
- [7] Bozis G. , Ichiarogou S. Boundary curves for families of planar orbits// *Celest. Mech.* 1994. Vol.57. N.4. P. 371-385.
- [8] Bozis G. Family boundary curves for autonomous dynamical system//*Celest.Mech.* 1994. Vol.60. P.161-172.
- [9] Brouke R. On the construction of a Dynamical system from a preassigned family of solutions//*Int.J.Engin.Sci.*1979.Vol.17.N.11.P.1151-1162.
- [10] Brouke R , Lass H. On Szebehely/z equation for the Potential of a prescribed family of orbits//*Celest.Mech.* 1977 Vol.16, N.2, P. 215-225.
- [11] Erdi B. A generalization of Szebehely's equation for three dimensions//*Celest.Mech.* 1982. Vol.28. N.1-2. P.209-218.
- [12] Gonzales-Gascon F., Gonzales-Lopez A., Pascal-Broncano P. On Szebehely's equation and its connection with Dainelly's –Whittaker's equations//*Celest.Mech.* 1984, Vol.33, N 1, P.85-97.
- [13] Howard J.E., Meiss J.D. Straight line orbits in Hamiltonian flows // *Celest.Mech.* 2009. Vol.105
- [14] Малков Е.А., Момынов С.Б. Фазовые портреты потенциала Хенона-Хейлеса // *Известия Национальной Академии наук Республики Казахстан.* 2018. Том 5, N 321. С.5-9.
- [15] Melis A., Piras B. An extension of Szebehely's problem to holonomic systems //*Celest.Mech.* 1984. Vol.32. N.1 P.87-92.
- [16] Melis A., Piras B. On generalization of Szebehely's problem//*Facolta di scienze dell'Universita di Cagliari.* 1982. Vol. LII. Fasc.1.
- [17] Molnar S. Application of Szebehely's equation //*Celest. Mech.* 1981.Vol.29, N.1,P.81-88.
- [18] Morrison F. Modification of an equation of Szebehely// *Celest Mech.* 1977.Vol.16 N.2.P.227-228.
- [19] Omarov T.B., Omarova G.T.. The inverse problem of dynamics for systems with non-stationary Lagrangian //*Celest.Mech.* 1998. Vol.69. N.4. P.347-355.
- [20] Omarova G.T., Omarov T.B. Reconstruction of A Non-Stationary Potential of Gravitating System on Given Evolving Orbits//*Celest.Mech.* 2003. Vol.85. P.25-35.
- [21] Омаров Ч.Т., Омарова Г.Т. Нелинейные динамические модели небесной механики и звездной динамики// LAP Lambert Academic Publishing, 2012.
- [22] Puel F.R. Intrinsic Formulation of Szebehely's equation//*Celest. Mech.* 1984.Vol.32.N.3.P.209-216.
- [23] Puel F.R. Equation de Szebehely et principes variationnes//*Celest.Mech.* 1984. 32 N.4. P. 349-353.
- [24] Puel F.R. Explicit solutions of the three-dimensional inverse problem of dynamics, using the Frenet reference frame// *Celest. Mech.* 1988. Vol. 53(3),. P. 207–218.
- [25] Puel F.R. Relation entre l'equation de Szebehely du problem inverse de la meccanique et la theorie de Hamilton-Jakobi//*Celest.Mech.* 1989.Vol.46.N.1.P.31-34.
- [26] Puel F.R Potentials having two orthogonal families of curves as trajectories// *Celest.Mech.* 1999. Vol.74. P.199-210.
- [27] Szebehely V. On the determination of the potential by satellite observations//*Rend.Fac.Sci. Univ.Cagliari.* 1974.Vol.44. Suppl.31.

REFERENCES

- [1] Anisiu M.C., Blaga C & Bozis G. Special families of orbits in the Direct Problem of Dynamics//*Celest. Mech.*2004, Vol.88, P. 245-257.
- [2] Borgero F. , Melis A. On Szebehely's problem for holonomic systems involving generalized potential functions//*Celest. Mech.* 1990 Vol.49.N.3 .P.273.

- [3] Bozis G. Generalization of Szebehely's equation//*Celest.Mech.* 1983.Vol.29.N.4. P.329-334.
- [4] Bozis G. Determination of autonomous three dimensional force field from a two-parameter family of orbits//*Celest.Mech.*1983.Vol.31.N.1.P.43-51.
- [5] Bozis G. Inverse problem with two-parametric families of planar orbits//*Celest.Mech.* 1983.Vol.31.N.2.P.129-142.
- [6] Bozis G. Szebehely's inverse problem for finite symmetrical material concentrations//*Astron.and Astrophys.* 1984. Vol.134. N.2. P.360-364.
- [7] Bozis G. , Ichiarogou S. Boundary curves for families of planar orbits// *Celest. Mech.* 1994. Vol.57. N.4. P. 371-385.
- [8] Bozis G. Family boundary curves for autonomous dynamical system//*Celest.Mech.* 1994. Vol.60. P.161-172.
- [9] Brouke R. On the construction of a Dynamical system from a preassigned family of solutions//*Int.J.Engin.Sci.*1979.Vol.17.N.11.P.1151-1162.
- [10] Brouke R , Lass H. On Szebehely/z equation for the Potential of a prescribed family of orbits//*Celest.Mech.* 1977 Vol.16, N.2, P. 215-225.
- [11] Erdi B. A generalization of Szebehely's equation for three dimensions//*Celest.Mech.* 1982. Vol.28. N.1-2. P.209-218.
- [12] Gonzales-Gascon F., Gonzales-Lopez A., Pascal-Broncano P. On Szebehely's equation and its connection with Dainelly's –Whittaker's equations//*Celest.Mech.* 1984, Vol.33, N 1, P.85-97.
- [13] Howard J.E., Meiss J.D. Straight line orbits in Hamiltonian flows // *Celest.Mech.* 2009. Vol.105
- [14] Malkov E.A., Momynov S.B. Phase Portraits of the Henon-Heiles Potential// *News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.* 2018, Vol.5, N.321. P.5-9.
- [15] Melis A., Piras B. An extension of Szebehely's problem to holonomic systems //*Celest.Mech.* 1984. Vol.32. N.1 P.87-92.
- [16] Melis A., Piras B. On generalization of Szebehely's problem//*Facolta di scienze dell'Universita di Cagliari.* 1982. Vol. LII. Fasc.1.
- [17] Molnar S. Application of Szebehely's equation //*Celest. Mech.* 1981.Vol.29, N.1,P.81-88.
- [18] Morrison F. Modification of an equation of Szebehely// *Celest Mech.* 1977.Vol.16 N.2.P.227-228.
- [19] Omarov T.B., Omarova G.T.. The inverse problem of dynamics for systems with non-stationary Lagrangian //*Celest.Mech.* 1998. Vol.69. N.4. P.347-355.
- [20] Omarova G.T., Omarov T.B. Reconstruction of A Non-Stationary Potential of Gravitating System on Given Evolving Orbits//*Celest.Mech.* 2003. Vol.85. P.25-35.
- [21] Omarov Ch.T., Omarova G.T. Non-linear dynamical models of celestial mechanical and stellar systems// LAP Lambert Academic Publishing, 2012.
- [22] Puel F.R. Intrinsic Formulation of Szebehely's equation//*Celest. Mech.* 1984.Vol.32.N.3.P.209-216.
- [23] Puel F.R. Equation de Szebehely et principes variationnes//*Celest.Mech.* 1984. 32 N.4. P. 349-353.
- [24] Puel F.R. Explicit solutions of the three-dimensional inverse problem of dynamics, using the Frenet reference frame// *Celest. Mech.* 1988. Vol. 53(3),. P. 207–218.
- [25] Puel F.R. Relation entre l'equation de Szebehely du problem inverse de la meccanique et la theorie de Hamilton-Jakobi//*Celest.Mech.* 1989.Vol.46.N.1.P.31-34.
- [26] Puel F.R Potentials having two orthogonal families of curves as trajectories// *Celest.Mech.* 1999. Vol.74. P.199-210.
- [27] Szebehely V. On the determination of the potential by satellite observations//*Rend.Fac.Sci. Univ.Cagliari.* 1974.Vol.44. Suppl.31.

**Publication Ethics and Publication Malpractice
in the journals of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan**

For information on Ethics in publishing and Ethical guidelines for journal publication see <http://www.elsevier.com/publishingethics> and <http://www.elsevier.com/journal-authors/ethics>.

Submission of an article to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan implies that the described work has not been published previously (except in the form of an abstract or as part of a published lecture or academic thesis or as an electronic preprint, see <http://www.elsevier.com/postingpolicy>), that it is not under consideration for publication elsewhere, that its publication is approved by all authors and tacitly or explicitly by the responsible authorities where the work was carried out, and that, if accepted, it will not be published elsewhere in the same form, in English or in any other language, including electronically without the written consent of the copyright-holder. In particular, translations into English of papers already published in another language are not accepted.

No other forms of scientific misconduct are allowed, such as plagiarism, falsification, fraudulent data, incorrect interpretation of other works, incorrect citations, etc. The National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan follows the Code of Conduct of the Committee on Publication Ethics (COPE), and follows the COPE Flowcharts for Resolving Cases of Suspected Misconduct (http://publicationethics.org/files/u2/New_Code.pdf). To verify originality, your article may be checked by the Cross Check originality detection service <http://www.elsevier.com/editors/plagdetect>.

The authors are obliged to participate in peer review process and be ready to provide corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. All authors of a paper should have significantly contributed to the research.

The reviewers should provide objective judgments and should point out relevant published works which are not yet cited. Reviewed articles should be treated confidentially. The reviewers will be chosen in such a way that there is no conflict of interests with respect to the research, the authors and/or the research funders.

The editors have complete responsibility and authority to reject or accept a paper, and they will only accept a paper when reasonably certain. They will preserve anonymity of reviewers and promote publication of corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. The acceptance of a paper automatically implies the copyright transfer to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.

The Editorial Board of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan will monitor and safeguard publishing ethics.

(Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайтах:

[www:nauka-nanrk.kz](http://www.nauka-nanrk.kz)

<http://physics-mathematics.kz/index.php/en/archive>

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Редакторы: *М.С. Ахметова, Р.Ж. Мрзабаева, Д.С. Аленов*
Верстка на компьютере *В.С. Зикирбаева*

Подписано в печать 12.06.2021.
Формат 60x881/8. Бумага офсетная. Печать – ризограф.
11 п.л. Тираж 300. Заказ 3.