

ISSN 1991-346X

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ

Х А Б А Р Л А Р Ы

ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА
СЕРИЯСЫ**



СЕРИЯ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ



**PHYSICO-MATHEMATICAL
SERIES**

1 (299)

**ҚАҢТАР – АҚПАН 2015 ж.
ЯНВАРЬ – ФЕВРАЛЬ 2015 г.
JANUARY – FEBRUARY 2015**

1963 ЖЫЛДЫҢ ҚАҢТАР АЙЫНАН ШЫҒА БАСТАҒАН
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1963 ГОДА
PUBLISHED SINCE JANUARY 1963

ЖЫЛЫНА 6 РЕТ ШЫҒАДЫ
ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД
PUBLISHED 6 TIMES A YEAR

АЛМАТЫ, ҚР ҰҒА
АЛМАТЫ, НАН РК
ALMATY, NAS RK

Б а с р е д а к т о р

ҚР ҰҒА академигі,

Мұтанов Г. М.

Р е д а к ц и я а л қ а с ы:

физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Әшімов А.А.**; техн. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Байғұнчечков Ж.Ж.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Жұмаділдаев А.С.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Қалменов Т.Ш.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Мұқашев Б.Н.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Өтелбаев М.О.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Тәкібаев Н.Ж.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Харин С.Н.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Әбішев М.Е.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Жантаев Ж.Ш.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Қалимолдаев М.Н.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Косов В.Н.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Мұсабаев Т.А.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Ойнаров Р.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Рамазанов Т.С.** (бас редактордың орынбасары); физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Темірбеков Н.М.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Өмірбаев У.У.**

Р е д а к ц и я к ең е с і:

Украинаның ҰҒА академигі **И.Н. Вишневский** (Украина); Украинаның ҰҒА академигі **А.М. Ковалев** (Украина); Беларусь Республикасының ҰҒА академигі **А.А. Михалевич** (Беларусь); Әзірбайжан ҰҒА академигі **А. Пашаев** (Әзірбайжан); Молдова Республикасының ҰҒА академигі **И. Тигиняну** (Молдова); мед. ғ. докторы, проф. **Иозеф Банас** (Польша)

Главный редактор

академик НАН РК

Г. М. Мутанов

Редакционная коллегия:

доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **А.А. Ашимов**; доктор техн. наук, проф., академик НАН РК **Ж.Ж. Байгунчеков**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **А.С. Джумадильдаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **Т.Ш. Кальменов**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **Б.Н. Мукашев**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **М.О. Отелбаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **Н.Ж. Такибаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **С.Н. Харин**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **М.Е. Абишев**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Ж.Ш. Жантаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **М.Н. Калимолдаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **В.Н. Косов**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Т.А. Мусабаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Р. Ойнаров**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Т.С. Рамазанов** (заместитель главного редактора); доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Н.М. Темирбеков**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **У.У. Умирбаев**

Редакционный совет:

академик НАН Украины **И.Н. Вишневский** (Украина); академик НАН Украины **А.М. Ковалев** (Украина); академик НАН Республики Беларусь **А.А. Михалевич** (Беларусь); академик НАН Азербайджанской Республики **А. Пашаев** (Азербайджан); академик НАН Республики Молдова **И. Тигиняну** (Молдова); д. мед. н., проф. **Иозеф Банас** (Польша)

«Известия НАН РК. Серия физико-математическая». ISSN 1991-346X

Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы)

Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации и архивов Министерства культуры и информации Республики Казахстан №5543-Ж, выданное 01.06.2006 г.

Периодичность: 6 раз в год.

Тираж: 300 экземпляров.

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, ком. 219, 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,

www.nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

© Национальная академия наук Республики Казахстан, 2015

Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75.

Editor in chief

G. M. Mutanov,
academician of NAS RK

Editorial board:

A.A. Ashimov, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **Zh.Zh. Baigunchekov**, dr. eng. sc., prof., academician of NAS RK; **A.S. Dzhumadildayev**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **T.S. Kalmenov**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **B.N. Mukhashev**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **M.O. Otelbayev**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **N.Zh. Takibayev**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **S.N. Kharin**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **M.Ye. Abishev**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **Zh.Sh. Zhantayev**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **M.N. Kalimoldayev**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **V.N. Kosov**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **T.A. Mussabayev**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **R. Oinarov**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **T.S. Ramazanov**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK (deputy editor); **N.M. Temirbekov**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **U.U. Umirbayev**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK

Editorial staff:

I.N. Vishnievski, NAS Ukraine academician (Ukraine); **A.M. Kovalev**, NAS Ukraine academician (Ukraine); **A.A. Mikhalevich**, NAS Belarus academician (Belarus); **A. Pashayev**, NAS Azerbaijan academician (Azerbaijan); **I. Tighineanu**, NAS Moldova academician (Moldova); **Joseph Banas**, prof. (Poland).

News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physical-mathematical series.
ISSN 1991-346X

Owner: RPA "National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan" (Almaty)

The certificate of registration of a periodic printed publication in the Committee of information and archives of the Ministry of culture and information of the Republic of Kazakhstan N 5543-Ж, issued 01.06.2006

Periodicity: 6 times a year

Circulation: 300 copies

Editorial address: 28, Shevchenko str., of. 219, 220, Almaty, 050010, tel. 272-13-19, 272-13-18,

www.nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

© National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, 2015

Address of printing house: ST "Aruna", 75, Muratbayev str, Almaty

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 1, Number 299 (2015), 5 – 13

BINARY CONVEXITY RANK IN WEAKLY O-MINIMAL STRUCTURES

B. Sh. Kulpeshov

International Information Technology University, Almaty, Kazakhstan.

E-mail: b.kulpeshov@iitu.kz

Key words: weak o-minimality, countable categoricity, convexity rank, orthogonality of types, unary function.

Abstract. In this work countably categorical weakly o-minimal structures are studied. A criterion for equality of the binary convexity ranks of non-weakly orthogonal types in terms of behavior of a unary function has been obtained.

УДК 510.67

БИНАРНЫЙ РАНГ ВЫПУКЛОСТИ В СЛАБО О-МИНИМАЛЬНЫХ СТРУКТУРАХ

Б. Ш. Кулпешов

Международный университет информационных технологий, Алматы, Казахстан

Ключевые слова: слабая о-минимальность, счетная категоричность, ранг выпуклости, ортогональность типов, унарная функция.

Аннотация. В настоящей работе исследуются счетно-категоричные слабо о-минимальные структуры. Найден критерий равенства бинарных рангов выпуклости не слабо ортогональных типов в терминах поведения унарной функции.

1. Предварительные сведения.

Настоящая работа касается понятия слабой о-минимальности, первоначально глубоко исследованного Д. Макферсоном, Д. Маркером и Ч. Стейнхорном в [1]. Подмножество A линейно упорядоченной структуры M называется *выпуклым*, если для любых $a, b \in A$ и $c \in M$ всякий раз, когда $a < c < b$ мы имеем $c \in A$. Слабо о-минимальной структурой называется линейно упорядоченная структура $M = \langle M, =, <, \dots \rangle$ такая, что любое определенное (с параметрами) подмножество структуры M является объединением конечного числа выпуклых множеств в M . Напомним, что такая структура M называется *о-минимальной*, если каждое определенное (с параметрами) подмножество структуры M является объединением конечного числа интервалов и точек в M . Таким образом, слабая о-минимальность является обобщением о-минимальности.

Определение 1.1. [2] Пусть T – слабо о-минимальная теория, M – достаточно насыщенная модель теории T , и пусть $\phi(x, \bar{a}), \bar{a} \in M$ – произвольная формула с одной свободной переменной.

Ранг выпуклости формулы $\phi(x, \bar{a})$ ($RC(\phi(x, \bar{a}))$) определяется следующим образом:

1) $RC(\phi(x, \bar{a})) \geq 0$, если $M \models \exists x \phi(x, \bar{a})$.

2) $RC(\phi(x, \bar{a})) \geq 1$, если $\phi(M, \bar{a})$ бесконечно.

3) $RC(\phi(x, \bar{a})) \geq \alpha + 1$, если существует параметрически определенное отношение эквивалентности $E(x, y)$ такое, что существуют $b_i, i \in \omega$, которые удовлетворяют следующему:

– Для любых $i, j \in \omega$, всякий раз, когда $i \neq j$ мы имеем $M \models \neg E(b_i, b_j)$

– Для каждого $i \in \omega$ $RC(E(x, b_i)) \geq \alpha$ и $E(M, b_i)$ – выпуклое подмножество множества $\phi(M, \bar{a})$

4) $RC(\phi(x, \bar{a})) \geq \delta$, если $RC(\phi(x, \bar{a})) \geq \alpha$ для всех $\alpha \leq \delta$ (δ предельный).

Если $RC(\phi(x, \bar{a})) = \alpha$ для некоторого α , то мы говорим, что $RC(\phi(x, \bar{a}))$ определяется. В противном случае (т.е. если $RC(\phi(x, \bar{a})) \geq \alpha$ для всех α), мы полагаем $RC(\phi(x, \bar{a})) = \infty$.

Определение 1.2. (Байжанов Б.С., [3]) Пусть M – слабо о-минимальная структура, $A, B \subseteq M$, $M - |A|^+$ -насыщенна, $p, q \in S_1(A)$ – неалгебраические. Будем говорить, что тип p не является слабо ортогональным типу q , если существуют A -определимая формула $H(x, y), \alpha \in p(M)$ и $\beta_1, \beta_2 \in q(M)$ такие что $\beta_1 \in H(M, \alpha)$ и $\beta_2 \notin H(M, \alpha)$.

Лемма 1.3. ([3], Corollary 34 (iii)) Отношение неслабой ортогональности 1-типов является отношением эквивалентности на $S_1(A)$.

Вспомним некоторые понятия, первоначально введенные в [1]. Пусть $Y \subset M^{n+1}$ – \emptyset -определимо, пусть $\pi : M^{n+1} \rightarrow M^n$ – проекция, которая отбрасывает последнюю координату, и пусть $Z := \pi(Y)$. Для каждого $\bar{a} \in Z$ пусть $Y_{\bar{a}} := \{y : (\bar{a}, y) \in Y\}$. Предположим, что для каждого $\bar{a} \in Z$ множество $Y_{\bar{a}}$ ограничено сверху, но не имеет супремума в M . Пусть \sim – \emptyset -определимое отношение эквивалентности на M^n , определяемое следующим образом:

$$\bar{a} \sim \bar{b} \text{ для всех } \bar{a}, \bar{b} \in M^n \setminus Z, \text{ и } \bar{a} \sim \bar{b} \Leftrightarrow \sup Y_{\bar{a}} = \sup Y_{\bar{b}}, \text{ если } \bar{a}, \bar{b} \in Z$$

Пусть $\bar{Z} := Z / \sim$, и для каждого кортежа $\bar{a} \in Z$ мы обозначаем через $[\bar{a}]$ \sim -класс кортежа \bar{a} .

Существует естественный \emptyset -определимый линейный порядок на $M \cup \bar{Z}$, определяемый следующим образом. Пусть $\bar{a} \in Z$ и $c \in M$. Тогда $[\bar{a}] < c$ тогда и только тогда, когда $w < c$ для всех $w \in Y_{\bar{a}}$. Если кортежи \bar{a} и \bar{b} не эквивалентны относительно \sim , то существует некоторый $x \in M$ такой, что $[\bar{a}] < x < [\bar{b}]$ или $[\bar{b}] < x < [\bar{a}]$, и поэтому $<$ индуцирует линейный порядок на $M \cup \bar{Z}$. Мы называем такое множество \bar{Z} сортом (в данном случае, \emptyset -определимым сортом) в \bar{M} , где \bar{M} – Дедекиндово пополнение структуры M , и обозреваем \bar{Z} как естественно вложенную в \bar{M} . Аналогично мы можем получить сорт в \bar{M} , рассматривая инфимумы вместо супремумов.

Определение 1.4. [1] Пусть M – линейно упорядоченная структура, $D \subseteq M$ – бесконечно, $K \subseteq \bar{M}$, $f : D \rightarrow K$ – функция. Будем говорить, что f является локально возрастающей (локально убывающей, локально константой) на D , если для любого $x \in D$ существует бесконечный интервал $J \subseteq D$, содержащий x , так что f является строго возрастающей (строго убывающей, константой) на J .

Будем также говорить, что функция f является *локально монотонной* на множестве $D \subseteq M$, если f является либо локально возрастающей, либо локально убывающей на D .

Пусть f – A -определимая функция на $D \subseteq M$, E – A -определимое отношение эквивалентности на D . Мы говорим, что f – *строго возрастающая (убывающая) на D/E* , если для любых $a, b \in D$ с условием $\neg E(a, b)$ мы имеем $f(a) < f(b)$ ($f(a) > f(b)$).

Определение 1.5. (Вербовский В.В., [4, 5]) Пусть M – слабо о-минимальная структура, B , $D \subseteq M$, $A \subseteq \bar{M}$ – B -определимый сорт и $f : D \rightarrow A$ – B -определимая функция, являющаяся локально возрастающей (убывающей) на D . Будем говорить, что функция f *имеет глубину n* на множестве D , если существуют отношения эквивалентности $E_1(x, y), \dots, E_n(x, y)$, разбивающие D на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, так что для любого $2 \leq i \leq n$ каждый E_i -класс разбивается на бесконечное число бесконечных выпуклых E_{i-1} -подклассов и выполняется следующее:

- f является строго возрастающей (убывающей) на каждом E_1 -классе
- f является локально убывающей (возрастающей) на D/E_k для любого нечетного $k \leq n$
- f является локально возрастающей (убывающей) на D/E_k для любого четного $k \leq n$
- f является строго монотонной на D/E_n .

В этом случае функцию f будем называть *локально возрастающей (убывающей) глубины n* .

Очевидно, что строго возрастающая (убывающая) функция является *локально возрастающей (убывающей) глубины 0*.

Теорема 1.6. (Вербовский В.В., [5]) Пусть T – слабо о-минимальная теория. Тогда любая функция в определимый сорт имеет конечную глубину.

Мы естественным образом расширяем Определение 1.5, вводя понятие *локально константной функции глубины n* , если в Определении 1.5 функция f является константой на каждом E_1 -классе. Заметим, что в этом случае функция f может быть как локально возрастающей, так и локально убывающей на D/E_1 . В нижеследующих примерах M – счетно категоричная слабо о-минимальная структура, а функция f является локально константой.

Пример 1.7. (Example 2.6.1, [1]) Пусть $M = \langle M, <, P_1^1, P_2^1, f^1 \rangle$ – линейно упорядоченная структура, так что M есть непересекающееся объединение интерпретаций унарных предикатов P_1 и P_2 , при этом $P_1(M) < P_2(M)$. Мы отождествляем интерпретацию P_2 с Q , упорядоченной как обычно, а P_1 с $Q \times Q$, упорядоченной лексикографически. Символ f интерпретируется частичной унарной функцией с $Dom(f) = P_1(M)$ и $Range(f) = P_2(M)$ и определяется посредством $f((n, m)) = n$ для всех $(n, m) \in Q \times Q$.

Пусть $p := \{P_1(x)\}$, $q := \{P_2(x)\}$. Очевидно, что $p, q \in S_1(\emptyset)$. Возьмем произвольный $a \in p(M)$. Тогда существует единственный $b \in q(M)$ такой, что $f(a) = b$, т.е. $b \in dcl(\{a\})$.

Рассмотрим следующую формулу:

$$E(x, y) := P_1(x) \wedge P_1(y) \wedge \exists z [P_2(z) \wedge f(x) = z \wedge f(y) = z]$$

Можно понять, что $E(x, y)$ – \emptyset -определимое отношение эквивалентности, разбивающее $p(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов. Утверждаем, что f – локально константа глубины 1 на $P_1(M)$, т.е. f – константа на каждом E -классе и f – строго возрастающая на $P_1(M)/E$.

Пример 1.8. Пусть $M = \langle M, <, P_1^1, P_2^1, E_1^p, E_2^p, E_1^q, f^1 \rangle$ – линейно упорядоченная структура, так что M есть непересекающееся объединение интерпретаций унарных предикатов P_1 и P_2 , при

этом $P_1(M) < P_2(M)$. Мы отождествляем интерпретацию P_1 с $Q \times Q \times Q$, упорядоченной лексикографически, а P_2 с $Q \times Q$, также упорядоченной лексикографически. Интерпретации бинарных предикатов $E_1^p(x, y)$ и $E_2^p(x, y)$ – это отношения эквивалентности на $P_1(M)$ такие, что для всех $x = (n_1, m_1, l_1), y = (n_2, m_2, l_2) \in Q \times Q \times Q$ $E_1^p(x, y) \Leftrightarrow n_1 = n_2 \wedge m_1 = m_2$ и $E_2^p(x, y) \Leftrightarrow n_1 = n_2$. Аналогично определяется интерпретация бинарного предиката $E_1^q(x, y)$: это отношение эквивалентности на $P_2(M)$ такое, что для всех $x = (n_1, m_1), y = (n_2, m_2) \in Q \times Q$

$$E_1^q(x, y) \Leftrightarrow n_1 = n_2$$

Символ f интерпретируется частичной унарной функцией с $Dom(f) = P_1(M)$ и $Range(f) = P_2(M)$ и определяется посредством $f((n, m, l)) = (-n, m)$ для всех $(n, m, l) \in Q \times Q \times Q$.

Утверждаем, что функция f является локально константой глубины 2 на $P_1(M)$, т.е. f – константа на каждом E_1^p -классе, f – строго возрастающая на каждом $E_2(a, M)/E_1$, где $a \in p(M)$, и f – строго убывающая на $p(M)/E_2$.

Если в Примере 1.8 f определить следующим образом: $f((n, m, l)) = (n, -m)$ для всех $(n, m, l) \in Q^3$, то получим, что f – локально константа глубины 2 на $P_1(M)$, при этом f – константа на каждом E_1^p -классе, f – строго убывающая на каждом $E_2(a, M)/E_1$, где $a \in p(M)$, и f – строго возрастающая на $p(M)/E_2$.

Если же в Примере 1.8 f определить следующим образом: $f((n, m, l)) = (-n, -m)$ для всех $(n, m, l) \in Q^3$, то получим, что f – локально константа глубины 1 на $P_1(M)$, при этом f – константа на каждом E_1^p -классе и f – строго убывающая на $p(M)/E_1$.

Пример 1.9. Пусть $M = \langle M, <, P_1^1, P_2^1, E_1^p, E_2^p, \dots, E_{n-1}^p, E_1^q, E_2^q, \dots, E_{k-1}^q, f^1 \rangle$ (где $k < n$) – линейно упорядоченная структура, так что M есть непересекающееся объединение интерпретаций унарных предикатов P_1 и P_2 , при этом $P_1(M) < P_2(M)$. Мы отождествляем интерпретацию P_1 с Q^n , упорядоченной лексикографически, а P_2 с Q^k , также упорядоченной лексикографически. Интерпретации бинарных предикатов $E_1^p(x, y), \dots, E_{n-1}^p(x, y)$ – это отношения эквивалентности на $P_1(M)$ такие, что для всех $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in Q^n$ и для любого $1 \leq i \leq n-1$

$$E_i^p(x, y) \Leftrightarrow x_1 = y_1 \wedge \dots \wedge x_{n-i} = y_{n-i}$$

Аналогично определяются интерпретации бинарных предикатов $E_1^q(x, y), \dots, E_{k-1}^q(x, y)$: это отношения эквивалентности на $P_2(M)$ такие, что для всех $x = (x_1, x_2, \dots, x_k), y = (y_1, y_2, \dots, y_k) \in Q^k$ и для любого $1 \leq i \leq k-1$

$$E_i^q(x, y) \Leftrightarrow x_1 = y_1 \wedge \dots \wedge x_{k-i} = y_{k-i}$$

Символ f интерпретируется частичной унарной функцией с $Dom(f) = P_1(M)$ и $Range(f) = P_2(M)$ и определяется посредством

$$f((x_1, x_2, \dots, x_n)) = ((-1)^{k-1} x_1, (-1)^{k-2} x_2, \dots, (-1)^2 x_{k-2}, (-1)^1 x_{k-1}, x_k)$$
 для всех $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in Q^n$.

Очевидно, что $E_1^p(a, M) \subset E_2^p(a, M) \subset \dots \subset E_{n-1}^p(a, M)$ для всех $a \in P_1(M)$ и $E_1^q(b, M) \subset E_2^q(b, M) \subset \dots \subset E_{n-1}^q(b, M)$ для всех $b \in P_2(M)$. Утверждаем, что f – локально константа глубины k на $P_1(M)$, т.е. f – константа на каждом E_{n-k}^p -классе, f – строго

возрастающая на каждом $E_{n-k+1}^p(a, M) / E_{n-k}^p$, f – строго убывающая на каждом $E_{n-k+2}^p(a, M) / E_{n-k+1}^p, \dots$. И наконец, если $n-k$ – нечетное, то f – строго убывающая на $P_1(M) / E_{n-1}^p$; если же $n-k$ – четное, то f – строго возрастающая на $P_1(M) / E_{n-1}^p$.

2. Результаты.

Определение 2.1. [6] Рангом выпуклости 1-типа p ($RC(p)$) называется инфимум множества $\{RC(\phi(x)) \mid \phi(x) \in p\}$, т.е. $RC(p) := \inf\{RC(\phi(x)) \mid \phi(x) \in p\}$.

В Примере 1.7 имеем p не слабо ортогонален q , $dcl(\{a\}) \cap q(M) \neq \emptyset$ и $dcl(\{b\}) \cap p(M) = \emptyset$ для некоторых (любых) $a \in p(M), b \in q(M)$, $RC(p) = 2, RC(q) = 1$.

Ранг выпуклости произвольной одноместной формулы $\phi(x)$ назовем *бинарным* и будем обозначать через $RC_{bin}(\phi(x))$, если в Определении 1.1 параметрически определяемые отношения эквивалентности заменим на \emptyset -определимые (т.е. бинарные) отношения эквивалентности. Тогда очевидно, что в произвольной счетно категоричной слабо о-минимальной теории бинарный ранг выпуклости одноместной формулы конечен. Следовательно, для любого неалгебраического 1-типа $p \in S_1(\emptyset)$ выполняется $RC_{bin}(p) < \omega$.

Теорема 2.2. Пусть T – счетно категоричная слабо о-минимальная теория, $M \models T$, $p, q \in S_1(\emptyset)$ – неалгебраические, p не слабо ортогонален q , $dcl(\{a\}) \cap q(M) \neq \emptyset$ для некоторого $a \in p(M)$.

Тогда следующие условия эквивалентны:

- (1) $RC_{bin}(p) > RC_{bin}(q)$
- (2) Не существует \emptyset -определимой функции $f : p(M) \rightarrow q(M)$, являющейся биекцией $p(M)$ на $q(M)$
- (3) $dcl(\{b\}) \cap p(M) = \emptyset$ для любого $b \in q(M)$
- (4) Существует \emptyset -определимая функция $f : p(M) \rightarrow q(M)$, являющаяся локально константой на $p(M)$.

Доказательство Теоремы 2.2. Пусть для определенности $RC_{bin}(p) = n$. Тогда существуют \emptyset -определимые отношения эквивалентности $E_1(x, y), \dots, E_{n-1}(x, y)$, разбивающие $p(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, так что $E_1(a, M) \subset \dots \subset E_{n-1}(a, M)$ для некоторого (любого) $a \in p(M)$.

(1) \Rightarrow (2). Допустим противное: существует \emptyset -определимая функция $f : p(M) \rightarrow q(M)$, являющаяся биекцией $p(M)$ на $q(M)$. Рассмотрим следующие формулы:

$$E'_1(x, y) := U_q(x) \wedge U_q(y) \wedge \exists t_1 \exists t_2 [U_p(t_1) \wedge U_p(t_2) \wedge E_1(t_1, t_2) \wedge f(t_1) = x \wedge f(t_2) = y]$$

$$\dots \dots \dots$$

$$E'_{n-1}(x, y) := U_q(x) \wedge U_q(y) \wedge \exists t_1 \exists t_2 [U_p(t_1) \wedge U_p(t_2) \wedge E_{n-1}(t_1, t_2) \wedge f(t_1) = x \wedge f(t_2) = y]$$

Очевидно, что $E'_1(x, y), \dots, E'_{n-1}(x, y)$ – отношения эквивалентности, разбивающие $q(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, причем $E'_1(b, M) \subset \dots \subset E'_{n-1}(b, M)$, откуда $RC_{bin}(q) \geq n$, противоречия условию.

(2) \Rightarrow (3). Поскольку $dcl(\{a\}) \cap q(M) \neq \emptyset$, то существуют $b \in q(M)$ и \emptyset -определимая формула $\phi(x, y)$ такие, что $M \models \exists! y \phi(a, y) \wedge \phi(a, b)$. Допустим противное: $dcl(\{b\}) \cap p(M) \neq \emptyset$. Поймем, что $a \in dcl(\{b\})$. Если это не так, то существует $a_1 \in p(M)$ такой, что $a_1 \neq a$ и $a_1 \in dcl(\{b\})$. Но тогда поскольку $b \in dcl(\{a\})$, мы имеем что $a_1 \in dcl(\{a\})$. Тогда можно доказать, что $dcl(\{a\})$ бесконечно, противоречия счетной категоричности. Таким

образом, $a \in dcl(\{b\})$. Но тогда существует \emptyset -определимая формула $\phi'(x, y)$ такая, что $M \models \exists! y \phi'(a, y) \wedge \exists! x \phi'(x, b) \wedge \phi'(a, b)$.

Определим функцию f следующим образом: $f(a) = b \Leftrightarrow \phi'(a, b)$. Нетрудно понять, что f биективно отображает $p(M)$ на $q(M)$, противореча нашему предположению.

(3) \Rightarrow (4). Допустим противное: $f : p(M) \rightarrow q(M)$ – \emptyset -определимая функция и f не является локально константой на $p(M)$. Тогда f должна быть локально монотонной на $p(M)$, т.е. либо локально возрастающей, либо локально убывающей. Но тогда f биективно отображает $p(M)$ на $q(M)$, противореча ранее доказанному.

(4) \Rightarrow (1). Пусть $f : p(M) \rightarrow q(M)$ – \emptyset -определимая функция, являющаяся локально константой на $p(M)$. Рассмотрим следующую формулу:

$$E(x, y) := U_q(x) \wedge U_q(y) \wedge [x < y \rightarrow \forall t(x < t < y \rightarrow f(x) = f(t) = f(y)] \wedge \\ \wedge [x > y \rightarrow \forall t(x > t > y \rightarrow f(x) = f(t) = f(y)]$$

Нетрудно понять, что $E(x, y)$ – отношение эквивалентности, разбивающее $p(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов.

Очевидно, что для некоторого $1 \leq i \leq n-1$ $E(x, y) \equiv E_i(x, y)$. Тогда утверждаем, что $RC_{bin}(q) = n - i$. Действительно, f является константой на каждом E_i -классе. Далее рассмотрим поведение функции f на каждом $E_{i+1}(a, M)/E_i$, где $a \in p(M)$. Она должна быть строго монотонной на каждом $E_{i+1}(a, M)/E_i$, иначе появится \emptyset -определимое отношение эквивалентности $\bar{E}(x, y)$ такое, что $E_i(a, M) \subset \bar{E}(a, M) \subset E_{i+1}(a, M)$, противореча тому, что E_{i+1} является непосредственным последователем отношения E_i среди всех \emptyset -определимых отношений на $p(M)$. Аналогично доказывается, что f является строго монотонной на каждом $E_{k+1}(a, M)/E_k$, где $i \leq k \leq n-2$ и f является строго монотонной на $p(M)/E_{n-1}$.

Рассмотрим следующие формулы:

$$E'_{i+1}(x, y) := U_q(x) \wedge U_q(y) \wedge \exists t_1 \exists t_2 [U_p(t_1) \wedge U_p(t_2) \wedge E_{i+1}(t_1, t_2) \wedge f(t_1) = x \wedge f(t_2) = y]$$

.....

$$E'_{n-1}(x, y) := U_q(x) \wedge U_q(y) \wedge \exists t_1 \exists t_2 [U_p(t_1) \wedge U_p(t_2) \wedge E_{n-1}(t_1, t_2) \wedge f(t_1) = x \wedge f(t_2) = y]$$

Очевидно, что $E'_{i+1}(x, y), \dots, E'_{n-1}(x, y)$ – отношения эквивалентности, разбивающие $q(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, причем $E'_{i+1}(b, M) \subset \dots \subset E'_{n-1}(b, M)$, откуда $RC_{bin}(q) \geq n - i$. Далее, если существует \emptyset -определимое отношение эквивалентности $E^q(x, y)$, разбивающее $q(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, причем $E^q(b, M) \subset E'_{i+1}(b, M)$, то рассмотрим следующую формулу:

$$\hat{E}(x, y) := U_p(x) \wedge U_p(y) \wedge \exists t_1 \exists t_2 [U_q(t_1) \wedge U_q(t_2) \wedge E^q(t_1, t_2) \wedge f(x) = t_1 \wedge f(y) = t_2]$$

Очевидно, что $E_i(a, M) \subset \hat{E}(a, M) \subset E_{i+1}(a, M)$, опять противореча тому, что E_{i+1} является непосредственным последователем отношения E_i среди всех \emptyset -определимых отношений на $p(M)$. Аналогично доказывается, что не существует \emptyset -определимого отношения эквивалентности $E^q(x, y)$, разбивающего $q(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, причем $E'_k(b, M) \subset E^q(b, M) \subset E'_{k+1}(b, M)$ для любого $i+1 \leq k \leq n-2$ или $E'_{n-1}(b, M) \subset E^q(b, M)$. Таким образом, $RC_{bin}(q) = n - i$. \square

Далее понадобится понятие (p_1, p_2) -сектора, введенное в [6]. Пусть $A \subseteq M, p_1, p_2 \in S_1(A)$ – неалгебраические, p_1 не слабо ортогонален p_2 . Мы говорим что A -определимая формула $\phi(x, y)$ является (p_1, p_2) -секатором, если существует $a \in p_1(M)$ такой, что $\phi(a, M) \subset p_2(M)$, $\phi(a, M)$ выпукло и $\phi(a, M)^- = p_2(M)^-$. Если $\phi_1(x, y), \phi_2(x, y)$ – (p_1, p_2) -секаторы, то мы говорим что $\phi_1(x, y)$ меньше чем $\phi_2(x, y)$, если существует $a \in p_1(M)$ такой, что $\phi_1(a, M) \subset \phi_2(a, M)$. Очевидно что если $p_1, p_2 \in S_1(A)$ – неалгебраические, p_1 неслабо ортогонален p_2 , тогда существует (p_1, p_2) -секатор и множество всех (p_1, p_2) -секаторов линейно упорядочено. Также очевидно что для любого (p_1, p_2) -секатора $\phi(x, y)$ $f(x) := \sup \phi(x, M)$ не является константой на $p_1(M)$.

Теорема 2.3. Пусть T – счетно категоричная слабо о-минимальная теория, $p, q \in S_1(\emptyset)$ – неалгебраические, p неслабо ортогонален q . Тогда следующие условия эквивалентны:

(1) $RC_{bin}(p) > RC_{bin}(q)$

(2) Для любого (p, q) -секатора $R(x, y)$ существует \emptyset -определимое отношение эквивалентности $E(x, y)$, разбивающее $p(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, так что $f(x) := \sup R(x, M)$ является константой на каждом E -классе.

Доказательство Теоремы 2.3. Пусть для определенности $RC_{bin}(p) = n$. Тогда существуют \emptyset -определимые отношения эквивалентности $E_1(x, y), \dots, E_{n-1}(x, y)$, разбивающие $p(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, так что $E_1(a, M) \subset \dots \subset E_{n-1}(a, M)$ для некоторого (любого) $a \in p(M)$.

(\Rightarrow) Предположим, что $RC_{bin}(p) > RC_{bin}(q)$. Допустим противное: существует (p, q) -секатор $R(x, y)$ такой, что для любого \emptyset -определимого отношения эквивалентности $E(x, y)$, разбивающего $p(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, функция $f(x) := \sup R(x, M)$ не является константой на каждом E -классе. Тогда f не является константой на каждом E_1 -классе. Но тогда f должна быть строго монотонной (строго возрастающей или строго убывающей) на каждом E_1 -классе. Действительно, f не может локально монотонной (не строго монотонной) на каждом E_1 -классе, иначе появится \emptyset -определимое отношение эквивалентности $E_0(x, y)$, разбивающее $p(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, так что $E_0(a, M) \subset E_1(a, M)$ для некоторого (любого) $a \in p(M)$, противореча тому, что $E_1(x, y)$ – минимальное среди \emptyset -определимых нетривиальных отношений эквивалентности на $p(M)$.

Далее рассмотрим поведение функции f на каждом $E_2(a, M)/E_1$, где $a \in p(M)$. Она должна быть строго монотонной на каждом $E_2(a, M)/E_1$, иначе появится \emptyset -определимое отношение эквивалентности $\bar{E}(x, y)$ такое, что $E_1(a, M) \subset \bar{E}(a, M) \subset E_2(a, M)$, противореча тому, что E_2 является непосредственным последователем отношения E_1 среди всех \emptyset -определимых отношений на $p(M)$. Аналогично доказывается, что f является строго монотонной на каждом $E_{k+1}(a, M)/E_k$, где $1 \leq k \leq n - 2$ и f является строго монотонной на $p(M)/E_{n-1}$.

Рассмотрим следующие формулы:

$$E'_1(x, y) := [x \leq y \rightarrow \exists t_1 \exists t_2 (E_1(t_1, t_2) \wedge f(t_1) < x \leq y < f(t_2))] \wedge$$

$$[x > y \rightarrow \exists t_1 \exists t_2 (E_1(t_1, t_2) \wedge f(t_1) < y < x < f(t_2))]$$

.....

$$E'_{n-1}(x, y) := [x \leq y \rightarrow \exists t_1 \exists t_2 (E_{n-1}(t_1, t_2) \wedge f(t_1) < x \leq y < f(t_2))] \wedge$$

$$[x > y \rightarrow \exists t_1 \exists t_2 (E_{n-1}(t_1, t_2) \wedge f(t_1) < y < x < f(t_2))]$$

Можно понять, что $E'_1(x, y), \dots, E'_{n-1}(x, y)$ – отношения эквивалентности, разбивающие $q(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, причем $E'_1(b, M) \subset \dots \subset E'_{n-1}(b, M)$, откуда $RC_{bin}(q) \geq n$, противоречия нашему предположению.

(\Leftarrow) Пусть для любого (p, q) -секатора $R(x, y)$ существует \emptyset -определимое отношение эквивалентности $E(x, y)$, разбивающее $p(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, так что $f(x) := \sup R(x, M)$ является константой на каждом E -классе. Поймем, что $RC_{bin}(p) > RC_{bin}(q)$. Возьмем произвольный (p, q) -секатор $R(x, y)$. Согласно предположению существует \emptyset -определимое отношение эквивалентности $E(x, y)$, разбивающее $p(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, так что $f(x) := \sup R(x, M)$ является константой на каждом E -классе. Предположим, что $E(x, y)$ – максимальное с таким свойством. Очевидно что для некоторого $1 \leq i \leq n-1$ $E(x, y) \equiv E_i(x, y)$. Далее рассмотрим поведение функции f на каждом $E_{i+1}(a, M)/E_i$, где $a \in p(M)$. Функция f не может быть константой на каждом $E_{i+1}(a, M)/E_i$, иначе f – константа на каждом E_{i+1} -классе, противоречия максимальной E_i с таким свойством. Следовательно, f должна быть строго монотонной на каждом $E_{i+1}(a, M)/E_i$, иначе если она локально монотонная (не строго монотонная) на каждом $E_{i+1}(a, M)/E_i$, то появится \emptyset -определимое отношение эквивалентности $\bar{E}(x, y)$ такое, что $E_i(a, M) \subset \bar{E}(a, M) \subset E_{i+1}(a, M)$, противоречия тому, что E_{i+1} является непосредственным последователем отношения E_i среди всех \emptyset -определимых отношений на $p(M)$. Аналогично доказывается, что f является строго монотонной на каждом $E_{k+1}(a, M)/E_k$, где $i \leq k \leq n-2$ и f является строго монотонной на $p(M)/E_{n-1}$. Рассмотрим следующие формулы:

$$E'_{i+1}(x, y) := U_q(x) \wedge U_q(y) \wedge \exists t_1 \exists t_2 [U_p(t_1) \wedge U_p(t_2) \wedge (E_{i+1}(t_1, t_2) \wedge f(t_1) < x < f(t_2) \wedge f(t_1) < y < f(t_2))]$$

$$E'_{n-1}(x, y) := U_q(x) \wedge U_q(y) \wedge \exists t_1 \exists t_2 [U_p(t_1) \wedge U_p(t_2) \wedge (E_{n-1}(t_1, t_2) \wedge f(t_1) < x < f(t_2) \wedge f(t_1) < y < f(t_2))]$$

Очевидно, что $E'_{i+1}(x, y), \dots, E'_{n-1}(x, y)$ – отношения эквивалентности, разбивающие $q(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, причем $E'_{i+1}(b, M) \subset \dots \subset E'_{n-1}(b, M)$, откуда $RC_{bin}(q) \geq n-i$. Далее, если существует \emptyset -определимое отношение эквивалентности $E^q(x, y)$, разбивающее $q(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, причем $E^q(b, M) \subset E'_{i+1}(b, M)$, то рассмотрим следующую формулу:

$$\hat{E}(x, y) := U_p(x) \wedge U_p(y) \wedge \exists t_1 \exists t_2 [E^q(t_1, t_2) \wedge f(x) < t_1 < f(y) \wedge f(x) < t_2 < f(y)]$$

Очевидно, что $E_i(a, M) \subset \hat{E}(a, M) \subset E_{i+1}(a, M)$, опять противоречия тому, что E_{i+1} является непосредственным последователем отношения E_i среди всех \emptyset -определимых отношений на $p(M)$. Аналогично доказывается, что не существует \emptyset -определимого отношения эквивалентности $E^q(x, y)$, разбивающего $q(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, причем $E'_k(b, M) \subset E^q(b, M) \subset E'_{k+1}(b, M)$ для любого $i+1 \leq k \leq n-2$ или $E'_{n-1}(b, M) \subset E^q(b, M)$. Таким образом, $RC_{bin}(q) = n-i$, т.е. $RC_{bin}(p) > RC_{bin}(q)$. \square

Следствие 2.4. Пусть T – счетно категоричная слабо о-минимальная теория, $p, q \in S_1(\emptyset)$ – неалгебраические, p неслабо ортогонален q . Тогда следующие условия эквивалентны:

$$(1) RC_{bin}(p) = RC_{bin}(q)$$

(2) Существует (p, q) -секатор $R(x, y)$ такой, что для любого \emptyset -определимого отношения эквивалентности $E(x, y)$, разбивающего $p(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, функция $f(x) := \sup R(x, M)$ не является константой на каждом E -классе.

(3) Существует (p, q) -секатор $R(x, y)$ такой, что функция $f(x) := \sup R(x, M)$ является локально монотонной (не локально константой) на $p(M)$.

В заключение отметим, что данные исследования поддержаны грантом КН МОН РК №0830/ГФ4 по теме «Классификационные вопросы генерических и упорядоченных структур, а также их элементарных теорий» в рамках приоритета «Интеллектуальный потенциал страны» (подприоритет «Фундаментальные исследования в области математики, механики, физики»).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Macpherson H.D., Marker D., Steinhorn C. Weakly o-minimal structures and real closed fields // Transactions of The American Mathematical Society. – 2000. – 352. – P. 5435-5483.
- [2] Kulpeshov B.Sh. Weakly o-minimal structures and some of their properties // The Journal of Symbolic Logic. – 1998. – 63. – P. 1511-1528.
- [3] Baizhanov B.S. Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by a family of unary predicates // The Journal of Symbolic Logic. – 2001. – 66. – P. 1382-1414.
- [4] Вербовский В.В. О глубине функций слабо о-минимальных структур и пример слабо о-минимальной структуры без слабо о-минимальной теории // Proceedings of Informatics and Control Problems Institute. – 1996. – С. 207-216.
- [5] Verbovskiy V.V. On formula depth of weakly o-minimal structures // Algebra and Model Theory / A. G. Pinus and K. N. Ponomaryov, editors. – Novosibirsk, 1997. – P. 209-223.
- [6] Kulpeshov B.Sh. Criterion for binarity of \aleph_0 -categorical weakly o-minimal theories // Annals of Pure and Applied Logic. – 2007. – N 2(45). – P. 354-367.

REFERENCES

- [1] Macpherson H.D. Marker D., Steinhorn C. Weakly o-minimal structures and real closed fields. Transactions of The American Mathematical Society, 352 (2000), pp. 5435-5483
- [2] Kulpeshov B.Sh. Weakly o-minimal structures and some of their properties. The Journal of Symbolic Logic, 63 (1998), pp. 1511-1528
- [3] Baizhanov B.S. Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by a family of unary predicate. The Journal of Symbolic Logic, 66 (2001), pp. 1382-1414
- [4] Verbovskiy V.V. About the depth of functions of weakly o-minimal structures and example of weakly o-minimal structure without weakly o-minimal theory. Proceedings of Informatics and Control Problems Institute, 1996, pp. 207-216.
- [5] Verbovskiy V.V. On formula depth of weakly o-minimal structures. Algebra and Model Theory, (A.G. Pinus and K.N. Ponomaryov, editors). Novosibirsk, 1997, pp. 209-223.
- [6] Kulpeshov B.Sh. Criterion for binarity of \aleph_0 -categorical weakly o-minimal theories. Annals of Pure and Applied Logic. 2007. N 2(45). P. 354-367.

ӘЛСІЗ О-МИНИМАЛДЫҚ ҚҰРЫЛЫМДАРДА БИНАРЛЫҚ ДӨНЕСТІК РАНГІ

Б. Ш. Кулпешов

Халықаралық ақпараттық технологиялар университеті, Алматы, Қазақстан

Тірек сөздер: әлсіз о-минималдық, есептік категориялық, дөңестік рангі, типтердің ортогоналдығы, унарлық функция.

Аннотация. Жұмыста есептік-категориялық әлсіз о-минималдық құрылымдар зерттеленді. Унарлық функцияның жүріс-тұрыс терминдерді қолданып әлсіз ортогоналдық емес типтердің бинарлық дөңестік рангілері тең болу критерийі табылды.

Поступила 27.01.2015 г.

Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайте:

www.nauka-nanrk.kz
physics-mathematics.kz

Редактор *М. С. Ахметова*
Верстка на компьютере *Д. Н. Калкабековой*

Подписано в печать 10.02.2015.
Формат 60x881/8. Бумага офсетная. Печать – ризограф.
4,7 п.л. Тираж 300. Заказ 1.