

ISSN 2518-1726 (Online),
ISSN 1991-346X (Print)

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ
Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университетінің

Х А Б А Р Л А Р Ы

ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН
Қазақстан Республикасының Ғылым
Академиясының Әл-Фараби
атаулы ұлттық университетінің

NEWS

OF THE ACADEMY OF SCIENCES
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
Al-Farabi Kazakh
National University

SERIES
PHYSICO-MATHEMATICAL

3 (337)

MAY – JUNE 2021

PUBLISHED SINCE JANUARY 1963

PUBLISHED 6 TIMES A YEAR

ALMATY, NAS RK

NAS RK is pleased to announce that News of NAS RK. Series physico-mathematical journal has been accepted for indexing in the Emerging Sources Citation Index, a new edition of Web of Science. Content in this index is under consideration by Clarivate Analytics to be accepted in the Science Citation Index Expanded, the Social Sciences Citation Index, and the Arts & Humanities Citation Index. The quality and depth of content Web of Science offers to researchers, authors, publishers, and institutions sets it apart from other research databases. The inclusion of News of NAS RK. Series of chemistry and technologies in the Emerging Sources Citation Index demonstrates our dedication to providing the most relevant and influential content of chemical sciences to our community.

Қазақстан Республикасы Ұлттық ғылым академиясы «ҚР ҰҒА Хабарлары. Физикалық-математикалық сериясы» ғылыми журналының Web of Science-тің жаңаланған нұсқасы Emerging Sources Citation Index-те индекстелуге қабылданғанын хабарлайды. Бұл индекстелу барысында Clarivate Analytics компаниясы журналды одан әрі the Science Citation Index Expanded, the Social Sciences Citation Index және the Arts & Humanities Citation Index-ке қабылдау мәселесін қарастыруда. Web of Science зерттеушілер, авторлар, баспашылар мен мекемелерге контент тереңдігі мен сапасын ұсынады. ҚР ҰҒА Хабарлары. Химия және технология сериясы Emerging Sources Citation Index-ке енуі біздің қоғамдастық үшін ең өзекті және беделді химиялық ғылымдар бойынша контентке адалдығымызды білдіреді.

НАНПК сообщает, что научный журнал «Известия НАНПК. Серия физико-математическая» был принят для индексирования в Emerging Sources Citation Index, обновленной версии Web of Science. Содержание в этом индексировании находится в стадии рассмотрения компанией Clarivate Analytics для дальнейшего принятия журнала в the Science Citation Index Expanded, the Social Sciences Citation Index и the Arts & Humanities Citation Index. Web of Science предлагает качество и глубину контента для исследователей, авторов, издателей и учреждений. Включение Известия НАНПК в Emerging Sources Citation Index демонстрирует нашу приверженность к наиболее актуальному и влиятельному контенту по химическим наукам для нашего сообщества.

Бас редактор:

МҰТАНОВ Ғалымқайыр Мұтанұлы, техника ғылымдарының докторы, профессор, ҚР ҰҒА академигі, ҚР БҒМ ҒК «Ақпараттық және есептеу технологиялары институты» бас директорының м.а. (Алматы, Қазақстан) Н-5

Редакция алқасы:

ҚАЛИМОЛДАЕВ Мақсат Нұрәділұлы (бас редактордың орынбасары), физика-математика ғылымдарының докторы, профессор, ҚР ҰҒА академигі, ҚР БҒМ ҒК «Ақпараттық және есептеу технологиялары институты» бас директорының кеңесшісі, зертхана меңгерушісі (Алматы, Қазақстан) Н-7

БАЙГУНЧЕКОВ Жұмаділ Жаңабайұлы (бас редактордың орынбасары), техника ғылымдарының докторы, профессор, ҚР ҰҒА академигі, Кибернетика және ақпараттық технологиялар институты, Сатпаев университетінің Қолданбалы механика және инженерлік графика кафедрасы, (Алматы, Қазақстан) Н-3

ВОЙЧИК Вальдемар, техника ғылымдарының докторы (физика), Люблин технологиялық университетінің профессоры (Люблин, Польша) Н=23

БОШКАЕВ Қуантай Авғазыұлы, Ph.D. Теориялық және ядролық физика кафедрасының доценті, әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті (Алматы, Қазақстан) Н-10

QUEVEDO Hernando, профессор, Ядролық ғылымдар институты (Мехико, Мексика) Н-28

ЖҮСПОВ Марат Абжанұлы, физика-математика ғылымдарының докторы, теориялық және ядролық физика кафедрасының профессоры, әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті (Алматы, Қазақстан) Н-7

КОВАЛЕВ Александр Михайлович, физика-математика ғылымдарының докторы, Украина ҰҒА академигі, Қолданбалы математика және механика институты (Донецк, Украина) Н-5

МИХАЛЕВИЧ Александр Александрович, техника ғылымдарының докторы, профессор, Беларусь ҰҒА академигі (Минск, Беларусь) Н-2

РАМАЗАНОВ Тілекқабұл Сәбитұлы, физика-математика ғылымдарының докторы, профессор, ҚР ҰҒА академигі, әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университетінің ғылыми-инновациялық қызмет жөніндегі проректоры, (Алматы, Қазақстан) Н-26

ТАКИБАЕВ Нұрғали Жабағаұлы, физика-математика ғылымдарының докторы, профессор, ҚР ҰҒА академигі, әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті (Алматы, Қазақстан) Н-5

ТИГИНЯНУ Ион Михайлович, физика-математика ғылымдарының докторы, академик, Молдова Ғылым Академиясының президенті, Молдова техникалық университеті (Кишинев, Молдова) Н-42

ХАРИН Станислав Николаевич, физика-математика ғылымдарының докторы, профессор, ҚР ҰҒА академигі, Қазақстан-Британ техникалық университеті (Алматы, Қазақстан) Н-10

ДАВЛЕТОВ Асқар Ербуланович, физика-математика ғылымдарының докторы, профессор, әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті (Алматы, Қазақстан) Н – 12

КАЛАНДРА Пьетро, Ph.D (физика), Наноқұрылымды материалдарды зерттеу институтының профессоры (Рим, Италия) Н = 26

«ҚР ҰҒА Хабарлары. Физика-математикалық сериясы».

ISSN 2518-1726 (Online),

ISSN 2224-346X (Print)

Меншіктенуші: «Қазақстан Республикасының Ұлттық ғылым академиясы» РҚБ (Алматы қ.).

Қазақстан Республикасының Ақпарат және қоғамдық даму министрлігінің Ақпарат комитетінде 14.02.2018 ж. берілген № 16906-Ж мерзімдік басылым тіркеуіне қойылу туралы куәлік.

Тақырыптық бағыты: *физика-математика ғылымдары және ақпараттық техникалар саласындағы басым ғылыми зерттеулерді жариялау.*

Мерзімділігі: жылына 6 рет.

Тиражы: 300

Редакцияның мекен-жайы: 050010, Алматы қ., Шевченко көш., 28, 219 бөл., тел.: 272-13-19, 272-13-18
<http://www.physico-mathematical.kz/index.php/en/>

© Қазақстан Республикасының Ұлттық ғылым академиясы, 2021

Типографияның мекен-жайы: «Аруна» ЖК, Алматы қ., Муратбаева көш., 75.

Главный редактор:

МУТАНОВ Галимкаир Мутанович, доктор технических наук, профессор, академик НАН РК, и.о. генерального директора «Института информационных и вычислительных технологий» КН МОН РК (Алматы, Казахстан) Н - 5

Редакционная коллегия:

КАЛИМОЛДАЕВ Максат Нурадилович, (заместитель главного редактора), доктор физико-математических наук, профессор, академик НАН РК, советник генерального директора «Института информационных и вычислительных технологий» КН МОН РК, заведующий лабораторией (Алматы, Казахстан) Н - 7

БАЙГУНЧЕКОВ Жумадил Жанабаевич, (заместитель главного редактора), доктор технических наук, профессор, академик НАН РК, Институт кибернетики и информационных технологий, кафедра прикладной механики и инженерной графики, университет Сатпаева (Алматы, Казахстан) Н - 3

ВОЙЧИК Вальдемар, доктор технических наук (физ.-мат.), профессор Люблинского технологического университета (Люблин, Польша) Н=23

БОШКАЕВ Куантай Авгазыевич, доктор Ph.D, преподаватель, доцент кафедры теоретической и ядерной физики, Казахский национальный университет им. аль-Фараби (Алматы, Казахстан) Н - 10

QUEVEDO Nemando, профессор, Национальный автономный университет Мексики (UNAM), Институт ядерных наук (Мехико, Мексика) Н - 28

ЖУСУПОВ Марат Абжанович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической и ядерной физики, Казахский национальный университет им. аль-Фараби (Алматы, Казахстан) Н - 7

КОВАЛЕВ Александр Михайлович, доктор физико-математических наук, академик НАН Украины, Институт прикладной математики и механики (Донецк, Украина) Н - 5

МИХАЛЕВИЧ Александр Александрович, доктор технических наук, профессор, академик НАН Беларуси (Минск, Беларусь) Н - 2

РАМАЗАНОВ Тлеккабул Сабитович, доктор физико-математических наук, профессор, академик НАН РК, проректор по научно-инновационной деятельности, Казахский национальный университет им. аль-Фараби (Алматы, Казахстан) Н – 26

ТАКИБАЕВ Нургали Жабагаевич, доктор физико-математических наук, профессор, академик НАН РК, Казахский национальный университет им. аль-Фараби (Алматы, Казахстан) Н - 5

ТИГИНЯНУ Ион Михайлович, доктор физико-математических наук, академик, президент Академии наук Молдовы, Технический университет Молдовы (Кишинев, Молдова) Н - 42

ХАРИН Станислав Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор, академик НАН РК, Казахстанско-Британский технический университет (Алматы, Казахстан) Н – 10

ДАВЛЕТОВ Аскар Ербуланович, доктор физико-математических наук, профессор, Казахский национальный университет им. аль-Фараби (Алматы, Казахстан) Н – 12

КАЛАНДРА Пьетро, доктор философии (Ph.D, физика), профессор Института по изучению наноструктурированных материалов (Рим, Италия) Н = 26

«Известия НАН РК. Серия физика-математическая».

ISSN 2518-1726 (Online),

ISSN 2224-346X (Print)

Собственник: Республиканское общественное объединение «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы).

Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации Министерства информации и общественного развития Республики Казахстан № 16906-Ж выданное 14.02.2018 г.

Тематическая направленность: *публикация статей по геологии и техническим наукам.*

Периодичность: 6 раз в год.

Тираж: 300

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, оф. 219, тел.: 272-13-19, 272-13-18

<http://www.physico-mathematical.kz/index.php/en/>

© Национальная академия наук Республики Казахстан, 2021

Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75.

Editor in chief

MUTANOV Galimkair Mutanovich, doctor of technical Sciences, Professor, Academician of NAS RK, acting director of the Institute of Information and Computing Technologies of SC MES RK (Almaty, Kazakhstan) H - 5

Editorial board:

KALIMOLDAYEV Maksat Nuradilovich (Deputy Editor-in-Chief), doctor in Physics and Mathematics, Professor, Academician of NAS RK, Advisor to the General Director of the Institute of Information and Computing Technologies of SC MES RK, Head of the Laboratory (Almaty, Kazakhstan) H - 7

BAYGUNCHEKOV Zhumadil Zhanabayevich, (Deputy Editor-in-Chief), doctor of Technical Sciences, Professor, Academician of NAS RK, Institute of Cybernetics and Information Technologies, Department of Applied Mechanics and Engineering Graphics, Satbayev University (Almaty, Kazakhstan) H - 3

WOICIK Waldemar, Doctor of Phys.-Math. Sciences, Professor, Lublin University of Technology (Lublin, Poland) H=23

BOSHKAYEV Kuantai Avgazievich, PhD, Lecturer, Associate Professor of the Department of Theoretical and Nuclear Physics, Al-Farabi Kazakh National University (Almaty, Kazakhstan) H - 10

QUEVEDO Hemando, Professor, National Autonomous University of Mexico (UNAM), Institute of Nuclear Sciences (Mexico City, Mexico) H - 28

ZHUSSUPOV Marat Abzhanovich, Doctor in Physics and Mathematics, Professor of the Department of Theoretical and Nuclear Physics, al-Farabi Kazakh National University (Almaty, Kazakhstan) H - 7

KOVALEV Alexander Mikhailovich, Doctor in Physics and Mathematics, Academician of NAS of Ukraine, Director of the State Institution «Institute of Applied Mathematics and Mechanics» DPR (Donetsk, Ukraine) H - 5

MIKHALEVICH Alexander Alexandrovich, Doctor of Technical Sciences, Professor, Academician of NAS of Belarus (Minsk, Belarus) H - 2

RAMAZANOV Tlekkabul Sabitovich, Doctor in Physics and Mathematics, Professor, Academician of NAS RK, Vice-Rector for Scientific and Innovative Activity, al-Farabi Kazakh National University (Almaty, Kazakhstan) H – 26

TAKIBAYEV Nurgali Zhabagaevich, Doctor in Physics and Mathematics, Professor, Academician of NAS RK, al-Farabi Kazakh National University (Almaty, Kazakhstan) H - 5

TIGHINEANU Ion Mikhailovich, Doctor in Physics and Mathematics, Academician, Full Member of the Academy of Sciences of Moldova, President of the AS of Moldova, Technical University of Moldova (Chisinau, Moldova) H - 42

KHARIN Stanislav Nikolayevich, Doctor in Physics and Mathematics, Professor, Academician of NAS RK, Kazakh-British Technical University (Almaty, Kazakhstan) H – 10

DAVLETOV Askar Erbulanovich, Doctor in Physics and Mathematics, Professor, al-Farabi Kazakh National University (Almaty, Kazakhstan) H - 12

CALANDRA Pietro, PhD in Physics, Professor at the Institute of Nanostructured Materials (Monterotondo Station Rome, Italy)

News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.

Physical-mathematical series.

ISSN 2518-1726 (Online),

ISSN 2224-346X (Print)

Owner: RPA «National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan» (Almaty).

The certificate of registration of a periodical printed publication in the Committee of information of the Ministry of Information and Social Development of the Republic of Kazakhstan No. 16906-Ж, issued 14.02.2018

Thematic scope: *publication of papers on geology and technical sciences.*

Periodicity: 6 times a year.

Circulation: 300

Editorial address: 28, Shevchenko str., of. 219, Almaty, 050010, tel. 272-13-19, 272-13-18,
<http://www.physico-mathematical.kz/index.php/en/>

© National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, 2021

Address of printing house: ST «Aruna», 75, Muratbayev str, Almaty.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 3, Number 337 (2021), 26 – 32

<https://doi.org/10.32014/2020.2518-1726.43>

UDC 519.6

IRSTI 27.41.19

Zh. Baishemirov^{1,2,3}, S. Kasenov^{1,4}, J. Askerbekova⁴, A. Beibitkyzy⁴

¹Abai Kazakh National Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan

²RSE Institute of Information and Computational Technology CS MES RK, Almaty, Kazakhstan

³Kazakh-British Technical University, Almaty, Kazakhstan

⁴Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

E-mail: zbai.kz@gmail.com

**NUMERICAL SOLUTION OF THE INVERSE PROBLEM
FOR THE ACOUSTIC EQUATION**

Abstract. This article presents the continuation problem for one-dimensional equations of acoustics. Currently, one of the most difficult areas of research in applied mathematics is the reverse calculation of wave propagation, which has an important area of application in geophysics and medicine. The propagation of an acoustic wave in an inhomogeneous medium and the measurement of the return of some part of the sound by special devices leads to the calculation of the initial-boundary for the partial derivative equation. Most of these problems are ill-posed. One such ill-posed problem is the continuation problem. The continuation problem is based on finding the value of the desired function in the rest of the boundary using additional data in a certain part of the boundary. In this regard, we present the continuation problems to the inverse boundary value problem. There are many methods for solving general boundary value inverse problems, for example, the gradient method. In this paper, we construct a finite-difference scheme for this inverse problem and find an unknown function on the characteristic from this difference equation by inverting the difference scheme. The effectiveness of this method lies in a simple and accurate fast calculation algorithm. To test the correctness of any method or algorithm, we first solve a direct problem by specifying an exact function. Then we find additional information and solve the inverse problem. Let us compare the inverse problem with solving a problem with an exact function. However, in practice it often happens that additional information is provided with certain errors. Therefore, the correctness of the algorithm was verified by adding different error levels to the additional information. Quantitative data and graphs of these quantitative results are compared.

Key words: Acoustics equation, continuation problem, method inverse transformation difference schemes, algorithm for solving the inverse problem.

Introduction. Currently, one of the most difficult areas of research in applied mathematics is the inverse problem for wave propagation with an important field of application in geophysics and medicine [1-6]. Of course, solving the inverse problem requires a very efficient and very accurate tool for solving the corresponding forward problem, which means, in our case, numerical simulation of the propagation of acoustic and elastic waves in inhomogeneous media [7-12]. At this time, one of the simplest, but the most popular approaches to solving the direct problem is the finite difference method. And for solving the inverse problem, the most famous methods are gradient methods, methods of inverse difference schemes, etc.

Statement of the continuation problem for the acoustics equation.

Consider the continuation problem in the domain $\Delta(L) = \{(x, t): x \in (0, L), t \in (x, 2L - x)\}$:

$$u_{tt} = u_{xx} - r(x)u \quad (x, t) \in \Delta(L) \quad (1)$$

$$u_x(0, t) = g(t) \quad t \in (0, 2L) \quad (2)$$

$$u(0, t) = f(t) \quad t \in (0, 2L) \quad (3)$$

Direct and inverse problem

Consider the ill-posed problem (4) - (6) as the inverse to the next direct (well-posed) problem. In the domain $\Delta(L) = \{(x, t): x \in (0, L), t \in (x, 2L - x)\}$ need to define $u(x, t)$ for given $q(x)$ and $g(t)$ from relations:

$$u_{tt} = u_{xx} - r(x)u \quad (x, t) \in \Delta(L) \quad (4)$$

$$u_x(0, t) = g(t) \quad t \in (0, 2L) \quad (5)$$

$$u(x, x) = q(x) \quad t \in (0, L) \quad (6)$$

In the direct problem (4) - (6), it is required to determine $u(x, t)$ for given $q(x)$ and $g(t)$.

The inverse problem is to determine the function $q(x)$ from relation (4) - (6) using additional information about the solution of the direct problem (4) - (6)

$$u(0, t) = f(t) \quad t \in (0, 2L) \quad (7)$$

Finite difference scheme for solving the problem

For the numerical solution of the inverse problem, we use the method of inverse difference schemes. Consider a finite-difference scheme for this problem.

Let us construct a grid ω_h in the domain $\Delta(L)$ with a step $h = L/N$, where N – positive integer.

Then, in the grid $\omega_h = \{x_i = i \cdot h, t_k = k \cdot h; i = \overline{0, N}, k = \overline{1, 2N - 1}\}$, we write down the corresponding difference direct problem for the acoustics equation. Thus, equation (4) has the following form:

$$\frac{u_i^{k+1} - 2u_i^k + u_i^{k-1}}{h^2} = \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h^2} - \frac{r_{i+1} + r_{i-1}}{2} \cdot \frac{u_{i+1}^k + u_{i-1}^k}{2}$$

hence, simplifying, we obtain

$$u_i^{k+1} + u_i^{k-1} = (u_{i+1}^k + u_{i-1}^k)(1 - h^2 \cdot (r_{i+1} + r_{i-1})/4)$$

We approximate the boundary condition (5), for this we use the Taylor formula in the variable x :

$$u(h, t) = u(0, t) + h \cdot u_x(0, t) + h^2 \cdot u_{xx}(0, t) + O(h^3)$$

further

$$u(h, t) = u(0, t) + h \cdot u_x(0, t) + (h^2/2) \cdot (u_{tt}(0, t) + r(0) \cdot u(0, t)) + O(h^3)$$

from here we get

$$u_x(0, t) = \frac{u(h, t) - u(0, t)}{h} - \frac{h}{2} (u_{tt}(0, t) + r(0) \cdot u(0, t)) + O(h^2)$$

then

$$g_k = \frac{u_1^k - u_0^k}{h} - \frac{h}{2} \cdot \left(\frac{u_0^{k+1} - 2u_0^k + u_0^{k-1}}{h^2} + r_0 \cdot \frac{u_{i+1}^k + u_{i-1}^k}{2} \right)$$

Find u_1^k :

$$u_1^k = h \cdot g_k + (u_{i+1}^k + u_{i-1}^k) \cdot (1 + r_0)/2$$

We also approximate the conditions on characteristic (6) and additional condition (7):

$$\begin{aligned} u_i^i &= q_i \\ u_0^k &= f_k \end{aligned}$$

When discretizing problem (4) - (7), we used the pattern of the "rhombus" scheme. Now we first write an algorithm for solving the direct problem (4) - (6).

$$u_i^{k+1} = (u_{i+1}^k + u_{i-1}^k) \left(1 - \frac{(r_{i+1} + r_{i-1})}{4} \cdot h^2 \right) - u_i^{k-1} \quad \begin{matrix} i = \overline{1, N-1}, \\ k = \overline{1, 2N-i} \end{matrix} \quad (8)$$

$$u_0^{k+1} = (u_1^k - h \cdot g_k) \cdot \frac{2}{(1+r_0)} - u_0^{k-1} \quad k = \overline{1, 2N-1}, \quad (9)$$

$$u_i^i = q_i \quad i = \overline{0, N} \quad (10)$$

For a convenient numerical solution from the pattern of the "rhombus" scheme, we turn to the pattern of the "square" pattern, Figure 1.

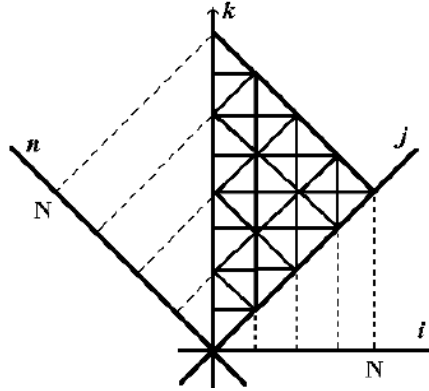


Figure 1. Mesh area ω_h

$$u_j^n = (u_j^{n-1} + u_{j-1}^n) \left(1 - \frac{(r_{j+1} + r_{j-1})}{4} \cdot h^2 \right) - u_{j-1}^{n-1} \quad \begin{matrix} j = \overline{2, N}, \\ n = \overline{1, J-1} \end{matrix} \quad (11)$$

$$u_j^j = (u_j^{j-1} - h \cdot g_j) \cdot \frac{2}{(1+r_0)} - u_{j-1}^{j-1} \quad j = \overline{1, N}, \quad (12)$$

$$u_j^0 = q_j \quad j = \overline{0, N} \quad (13)$$

Algorithm for solving the direct problem

- 1) We calculate by the formula (13) $u_0^0 = q_0$ and $u_1^0 = q_1$;
- 2) We calculate by the formula (12) $u_1^1 = (u_1^0 - h \cdot g_0) \cdot \frac{2}{(1+r_0)} - u_0^0$;
- 3) And so on along the cycle $j = \overline{2, N}$ we calculate by the formula (13) $u_j^0 = q_j$;
- 4) By the formula (11) u_j^n ;
- 5) along the characteristic by formula (12) u_j^j we go to step 3.

Next, we numerically solve the inverse problem (4) - (7) with the method inverse transformation difference schemes:

$$u_{i+1}^k = \frac{(u_i^{k+1} + u_i^{k-1})}{\left(1 - \frac{(r_{i+1} + r_{i-1})}{4} \cdot h^2\right)} - u_{i-1}^k \quad \begin{array}{l} i = \overline{1, N-1}, \\ k = \overline{i, 2N-i} \end{array} \quad (14)$$

$$u_1^k = h \cdot g_k + (u_{i+1}^k + u_{i-1}^k) \cdot (1 + r_0)/2 \quad k = \overline{1, 2N-1}, \quad (15)$$

$$u_0^k = f_k \quad i = \overline{0, 2N} \quad (16)$$

For convenience, from the "rhombus" pattern template, we turn to the "square" pattern.

$$u_j^{n-1} = \frac{(u_j^n + u_{j-1}^{n-1})}{\left(1 - \frac{(r_{j+1} + r_{j-1})}{4} \cdot h^2\right)} - u_{j-1}^{n-1} \quad \begin{array}{l} j = \overline{2, N}, \\ n = \overline{j-1, 0} \end{array} \quad (17)$$

$$u_j^{j-1} = (u_j^j + u_{j-1}^{j-1}) \cdot \frac{(1 + r_0)}{2} + h \cdot g_j \quad j = \overline{1, N}, \quad (18)$$

$$u_j^j = f_j \quad j = \overline{0, N} \quad (19)$$

Algorithm for solving the inverse problem

- 1) We calculate by the formula (19) $u_j^j = f_j, \quad j = \overline{0, N}$;
- 2) We calculate by the formula (18) $u_j^{j-1}, \quad j = \overline{1, N}$;
- 3) We calculate by the formula (17) $u_j^{n-1} \quad j = \overline{2, N}, \quad n = \overline{j-1, 0}$;
- 4) Calculate $q_j = u_j^0$.

Computational experiment

Let's carry out a computational experiment for $N = 100, \quad L = 1, \quad r(x) = 2 - (x - 0.5)^2, \quad g(t) = 0, \quad h = L/N$. To check the algorithm, we set the exact solution $q_{ex}(x) = (1 - \cos(6\pi x))/10$ by solving the direct problem, we determine the additional information $f(t)$. And then we solve the inverse problem by the method of inverse difference schemes (MIDS) and compare with the exact solution. Computational experiments were carried out with different noise levels. Below are their results.

Table 1. Results of solution by the method of inversion of difference schemes for different noise levels

Noise level	$\ q - q_{ex}\ $	Time consumption
No noise	$5.1 \cdot 10^{-15}$	0.14 s
Noise 10%	0.08	0.15 s
Noise 50%	0.34	0.16 s

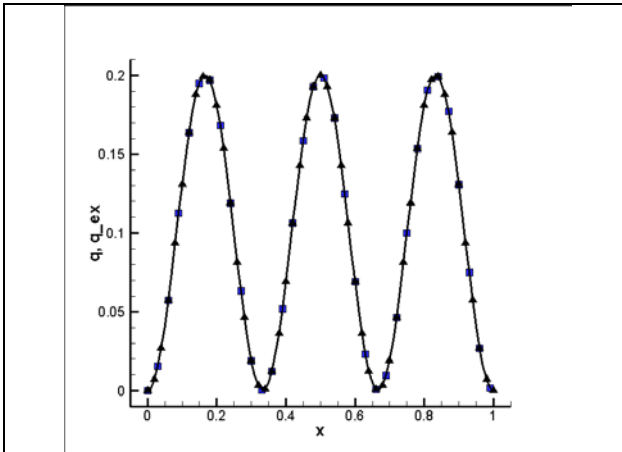


Figure 1. Comparison of the exact solution (■) and the MODS solution (▲) without noise

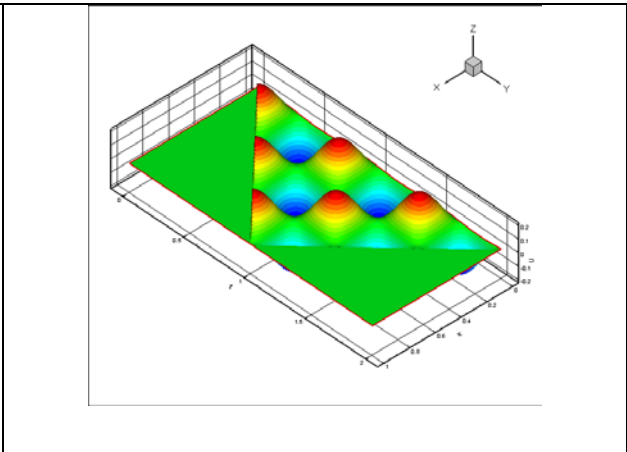


Figure 2. Function graph $u(x, t)$

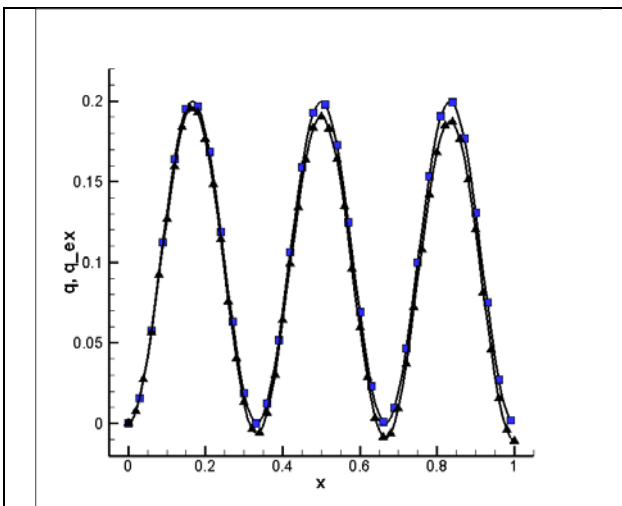


Figure 3. Comparison of the exact solution (■) and the MODS solution (▲) with 10% noise

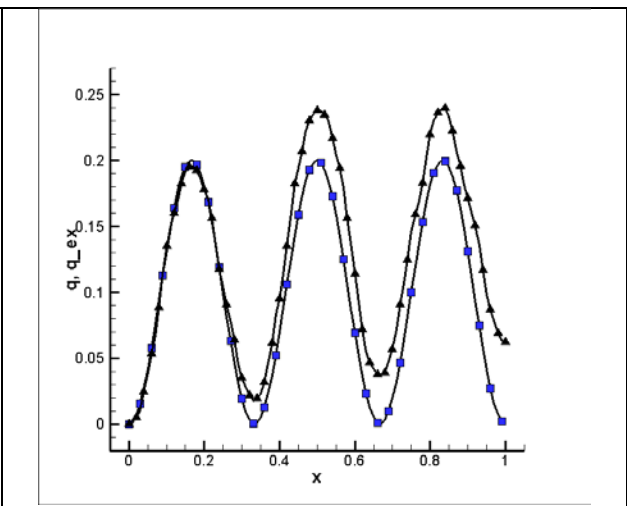


Figure 4. Comparison of the exact solution (■) and the MODS solution (▲) with 50% noise

Conclusion. An algorithm for solving the direct problem in the difference equation is constructed. And also a numerical algorithm for the method of inversion of difference schemes. Computational experiments show this method is numerically stable for different noise levels.

This research has been supported in part by Grant №AP09261179 from the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan.

Ж.Д. Байшемиров^{1,2,3}, С.Е. Касенов^{1,4}, Ж. Әскербекова⁴, А. Бейбітқызы⁴

¹Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Алматы, Қазақстан,

²Ақпараттық және есептеуіш технологиялар институты, Алматы, Қазақстан

³Қазақстан-Британ техникалық университеті, Алматы, Қазақстан,

⁴Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті Алматы, Қазақстан

E-mail: zbai.kz@gmail.com

АКУСТИКАЛЫҚ ТЕНДЕУ ҮШІН КЕРІ ЕСЕБІНІҢ САНДЫҚ ШЕШІМІ.

Аннотация. Бұл мақалада бір өлшемді акустика теңдеуін жалғастыру есебі қарастырылған. Қазіргі уақытта қолданбалы математиканың зерттеу жұмыстарының ең күрделі бағыттарының бірі - геофизика мен медицинада қолданатын маңызды саласы бар толқындардың таралуына кері болып табылады. Акустикалық толқынның біртекті ортада таралуы және дыбыстың кейбір бөлігі қайтып келуін арнайы құрылғылармен өлшеуі дербес туындылы теңдеуге қойылған бастапқы шектік есепке әкеледі. Бұл есептердің көпшілігі қисынсыз болып табылады. Осындай қисынсыз есептердің бірі – жалғастыру есебі. Жалғастыру есебі негізі шекараның белгілі бір бөлігіндегі қосымша мәліметтердің көмегімен шекараның қалған бөлігіндегі функцияның мәнін табу болып табылады. Осыған орай, жалғастыру есебін біз кері шекаралық есепке келтіреміз. Жалпы шекаралық кері есептерді көптеген тәсілдері бар, мысалы градиенттер әдісі. Бұл мақалада осы кері есептің ақырлы айырымдық сұлбасын жасап, сол айырымдық теңдеуден сипаттамадағы белгісіз функцияны айырымдық сұлбаны керілеу әдісімен табамыз. Бұл әдістің тиімділігі есептеу алгоритмінің қарапайым және дәл жылдам болып табылады. Кез келген әдіс немесе алгоритмнің дұрыстығын тексеру үшін алдымен нақты функцияны қойып тура есепті шешіп аламыз. Сосын қосымша ақпаратты тауып алып, кері есепті шешеміз. Кері есеп шешімін нақты функциямен салыстырамыз. Сонымен қатар көптеген жағдайда қосымша ақпараттар белгілі бір қателіктермен берілетіні практикада көп кездеседі. Сол себепті алгоритм дұрыстығы қосымша ақпаратқа әртүрлі деңгейдегі қателіктер қосылу арқылы тексерілді. Осы сандық нәтижелердің сандық мәліметтері мен графиктері салыстырылып келтірілген.

Түйін сөздер: акустика теңдеуі, жалғастыру есебі, кері айырымдық сұлба әдісі, кері есепті шешу алгоритмі.

Ж.Д. Байшемиров^{1,2,3}, С.Е. Касенов^{1,4}, Ж. Аскербекова⁴, А. Бейбитқызы⁴

¹Казахский национальный педагогический университет имени Абая, Алматы, Казахстан,

²Институт информационных и вычислительных технологий КН МОН РК, Алматы, Казахстан,

³Казахстанско-Британский технический университет, Алматы, Казахстан,

⁴Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан

E-mail: zbai.kz@gmail.com

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ АКУСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Аннотация. В этой статье рассматривается задача продолжения для одномерного уравнения акустики. В настоящее время одним из наиболее сложных направлений исследовательской работы прикладной математики является обратная задача распространения волн, имеющая важнейшую область применения в геофизике и медицине. Распространение акустической волны в неоднородной среде и измерение части звука специальными устройствами приводят к начально-краевой задаче для уравнения частных производных. Большинство из этих задач являются некорректными. Одним из таких некорректных задач является задача продолжения. Основой задачи продолжения является нахождение значения искомой функции в остальной части границы с помощью дополнительных данных в определенной части границы. В связи с этим задачу продолжения мы приводим к обратной граничной задаче. Существует множество способов для решения граничных обратных задач, таких как метод градиентов.

В этой статье мы построим конечную разностную схему этой обратной задачи и найдем из этого разностного уравнения неизвестную функцию в характеристике методом обращения разностной схемы. Эффективность этого метода заключается в том, что вычислительный алгоритм является простым и быстрым. Чтобы проверить правильность любого метода или алгоритма, мы сначала решаем задачу поставив конкретную функцию, затем находим дополнительную информацию и решаем обратную задачу. Обратную задачу сравниваем с решением задачи именно с реальной функцией. Кроме того, на практике часто встречается, что во многих случаях дополнительная информация передается с определенными ошибками. Поэтому устойчивость алгоритма проверялась путем включения в дополнительную информацию ошибок различного уровня. Приведены численные расчеты и графики этих числовых результатов.

Ключевые слова: уравнение акустики, задача продолжения, метод обращения разностных схем, алгоритм решения обратной задачи.

Information about authors:

Baishemirov Zharasbek, PhD, Associate Professor of Abai Kazakh National Pedagogical University, Senior Research Officer of RSE Institute of Information and Computational Technology CS MES RK, Associate Professor of Kazakh-British Technical University; zbai.kz@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-4812-4104>;

Kasenov Syrym, PhD, acting associate Professor of Department of Mathematical and Computer Modeling, Al-Farabi Kazakh National University; syrym.kasenov@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-0097-1873>;

Askerbekova Janar, PhD student of Department of Mathematical and Computer Modeling, Al-Farabi Kazakh National University; ask-janar@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-0334-2308>

Beibitkyzy Alina, student of Department of Mathematical and Computer Modeling, Al-Farabi Kazakh National University; beibitkizialina@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-1584-9045>

REFERENCES

[1] S.I. Kabanikhin. Inverse and Ill-Posed Problems. Theory and Applications. De Gruyter, Germany, (2012) ISBN 978-3-11-022400-9.

[2] A.A. Samarsky, A.V. Gulin. Numerical Methods. Nauka, Moscow (1989) (in Russ.)

[3] S.E. Kasenov, A. Nurseitova, D.B. Nurseitov. “A conditional stability estimate of continuation problem for the Helmholtz equation”. AIP Conference Proceedings 1759, 020119 (2016)

[4] M. Nurtas, Zh. D. Baishemirov, V. Tsay, M. Tastanov, Zh. Zhanabekov, (2020) “Convolutional neural networks as a method to solve estimation problem of acoustic wave propagation in poroelastic media”, News of the National Academy of sciences of the Republic of Kazakhstan, Vol 4, Number 332, 52-60. <https://doi.org/10.32014/2020.2518-1726.65>

[5] M. Nurtas, Zh. D. Baishemirov, M. Tastanov, Zh. Zhanabekov, V. Tsay, (2020) “Classification of seismic phases based on machine learning” News of the National Academy of sciences of the Republic of Kazakhstan: physico-mathematical series, vol. 5, no. 333 (2020), -P.33-42. <https://doi.org/10.32014/2020.2518-1726.80>

[6] Romanov V.G. Inverse Problems of mathematical Physics. VNU Sciences Press, Utrecht, 1987. 239 p.

[7] Bugueva T.V. A linearized inverse problem for the wave equation in a sphere // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. The Netherlands, Utrecht, VSP. 1996. Vol. 4, No3. P. 171-189.

[8] S.I. Kabanikhin. On the problem of determining the coefficients of the acoustics equation // Non-classical problems of mathematical physics. – Novosibirsk: Computing Center of the Siberian Branch of the USSR Academy of Sciences. – P.93-100. (1981) (in Russ.)

[9] S.I. Kabanikhin. An approximate method for solving the inverse problem for the acoustics equation // Approximate methods for solving and problems of correctness of inverse problems. – Novosibirsk: Computing Center of the Siberian Branch of the USSR Academy of Sciences. – P.55-62. (1981) (in Russ.)

[10] P.E. Sacks, W. Symes. Uniqueness and continuous dependence for a multidimensional hyperbolic inverse problem // Comm. In Partial Differential equations, Vol. 6, No10. – P.635-676. (1985)

[11] P.E. Sacks. The inverse problem for a weakly inhomogeneous twodimensional acoustic medium // SIAM Journal on Applied Mathematics, Vol.48, No5. –P.1167-1193 (1998)

[12] Bugueva T.V. Some inverse problems for acoustic equation in cylindrical domain // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. The Netherlands, Utrecht, VSP. –2004. – Vol.12, №6. – P.581-596.

**Publication Ethics and Publication Malpractice
in the journals of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan**

For information on Ethics in publishing and Ethical guidelines for journal publication see <http://www.elsevier.com/publishingethics> and <http://www.elsevier.com/journal-authors/ethics>.

Submission of an article to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan implies that the described work has not been published previously (except in the form of an abstract or as part of a published lecture or academic thesis or as an electronic preprint, see <http://www.elsevier.com/postingpolicy>), that it is not under consideration for publication elsewhere, that its publication is approved by all authors and tacitly or explicitly by the responsible authorities where the work was carried out, and that, if accepted, it will not be published elsewhere in the same form, in English or in any other language, including electronically without the written consent of the copyright-holder. In particular, translations into English of papers already published in another language are not accepted.

No other forms of scientific misconduct are allowed, such as plagiarism, falsification, fraudulent data, incorrect interpretation of other works, incorrect citations, etc. The National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan follows the Code of Conduct of the Committee on Publication Ethics (COPE), and follows the COPE Flowcharts for Resolving Cases of Suspected Misconduct (http://publicationethics.org/files/u2/New_Code.pdf). To verify originality, your article may be checked by the Cross Check originality detection service <http://www.elsevier.com/editors/plagdetect>.

The authors are obliged to participate in peer review process and be ready to provide corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. All authors of a paper should have significantly contributed to the research.

The reviewers should provide objective judgments and should point out relevant published works which are not yet cited. Reviewed articles should be treated confidentially. The reviewers will be chosen in such a way that there is no conflict of interests with respect to the research, the authors and/or the research funders.

The editors have complete responsibility and authority to reject or accept a paper, and they will only accept a paper when reasonably certain. They will preserve anonymity of reviewers and promote publication of corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. The acceptance of a paper automatically implies the copyright transfer to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.

The Editorial Board of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan will monitor and safeguard publishing ethics.

(Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайтах:

[www:nauka-nanrk.kz](http://www.nauka-nanrk.kz)

<http://physics-mathematics.kz/index.php/en/archive>

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Редакторы: *М.С. Ахметова, Р.Ж. Мрзабаева, Д.С. Аленов*
Верстка на компьютере *В.С. Зикирбаева*

Подписано в печать 12.06.2021.
Формат 60x881/8. Бумага офсетная. Печать – ризограф.
11 п.л. Тираж 300. Заказ 2.