

ISSN 2518-1726 (Online),  
ISSN 1991-346X (Print)

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ  
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ  
Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университетінің

# Х А Б А Р Л А Р Ы

---

---

## ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК  
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН  
Қазақстан Республикасының Ғылым  
Академиясының Әл-Фараби атындағы  
Қазақ ұлттық университетінің

## NEWS

OF THE ACADEMY OF SCIENCES  
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN  
Al-Farabi Kazakh  
National University

**SERIES**  
**PHYSICO-MATHEMATICAL**

**3 (337)**

**MAY – JUNE 2021**

PUBLISHED SINCE JANUARY 1963

PUBLISHED 6 TIMES A YEAR

ALMATY, NAS RK

---

---

*NAS RK is pleased to announce that News of NAS RK. Series physico-mathematical journal has been accepted for indexing in the Emerging Sources Citation Index, a new edition of Web of Science. Content in this index is under consideration by Clarivate Analytics to be accepted in the Science Citation Index Expanded, the Social Sciences Citation Index, and the Arts & Humanities Citation Index. The quality and depth of content Web of Science offers to researchers, authors, publishers, and institutions sets it apart from other research databases. The inclusion of News of NAS RK. Series of chemistry and technologies in the Emerging Sources Citation Index demonstrates our dedication to providing the most relevant and influential content of chemical sciences to our community.*

*Қазақстан Республикасы Ұлттық ғылым академиясы «ҚР ҰҒА Хабарлары. Физикалық-математикалық сериясы» ғылыми журналының Web of Science-тің жаңаланған нұсқасы Emerging Sources Citation Index-те индекстелуге қабылданғанын хабарлайды. Бұл индекстелу барысында Clarivate Analytics компаниясы журналды одан әрі the Science Citation Index Expanded, the Social Sciences Citation Index және the Arts & Humanities Citation Index-ке қабылдау мәселесін қарастыруда. Web of Science зерттеушілер, авторлар, баспашылар мен мекемелерге контент тереңдігі мен сапасын ұсынады. ҚР ҰҒА Хабарлары. Химия және технология сериясы Emerging Sources Citation Index-ке енуі біздің қоғамдастық үшін ең өзекті және беделді химиялық ғылымдар бойынша контентке адалдығымызды білдіреді.*

*НАНПК сообщает, что научный журнал «Известия НАНПК. Серия физико-математическая» был принят для индексирования в Emerging Sources Citation Index, обновленной версии Web of Science. Содержание в этом индексировании находится в стадии рассмотрения компанией Clarivate Analytics для дальнейшего принятия журнала в the Science Citation Index Expanded, the Social Sciences Citation Index и the Arts & Humanities Citation Index. Web of Science предлагает качество и глубину контента для исследователей, авторов, издателей и учреждений. Включение Известия НАНПК в Emerging Sources Citation Index демонстрирует нашу приверженность к наиболее актуальному и влиятельному контенту по химическим наукам для нашего сообщества.*

**Бас редактор:**

**МҰТАНОВ Ғалымқайыр Мұтанұлы**, техника ғылымдарының докторы, профессор, ҚР ҰҒА академигі, ҚР БҒМ ҒК «Ақпараттық және есептеу технологиялары институты» бас директорының м.а. (Алматы, Қазақстан) Н-5

**Редакция алқасы:**

**ҚАЛИМОЛДАЕВ Мақсат Нұрәділұлы** (бас редактордың орынбасары), физика-математика ғылымдарының докторы, профессор, ҚР ҰҒА академигі, ҚР БҒМ ҒК «Ақпараттық және есептеу технологиялары институты» бас директорының кеңесшісі, зертхана меңгерушісі (Алматы, Қазақстан) Н-7

**БАЙГУНЧЕКОВ Жұмаділ Жаңабайұлы** (бас редактордың орынбасары), техника ғылымдарының докторы, профессор, ҚР ҰҒА академигі, Кибернетика және ақпараттық технологиялар институты, Сатпаев университетінің Қолданбалы механика және инженерлік графика кафедрасы, (Алматы, Қазақстан) Н-3

**ВОЙЧИК Вальдемар**, техника ғылымдарының докторы (физика), Люблин технологиялық университетінің профессоры (Люблин, Польша) Н=23

**БОШКАЕВ Қуантай Авғазыұлы**, Ph.D. Теориялық және ядролық физика кафедрасының доценті, әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті (Алматы, Қазақстан) Н-10

**QUEVEDO Hernando**, профессор, Ядролық ғылымдар институты (Мехико, Мексика) Н-28

**ЖҮСПОВ Марат Абжанұлы**, физика-математика ғылымдарының докторы, теориялық және ядролық физика кафедрасының профессоры, әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті (Алматы, Қазақстан) Н-7

**КОВАЛЕВ Александр Михайлович**, физика-математика ғылымдарының докторы, Украина ҰҒА академигі, Қолданбалы математика және механика институты (Донецк, Украина) Н-5

**МИХАЛЕВИЧ Александр Александрович**, техника ғылымдарының докторы, профессор, Беларусь ҰҒА академигі (Минск, Беларусь) Н-2

**РАМАЗАНОВ Тілекқабұл Сәбитұлы**, физика-математика ғылымдарының докторы, профессор, ҚР ҰҒА академигі, әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университетінің ғылыми-инновациялық қызмет жөніндегі проректоры, (Алматы, Қазақстан) Н-26

**ТАКИБАЕВ Нұрғали Жабағаұлы**, физика-математика ғылымдарының докторы, профессор, ҚР ҰҒА академигі, әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті (Алматы, Қазақстан) Н-5

**ТИГИНЯНУ Ион Михайлович**, физика-математика ғылымдарының докторы, академик, Молдова Ғылым Академиясының президенті, Молдова техникалық университеті (Кишинев, Молдова) Н-42

**ХАРИН Станислав Николаевич**, физика-математика ғылымдарының докторы, профессор, ҚР ҰҒА академигі, Қазақстан-Британ техникалық университеті (Алматы, Қазақстан) Н-10

**ДАВЛЕТОВ Асқар Ербуланович**, физика-математика ғылымдарының докторы, профессор, әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті (Алматы, Қазақстан) Н – 12

**КАЛАНДРА Пьетро**, Ph.D (физика), Наноқұрылымды материалдарды зерттеу институтының профессоры (Рим, Италия) Н = 26

**«ҚР ҰҒА Хабарлары. Физика-математикалық сериясы».**

**ISSN 2518-1726 (Online),**

**ISSN 2224-346X (Print)**

Меншіктенуші: «Қазақстан Республикасының Ұлттық ғылым академиясы» РҚБ (Алматы қ.).

Қазақстан Республикасының Ақпарат және қоғамдық даму министрлігінің Ақпарат комитетінде 14.02.2018 ж. берілген № 16906-Ж мерзімдік басылым тіркеуіне қойылу туралы куәлік.

Тақырыптық бағыты: *физика-математика ғылымдары және ақпараттық техникалар саласындағы басым ғылыми зерттеулерді жариялау.*

Мерзімділігі: жылына 6 рет.

Тиражы: 300

Редакцияның мекен-жайы: 050010, Алматы қ., Шевченко көш., 28, 219 бөл., тел.: 272-13-19, 272-13-18  
<http://www.physico-mathematical.kz/index.php/en/>

---

© Қазақстан Республикасының Ұлттық ғылым академиясы, 2021

Типографияның мекен-жайы: «Аруна» ЖК, Алматы қ., Муратбаева көш., 75.

### Главный редактор:

**МУТАНОВ Галимкаир Мутанович**, доктор технических наук, профессор, академик НАН РК, и.о. генерального директора «Института информационных и вычислительных технологий» КН МОН РК (Алматы, Казахстан) Н - 5

### Редакционная коллегия:

**КАЛИМОЛДАЕВ Максат Нурадилович**, (заместитель главного редактора), доктор физико-математических наук, профессор, академик НАН РК, советник генерального директора «Института информационных и вычислительных технологий» КН МОН РК, заведующий лабораторией (Алматы, Казахстан) Н - 7

**БАЙГУНЧЕКОВ Жумадил Жанабаевич**, (заместитель главного редактора), доктор технических наук, профессор, академик НАН РК, Институт кибернетики и информационных технологий, кафедра прикладной механики и инженерной графики, университет Сатпаева (Алматы, Казахстан) Н - 3

**ВОЙЧИК Вальдемар**, доктор технических наук (физ.-мат.), профессор Люблинского технологического университета (Люблин, Польша) Н=23

**БОШКАЕВ Куантай Авгазыевич**, доктор Ph.D, преподаватель, доцент кафедры теоретической и ядерной физики, Казахский национальный университет им. аль-Фараби (Алматы, Казахстан) Н - 10

**QUEVEDO Hemando**, профессор, Национальный автономный университет Мексики (UNAM), Институт ядерных наук (Мехико, Мексика) Н - 28

**ЖУСУПОВ Марат Абжанович**, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической и ядерной физики, Казахский национальный университет им. аль-Фараби (Алматы, Казахстан) Н - 7

**КОВАЛЕВ Александр Михайлович**, доктор физико-математических наук, академик НАН Украины, Институт прикладной математики и механики (Донецк, Украина) Н - 5

**МИХАЛЕВИЧ Александр Александрович**, доктор технических наук, профессор, академик НАН Беларуси (Минск, Беларусь) Н - 2

**РАМАЗАНОВ Тлеккабул Сабитович**, доктор физико-математических наук, профессор, академик НАН РК, проректор по научно-инновационной деятельности, Казахский национальный университет им. аль-Фараби (Алматы, Казахстан) Н – 26

**ТАКИБАЕВ Нургали Жабагаевич**, доктор физико-математических наук, профессор, академик НАН РК, Казахский национальный университет им. аль-Фараби (Алматы, Казахстан) Н - 5

**ТИГИНЯНУ Ион Михайлович**, доктор физико-математических наук, академик, президент Академии наук Молдовы, Технический университет Молдовы (Кишинев, Молдова) Н - 42

**ХАРИН Станислав Николаевич**, доктор физико-математических наук, профессор, академик НАН РК, Казахстанско-Британский технический университет (Алматы, Казахстан) Н – 10

**ДАВЛЕТОВ Аскар Ербуланович**, доктор физико-математических наук, профессор, Казахский национальный университет им. аль-Фараби (Алматы, Казахстан) Н – 12

**КАЛАНДРА Пьетро**, доктор философии (Ph.D, физика), профессор Института по изучению наноструктурированных материалов (Рим, Италия) Н = 26

**«Известия НАН РК. Серия физика-математическая».**

**ISSN 2518-1726 (Online),**

**ISSN 2224-346X (Print)**

Собственник: Республиканское общественное объединение «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы).

Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации Министерства информации и общественного развития Республики Казахстан № 16906-Ж выданное 14.02.2018 г.

Тематическая направленность: *публикация статей по геологии и техническим наукам.*

Периодичность: 6 раз в год.

Тираж: 300

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, оф. 219, тел.: 272-13-19, 272-13-18

<http://www.physico-mathematical.kz/index.php/en/>

---

© Национальная академия наук Республики Казахстан, 2021

Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75.

## Editor in chief

**MUTANOV Galimkair Mutanovich**, doctor of technical Sciences, Professor, Academician of NAS RK, acting director of the Institute of Information and Computing Technologies of SC MES RK (Almaty, Kazakhstan) H - 5

## Editorial board:

**KALIMOLDAYEV Maksat Nuradilovich** (Deputy Editor-in-Chief), doctor in Physics and Mathematics, Professor, Academician of NAS RK, Advisor to the General Director of the Institute of Information and Computing Technologies of SC MES RK, Head of the Laboratory (Almaty, Kazakhstan) H - 7

**BAYGUNCHEKOV Zhumadil Zhanabayevich**, (Deputy Editor-in-Chief), doctor of Technical Sciences, Professor, Academician of NAS RK, Institute of Cybernetics and Information Technologies, Department of Applied Mechanics and Engineering Graphics, Satbayev University (Almaty, Kazakhstan) H - 3

**WOICIK Waldemar**, Doctor of Phys.-Math. Sciences, Professor, Lublin University of Technology (Lublin, Poland) H=23

**BOSHKAYEV Kuantai Avgazievich**, PhD, Lecturer, Associate Professor of the Department of Theoretical and Nuclear Physics, Al-Farabi Kazakh National University (Almaty, Kazakhstan) H - 10

**QUEVEDO Hemando**, Professor, National Autonomous University of Mexico (UNAM), Institute of Nuclear Sciences (Mexico City, Mexico) H - 28

**ZHUSSUPOV Marat Abzhanovich**, Doctor in Physics and Mathematics, Professor of the Department of Theoretical and Nuclear Physics, al-Farabi Kazakh National University (Almaty, Kazakhstan) H - 7

**KOVALEV Alexander Mikhailovich**, Doctor in Physics and Mathematics, Academician of NAS of Ukraine, Director of the State Institution «Institute of Applied Mathematics and Mechanics» DPR (Donetsk, Ukraine) H - 5

**MIKHALEVICH Alexander Alexandrovich**, Doctor of Technical Sciences, Professor, Academician of NAS of Belarus (Minsk, Belarus) H - 2

**RAMAZANOV Tlekkabul Sabitovich**, Doctor in Physics and Mathematics, Professor, Academician of NAS RK, Vice-Rector for Scientific and Innovative Activity, al-Farabi Kazakh National University (Almaty, Kazakhstan) H – 26

**TAKIBAYEV Nurgali Zhabagaevich**, Doctor in Physics and Mathematics, Professor, Academician of NAS RK, al-Farabi Kazakh National University (Almaty, Kazakhstan) H - 5

**TIGHINEANU Ion Mikhailovich**, Doctor in Physics and Mathematics, Academician, Full Member of the Academy of Sciences of Moldova, President of the AS of Moldova, Technical University of Moldova (Chisinau, Moldova) H - 42

**KHARIN Stanislav Nikolayevich**, Doctor in Physics and Mathematics, Professor, Academician of NAS RK, Kazakh-British Technical University (Almaty, Kazakhstan) H – 10

**DAVLETOV Askar Erbulanovich**, Doctor in Physics and Mathematics, Professor, al-Farabi Kazakh National University (Almaty, Kazakhstan) H - 12

**CALANDRA Pietro**, PhD in Physics, Professor at the Institute of Nanostructured Materials (Monterotondo Station Rome, Italy)

## News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.

**Physical-mathematical series.**

**ISSN 2518-1726 (Online),**

**ISSN 2224-346X (Print)**

Owner: RPA «National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan» (Almaty).

The certificate of registration of a periodical printed publication in the Committee of information of the Ministry of Information and Social Development of the Republic of Kazakhstan No. 16906-Ж, issued 14.02.2018

Thematic scope: *publication of papers on geology and technical sciences.*

Periodicity: 6 times a year.

Circulation: 300

*Editorial address: 28, Shevchenko str., of. 219, Almaty, 050010, tel. 272-13-19, 272-13-18,  
<http://www.physico-mathematical.kz/index.php/en/>*

© National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, 2021

Address of printing house: ST «Aruna», 75, Muratbayev str, Almaty.

**NEWS**

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN  
**PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES**

ISSN 1991-346X

Volume 3, Number 337 (2021), 50 – 57

<https://doi.org/10.32014/2020.2518-1726.46>

UDC 517.929.4

**Y.V. Yeskendirova**

Zhetysu State University. I. Zhansugurov, Taldykorgan, Kazakhstan

Email: helen\_nesina@mail.ru

**ABOUT STABILITY OF DIFFERENCE DYNAMIC SYSTEMS (DDS)  
ON THE FIRST APPROACH**

**Abstract.** This article discusses difference dynamic systems (DDS). We want to get information about the existence and stability of solutions to difference dynamical systems. The effective method for such researching is the method of evaluating functions that depend on the known parameters included in the right side of the DDS. Moreover, it is possible to investigate DDS, in which the right-hand sides are not necessarily analytical. In this article, we explore a new analogue of Gronwall's result for DDS. In this paper, we investigate the problem of stability in the first approximation based on discrete inequalities.

**Key words:** difference dynamical systems, discrete inequalities, estimates, Gronwall inequality.

**1 Introduction.** In this article are given the applications of discrete inequalities of the Bellman or Bihari type to the learning of the stability of linear and nonlinear differential equations [1]. In [2] can be found numerous applications to the theory of existence and uniqueness of differential equations, as well as [3], [4]; in [5] is indicated applications to priori estimates for the classes of solutions of partial differential equations. Over the past few years, several authors have established some Gronwall-type integral inequalities with one or two independent real variables [6] - [16].

Residual and summarized residual difference inequalities are widely used as a research tool in the qualitative theory of discrete systems [17], [18]. These inequalities were used to study some general properties of difference dynamical systems, in particular, Lyapunov stability [19].

In a qualitative study of DDS, in many cases, the DDS solution is estimated by functions that depend on the known parameters included in the right-hand sides of the DDS. For this, it is necessary to use a ready-made discrete inequality of the Bellman, Bihari or Gronwall type. But not for all DDS one can find the corresponding ready discrete inequality.

The following discrete analogue of Bellman's inequality is closely related to the above DDSs.

Let  $\omega(n)$  - monotonically non-decreasing, and also  $x(n)$ ,  $f(n)$  - non-negative functions for  $\forall n/n \in N_0 = \{n_0, n_0 + 1, \dots\}$ .

If the inequality works [19]

$$x(n) \leq \omega(n) + \sum_{s=0}^{n-1} f(s) \cdot x(s), \quad \forall n/n \in N_0,$$

The inequality will be

$$x(n) \leq \omega(n) \cdot \prod_{s=0}^{n-1} [1 + f(s)], \quad \forall n/n \in N_0.$$

In this paper, we investigate the problem of stability in the first approximation based on discrete inequalities. In this article, we explore a new analogue of Gronwall's result for DDS. The article investigates the property of DDS stability.

**2 New discrete analogue inequality Gronwall.**

**Theorem 1.** Let functions  $U_n, g_n$ , are continuous and functions  $a_n, b_n$  are summarized, assume that  $b_n, g_n$  are nonnegative on  $N_{n_0} = \{n_0, n_0 + 1, \dots, n_0 + k, \dots\}$  and satisfy the inequality

$$U_n \leq a_n + b_n \sum_{k=n_0}^{n-1} g_k U_k, \quad \forall n/n \in N_{n_0}, \tag{1}$$

then the inequality

$$U_n \leq a_n + b_n \sum_{k=n_0}^{n-1} a_k g_k \prod_{s=k+1}^{n-1} [1 + b_s g_s], \quad \forall n/n \in N_{n_0}. \tag{2}$$

is true.

Proof: Indicate

$$v_n = \sum_{k=n_0}^{n-1} g_k U_k, \tag{3}$$

it is obvious that  $v_{n_0} = 0, \Delta v_n = g_n U_n$ .

Note that multiplying both parts of the inequality (1) on  $g_n$  obtain:

$$\begin{aligned} g_n U_n &\leq a_n g_n + b_n g_n v_n, \\ \Delta v_n &\leq a_n g_n + b_n g_n v_n, \quad v_{n_0} = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Let us define the function  $w_n$  by the equality

$$v_n = w_n \prod_{k=n_0}^{n-1} [1 + b_k g_k], \tag{5}$$

therefore

$$w_n = \frac{v_n}{\prod_{k=n_0}^{n-1} [1 + b_k g_k]},$$

considering (4) have

$$\begin{aligned} \Delta w_n &= \frac{v_{n+1}}{\prod_{k=n_0}^n [1 + b_k g_k]} - \frac{v_n}{\prod_{k=n_0}^{n-1} [1 + b_k g_k]} = \frac{v_{n+1} - v_n [1 + b_n g_n]}{\prod_{k=n_0}^n [1 + b_k g_k]} = \\ &= \frac{\Delta v_n - b_n g_n v_n}{\prod_{k=n_0}^n [1 + b_k g_k]} \leq \frac{a_n g_n + b_n g_n v_n - b_n g_n v_n}{\prod_{k=n_0}^n [1 + b_k g_k]} = \frac{a_n g_n}{\prod_{k=n_0}^n [1 + b_k g_k]}, \end{aligned}$$

that is

$$\Delta w_n \leq \frac{a_n g_n}{\prod_{k=n_0}^n [1 + b_k g_k]} \text{ or } \Delta w_n \leq a_n g_n \left( \prod_{k=n_0}^n [1 + b_k g_k] \right)^{-1}.$$

From here

$$w_{n+1} - w_n \leq a_n g_n \left( \prod_{k=n_0}^n [1 + b_k g_k] \right)^{-1}.$$

We sum by  $n$  from  $n_0$  to  $n-1$ , we get

$$w_n \leq \sum_{k=n_0}^{n-1} a_k g_k \left( \prod_{s=n_0}^k [1 + b_s g_s] \right)^{-1}. \quad (6)$$

From (6) it follows

$$v_n = \sum_{k=n_0}^{n-1} g_k U_k = w_n \prod_{k=n_0}^{n-1} [1 + b_k g_k] \leq \sum_{k=n_0}^{n-1} a_k g_k \left( \prod_{s=n_0}^k [1 + b_s g_s] \right)^{-1} \cdot \prod_{k=n_0}^{n-1} [1 + b_k g_k].$$

Hence

$$v_n \leq \sum_{k=n_0}^{n-1} a_k g_k \prod_{s=k+1}^{n-1} [1 + b_s g_s].$$

The value  $v_n$  substitute in (1), we get (2). The theorem is proved.

**3 Application.** Now consider the dynamic difference system

$$x_{n+1} = A(n)x_n + f(n, x_n), \quad x_{n_0} = x_0, \quad (7)$$

$A(n)$ - nonsingular ( $m \times m$ ) matrix,

$$f : N_{n_0} \times R^m \rightarrow R^m; \quad N_{n_0} = \{n_0, n_0 + 1, \dots, n_0 + k, \dots\}.$$

Let us present a solution  $x(n, x_0)$  DDS (7) in the following form

$$x_n = X(n, n_0)x_0 + \sum_{k=n_0}^{n-1} X^{-1}(n_0, k)f(k, x_k), \quad (8)$$

where  $X(n, n_0)$  is the fundamental matrix of the linear DDS:

$$x_{n+1} = A(n)x_n.$$

$$\text{From the ratio } |f(k, x_k)| < \gamma(k)|x_k|^m, \quad \forall k \geq 0,$$

where  $m$  - some positive number,  $m \geq 1$ ,  $\gamma(k) < \varepsilon$ ,

$\varepsilon$  - is an arbitrarily small positive number, we obtain the following inequality

$$|x_n| \leq |X(n, n_0)x_0| + \sum_{k=n_0}^{n-1} |X^{-1}(n_0, k)| \cdot \gamma(k)|x_k|^m, \quad \forall k \geq 0.$$

Let us introduce the notation, let  $|X(n, n_0)x_0| = \omega(n)$

and

$$|X^{-1}(n_0, k)| \cdot \gamma(k) = \psi(n).$$

Then we get

$$|x_n| \leq \omega(n) + \sum_{k=n_0}^{n-1} \psi(n)|x_k|^m.$$

**Theorem 2.** Let the function  $\psi(n)$  - be continuous and the function  $\omega(n)$  - be summable. Suppose that  $\psi(n)$ - is non-negative on  $N$  and satisfies the inequality

$$|x_n| \leq \omega(n) + \sum_{k=n_0}^{n-1} \psi(n)|x_k|^m,$$

then for  $m = 1$  the inequality holds



$$|x_n| \leq \omega(n) + \sum_{k=n_0}^{n-1} \omega(k) \psi(k) \prod_{s=k+1}^{n-1} [1 + \psi(s)].$$

Proof: Applying Theorem 1, we obtain the estimate

$$|x_n| \leq \omega(n) + \sum_{k=n_0}^{n-1} \omega(k) \psi(k) \prod_{s=k+1}^{n-1} [1 + \psi(s)].$$

The statement of the theorem follows from this inequality.

**Theorem 3.** Let the solution of the DDS

$$x_{n+1} = Ax_n + f(n, x_n) + q(n, x_n) \tag{9}$$

exists on  $N$ , where is  $A$  a constant matrix, and  $f$  и  $g$  are continuous and limited on  $N \cup \{0\}$ , i.e. ...  $\|x_n\| < \infty$ .

Let's consider that

- a) the matrix  $A$  has all roots with  $\|\lambda_i(A)\| < \delta < 1, \quad i = \overline{1, m}$
- b) uniformly in  $x_n$  for a sufficiently small value  $\|x_n\|$ , the relation  $\|q(n, x_n)\| \rightarrow 0$  at  $n \rightarrow \infty$
- c) for any  $\varepsilon > 0$  there are positive numbers  $\delta = \delta(\varepsilon)$  и  $l = l(\varepsilon) \in N$  such that  $\|f(n, x_n)\| \leq \varepsilon \|x_n\|$   $\|x_n\| \leq \delta, \quad n \geq l$ .

Then there  $n_0 > 0$  exists such that for a sufficiently small  $\|x_{n_0}\|$  solution is  $x_n \rightarrow 0$  at  $n \rightarrow \infty$ .

Proof: Linear transformation

$$x_n = X(n, n_0)y_n, \tag{10}$$

where  $y_{n_0} = x_0$  reduces DDS (9) to the form

$$y_{n+1} = y_n + X^{-1}(n+1, n_0)f(n, X(n, n_0)y_n) + X^{-1}(n+1, n)q(n, X(n, n_0)y_n).$$

We sum by  $n$  from 0 to  $n-1$ , we obtain

$$y_n = \sum_{k=n_0}^{n-1} X^{-1}(n+1, n_0)(f(n, X(n, n_0)y_n) + q(n, X(n, n_0)y_n)) + x_0.$$

Substituting  $y_n$  in (10), we obtain

$$x_n = X(n, n_0)x_0 + \sum_{k=n_0}^{n-1} X(k, k_0)X^{-1}(k+1, k_0)(f(k, X(k, k_0)y_k) + q(k, X(k, k_0)y_k))$$

or

$$x_n = X(n, n_0)x_0 + \sum_{k=n_0}^{n-1} X^{-1}(k_0, k)f(k, x_k) + \sum_{k=n_0}^{n-1} X^{-1}(k_0, k)q(k, x_k). \tag{11}$$

$$\text{Because of } \|f(n, x_n)\| \leq \varepsilon \|x_n\| \tag{12}$$

and

$$\|q(n, x_n)\| \rightarrow 0 \text{ at } n \rightarrow \infty, \tag{13}$$

then applying (12) and (13) to (11) we get

$$\|x_n\| \leq M \|x_0\| + M \sum_{k=n_0}^{n-1} \varepsilon \|x_k\|.$$

Applying a discrete analogue of the Gronwall's inequality [17] to the latter inequality we obtain:

$$\|x_n\| \leq M \|x_0\| \exp\left(M \sum_{k=n_0}^{n-1} \varphi_k\right), \text{ where } \varphi_k \leq \varepsilon.$$

Given that  $\|X(n, n_0)x_0\| < \varepsilon$ , we come to the inequality:

$$\|x_n\| \leq \varepsilon \exp\left(M \sum_{k=n_0}^{n-1} \varphi_k\right).$$

Hence follows the proof of existence  $n_0 > 0$ , that for a sufficiently small  $\|x_0\|$ , solution  $x_n \rightarrow 0$  at  $n \rightarrow \infty$ .

**4 Stability property.** Consider the DDS:

$$x_{n+1} = A(n)x_n + f(n, x_n), \quad x_{n_0} = x_0, \quad (14)$$

where  $A(n)$  - non-singular ( $m \times m$ ) matrix,

$$f : N_{n_0} \times R^m \rightarrow R^m; \quad N_{n_0} = \{n_0, n_0 + 1, \dots, n_0 + k, \dots\}.$$

**Theorem 4.** Solution  $x(n, n_0, x_0)$  DDS (14) satisfies the equation:

$$x_n = X(n, n_0)x_0 + \sum_{k=n_0}^{n-1} X^{-1}(n_0, k)f(k, x_k), \quad (15)$$

where  $X(n, n_0)$  fundamental matrix of linear DDS

$$x_{n+1} = A(n)x_n \quad (16)$$

Proof: Let

$$x(n, n_0, x_0) = X(n, n_0)y_n, \quad y_{n_0} = x_0. \quad (17)$$

Then, substituting into equation (14), we obtain

$$X(n+1, n_0)y_{n+1} = A(n)X(n, n_0)y_n + f(n, x_n).$$

From whence

$$\Delta y_n = X^{-1}(n+1, n_0)f(n, x_n)$$

or summing by  $n$  from  $n_0$  to  $n-1$

$$y_n = \sum_{k=n_0}^{n-1} X^{-1}(n_0, k+1)f(k, x_k) + x_{n_0}$$

and substituting in (17) we get

$$x(n, n_0, x_0) = X(n, n_0)x_0 + \sum_{k=n_0}^{n-1} X(n, n_0)X^{-1}(n_0, k+1)f(k, x_k)$$

or

$$x(n, n_0, x_0) = X(n, n_0)x_0 + \sum_{k=n_0}^{n-1} X^{-1}(n_0, k)f(k, x_k). \quad (18)$$

Which proves the theorem.

**Theorem 5.** Let  $X(n, n_0)$  fundamental matrix of linear DDS (16), let it go

$$\begin{aligned} f : N_{n_0} \times R^m &\rightarrow R^m \quad f(n, 0) = 0; \\ \|X^{-1}(n+1, n_0)f(n, X(n, n_0)y_n)\| &\leq \varphi(n, \|y_n\|), \end{aligned} \quad (19)$$

where function  $\varphi(n, \|y_n\|)$  does not decrease in  $n$ . Suppose solutions  $z_n$  the equation:

$$z_{n+1} = z_n + \varphi(n, z_n) \quad (20)$$

limited at  $n \geq n_0$ .

Then the stability of linear DDS (16) implies the corresponding stability property of the zero solution of DDS (14).

Proof: Linear transformation  $x_n = X(n, n_0)y_n$  leading DDS (14) to the form:

$$y_{n+1} = y_n + X^{-1}(n+1, n_0)f(n, X(n, n_0)y_n)$$

hence we have  $\|y_{n+1}\| \leq \|y_n\| + \varphi(n, \|y_n\|)$ .

If  $\|y_0\| \leq z_0$  we get:

$$\|y_n\| \leq z_n,$$

where  $z_n$  - solution of equation (20), so

$$\|x_n\| \leq \|X(n, n_0)\| \|y_n\| \leq \|X(n, n_0)\| z_n.$$

Hence, if the solution to the linear DDS (16) asymptotically stable then:

$$\|X(n, n_0)\| \leq M \cdot \lambda^{n-n_0}$$

for some appropriate  $M > 0$  и  $0 < \lambda < 1$ .

Then

$$\|x_n\| \leq M \cdot \lambda^{n-n_0} z_n$$

and this shows that the zero solution  $x_n = 0$  asymptotically stable.

**Conclusion.** In this researching was obtained a new discrete inequality, which is used to estimate the solution of nonlinear DDS using the fundamental solutions of the linear approximation; moreover, the property of DDS stability is investigated too. In conclusion, we note that the summarized residual inequality will allow us to investigate the stability and boundedness, the asymptotic behavior of solutions of difference dynamical systems. The results of the researching have practical importance for the verification of scenarios for computer modeling and control of physical processes.

**Е.В. Ескендинова**

І. Жансүгіров атындағы Жетісу Университеті, Талдықорған, Қазақстан

Email: helen\_nesina@mail.ru

### **СЫЗЫҚТЫ ЕМЕС АЙЫРЫМДЫҚ ДИНАМИКАЛЫҚ ЖҮЙЕЛЕРІНІҢ (АДЖ) БІРІНШІ ЖУЫҚШАСЫНЫҢ ТҰРАҚТЫЛЫҒЫ**

**Аннотация.** Осы мақалада айырымдық динамикалық жүйелер қарастырылған. Біз айырымдық динамикалық жүйелердің шешулері бар екендігі және сол шешулердің тұрақтылығы туралы ақпарат алғымыз келеді. Мұндай зерттеудің тиімді әдісі белгілі параметрлерге тәуелді, айырымдық динамикалық жүйелердің оң жағына кіретін функциялармен бағалау әдісі болып табылады. Сонымен қатар, оң жақ бөліктері аналитикалық емес болған жағдайда да айырымдық динамикалық жүйелерді зерттей беруге мүмкіндік бар. Бұл мақалада біз Гронуолланың айырымдық динамикалық жүйелерге арналған нәтижесінің жаңа аналогын зерттейміз. Ұсынылып отырған жұмыста дискретті теңсіздіктер негізінде, алғашқы жуықтау кезіндегі тұрақтылық мәселесі зерттеледі

**Түйін сөздер:** айырымдық динамикалық жүйелер, дискретті теңсіздіктер, бағалау, Гронуолл теңсіздігі.

**Е.В. Ескендинова**

Жетысуский государственный университет им. И. Жансугурова, Талдыкорган, Казахстан  
Email: helen\_nesina@mail.ru

**ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНО-ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ (РДС)  
ПО ПЕРВОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ**

**Аннотация.** В данной статье рассматриваются разностные динамические системы (РДС). Мы хотим получить информацию о существовании и устойчивости решения разностных динамических систем. Эффективным методом такого исследования является метод оценки функциями, зависящими от известных параметров, входящих в правые части РДС. При этом исследовать можно РДС, у которых правые части не обязательно аналитические. В этой статье мы исследуем новый аналог результата Гронуолла для РДС. В предлагаемой работе исследуется проблема устойчивости по первому приближению на основе дискретных неравенств.

**Ключевые слова:** разностные динамические системы, дискретные неравенства, оценки, неравенство Гронуолла.

**Information about author:**

Ylena Victorovna Yeskendiroya, Senior Lecturer Department of Mathematics, Zhetysu State University. I.Zhansugurov, Kazakhstan, Taldykorgan, Email: helen\_nesina@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0001-7310-5522>.

**References**

- [1] Bellman R. (1943) The Stability of Solutions of Linear Differential Equations. *Duke Mathematical Journal*. 10, pp. 643-647
- [2] Nemytskiy V.V., Stepanov V.V. (1949) *Qualitative Theory of Differential Equations*. Gostekhizdat. Moscow. pp.265-271
- [3] Bihari I. (1956) A generalization of a lemma of Bellman and its applications to uniqueness problems of differential equations, *Acta Math. Hung.* pp. 81-94.
- [4] Langenhop C.E. (1960) Bounds on the Norm of a Solution of a General Differential Equation, *Proceedings of the American Mathematical Society*. 11, p. 795-799.
- [5] Lax P.D. (1954) The initial value problem for nonlinear hyperbolic equations in two independent variables, Chapter 12, *Annals Math. Studies*, No., Princeton, N. J., Princeton University Press. pp. 120-135.
- [6] Abdeldaim A. and Yakout M. (2011) On Some New Integral Inequalities of Gronwall-Bellman-Pachpatte Type. *Applied Mathematics and Computation*. 217, pp.7887-7899. <http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2011.02.093>
- [7] Pachpatte B.G. (2001) On Some Fundamental Integral Inequalities and Their Discrete Analogues. *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*. 2, Article 15.
- [8] Pachpatte B.G. (1994) On Some Fundamental Integral Inequalities Arising in the Theory of Differential Equations. *Chinese Journal of Mathematics*. 22, pp.261-273.
- [9] Pachpatte B.G. (1996) Comparison Theorems Related to a Certain Inequality Used in the Theory of Differential Equations. *Soochow Journal of Mathematics*. 22, pp.383-394.
- [10] Bainov D. and Simeonov P. (1992) *Integral Inequalities and Applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- [11] Mitrinovic D.S., Pecaric J.E. and Fink A.M. (1991) *Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- [12] Beckenbach E.F. and Bellman R. (1961) *Inequalities*. Springer-Verlag, New York. <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-64971-4>
- [13] L. Guiliano, Generalizzazioni di un lemma di Gronwall. *Rend. Accad., Lincei*, 1946, 1264-1271.
- [14] Dragomir S.S. and Kim Y.H. (2002) On Certain New Integral Inequalities and Their Applications. *JIPAM*, 3, Article 65.

[15] Dragomir S.S. and Kim Y.H. (2003) Some Integral Inequalities for Functions of Two Variables. *Electronic Journal of Differential Equations*. 10, pp.1-13.

[16] Gronwall T.H. (1919) Note on the Derivatives with Respect to a Parameter of Solutions of a System of Differential Equations. *Annals of Mathematics*. 20, pp. 292-296. <http://dx.doi.org/10.2307/1967124>

[17] Agarwal Ravi P. (2000) Difference Equations and Inequalities - Theory, Methods, and Applications. A Series of Monographs and Textbooks. New York, pp. 184-186.

[18] Pachpatte B.G., Ames W.F. (1998) Inequalities for differential and integral equations. ISBN 0125434308. pp.117-126

[19] Бопарев К.В. (1997) Stability of differential dynamic systems in critical and close to critical cases (in the absence and presence of resonance): abstract.

[20] Бопарев К.В., Ескендинова Я.В. (2009) Stability of nonlinear difference-dynamic systems in the first approximation: *Mathematical journal*. Almaty, № 3 (33), pp. 28–33

[21] Мухамбетжанов С.Т., Ескендинова Е.В. Об устойчивости разностно-динамических систем (РДС) по первому приближению // International Electronic Periodical Edition «KAZAKHSTAN SCIENCE JOURNAL», Том-3 № 11 (24), ноябрь – 2020.

---

---

**Publication Ethics and Publication Malpractice  
in the journals of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan**

For information on Ethics in publishing and Ethical guidelines for journal publication see <http://www.elsevier.com/publishingethics> and <http://www.elsevier.com/journal-authors/ethics>.

Submission of an article to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan implies that the described work has not been published previously (except in the form of an abstract or as part of a published lecture or academic thesis or as an electronic preprint, see <http://www.elsevier.com/postingpolicy>), that it is not under consideration for publication elsewhere, that its publication is approved by all authors and tacitly or explicitly by the responsible authorities where the work was carried out, and that, if accepted, it will not be published elsewhere in the same form, in English or in any other language, including electronically without the written consent of the copyright-holder. In particular, translations into English of papers already published in another language are not accepted.

No other forms of scientific misconduct are allowed, such as plagiarism, falsification, fraudulent data, incorrect interpretation of other works, incorrect citations, etc. The National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan follows the Code of Conduct of the Committee on Publication Ethics (COPE), and follows the COPE Flowcharts for Resolving Cases of Suspected Misconduct ([http://publicationethics.org/files/u2/New\\_Code.pdf](http://publicationethics.org/files/u2/New_Code.pdf)). To verify originality, your article may be checked by the Cross Check originality detection service <http://www.elsevier.com/editors/plagdetect>.

The authors are obliged to participate in peer review process and be ready to provide corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. All authors of a paper should have significantly contributed to the research.

The reviewers should provide objective judgments and should point out relevant published works which are not yet cited. Reviewed articles should be treated confidentially. The reviewers will be chosen in such a way that there is no conflict of interests with respect to the research, the authors and/or the research funders.

The editors have complete responsibility and authority to reject or accept a paper, and they will only accept a paper when reasonably certain. They will preserve anonymity of reviewers and promote publication of corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. The acceptance of a paper automatically implies the copyright transfer to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.

The Editorial Board of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan will monitor and safeguard publishing ethics.

(Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайтах:

[www:nauka-nanrk.kz](http://www.nauka-nanrk.kz)

<http://physics-mathematics.kz/index.php/en/archive>

**ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)**

Редакторы: *М.С. Ахметова, Р.Ж. Мрзабаева, Д.С. Аленов*  
Верстка на компьютере *В.С. Зикирбаева*

Подписано в печать 12.06.2021.  
Формат 60x881/8. Бумага офсетная. Печать – ризограф.  
11 п.л. Тираж 300. Заказ 3.