ISSN 1991-346X

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ

Х А Б А Р Л А Р Ы

ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

N E W S

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА СЕРИЯСЫ

♦

СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

♦

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

2 (300)

НАУРЫЗ – СӘУІР 2015 ж.
МАРТ – АПРЕЛЬ 2015 г.
MARCH – APRIL 2015

1963 ЖЫЛДЫҢ ҚАҢТАР АЙЫНАН ШЫҒА БАСТАҒАН
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1963 ГОДА
PUBLISHED SINCE JANUARY 1963

ЖЫЛЫНА 6 РЕТ ШЫҒАДЫ
ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД
PUBLISHED 6 TIMES A YEAR

АЛМАТЫ, ҚР ҰҒА
АЛМАТЫ, НАН РК
ALMATY, NAS RK

«Известия НАН РК. Серия физико-математическая». ISSN 1991-346X
Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы)
Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации и архивов Министерства культуры и информации Республики Казахстан **№5543-Ж**, выданное 01.06.2006 г.

Периодичность: 6 раз в год.
Тираж: 300 экземпляров.

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, ком. 219, 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,
www:nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75.

News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physical-mathematical series.
ISSN 1991-346X
Owner: RPA "National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan" (Almaty)
The certificate of registration of a periodic printed publication in the Committee of information and archives of the Ministry of culture and information of the Republic of Kazakhstan N 5543-Ж, issued 01.06.2006

Periodicity: 6 times a year
Circulation: 300 copies

Editorial address: 28, Shevchenko str., of. 219, 220, Almaty, 050010, tel. 272-13-19, 272-13-18,
www:nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

Address of printing house: ST "Aruna", 75, Muratbayev str, Almaty

N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 2, Number 300 (2015), 159 – 164

METHODS OF APPLICATION PROPERTIES OF THE SCALAR PRODUCT OF VECTORS TO SOLVE PROBLEMS IN THE METRIC SPACE

M. D. Shinibaev[1], N. A. Kassimova[2]

[1]South Kazakhstan state pedagogical institute, Shymkent, Kazakhstan,
[2]Regional social and innovative university, Shymkent, Kazakhstan

Keywords: vectors, property scalar product of vectors, geometric inequality, metric problems
Abstract. This paper discusses methods for solving problems using stereometric properties of vectors. Methods of application properties of the scalar proyzvedeniya vectors to solve problems in a metric space are carriet out. The paper also shows the main vector of the formula used in streometry. The results of the work are useful for teachers of mathematics teaching in the senior forms.

ОӘЖ 514.1

ВЕКТОРЛАРДЫҢ СКАЛЯР КӨБЕЙТІНДІЛЕРІНІҢ ҚАСИЕТТЕРІН ПАЙДАЛАНЫП КЕҢІСТІКТЕ МЕТРИКАЛЫҚ ЕСЕПТЕРДІ ШЫҒАРУ ӘДІСТЕРІ

М. Д. Шыныбаев[1], Н. А. Касимова[2]

[1]Оңтүстік Қазақстан педагогикалық институты, Шымкент, Қазақстан,
[2]Аймақтық әлеуметтік-инновациялық университеті, Шымкент, Қазақстан

Тірек сөздер: векторлар, векторларды скаляр көбетіндісінің қасиеттері, геометриялық теңсіздіктер метрикалық есептер.
Аннотация. Мақалада векторлардың аффиндік қасиеттерімен бірге, олардың скаляр көбейтінділерінің қасиеттерін пайдаланып кеңістіктегі метрикалық есептерді шығарудың әдістері қарастырылған.

Орта мектепте векторлар тақырыбын оқытқанымен оларды есептер шығаруда қолдануына аса көңіл бөлінбейді. Оқушылар математиканың теориясын қолданып өз бетінше есептер шығаруды үйренгенде ғана толық, нақты білім алған деп санау керек. Векторларды стереометриялық есептерді шығаруда қолдануды есептердің түрлеріне байланысты екі топқа бөлінді. Олар аффиндік және метрикалық деп аталды.

Метрикалық мазмұны бар есептерді шығару әдістерін қарастырамыз. Аффиндік есептерге қарағанда метрикалық есептер ауқымы кеңірек. Метрикалық мазмұны бар есептерді шығаруда аффиндік әдістермен қатар векторлардың скаляр көбейтіндісі қолданылады.

Метрикалық есептерді қойылымына байланысты келесідей бес топқа бөліп қарастыруға болады: арақашықтықтарды есептеу; бұрыштарды есептеу; векторларды жіктеу; нүктелер жиынын табу; геометриялық теңсіздіктер. Кейбір есептерді бірнеше түрге жатқызуға болады. Бұл топтағы есептер планиметриялық және стереометриялық болуы да мүмкін.

Бұл топтағы есептерді қарастырар алдында мектеп матемаика курсының бағдарламасында кездесетін келесі метрикалық-векторлық формулалар келтіріледі:

1. Кез келген үш нүкте A, B және C үшін $\vec{AB}\,\vec{AC} = \frac{1}{2}\left(|AB|^2 + |AC|^2 - |BC|^2\right)$

2. Кез келген екі вектор $\vec{a}$ және $\vec{b}$ үшін $\left(\vec{a}\,\vec{b}\right) \le \vec{a}^2\,\vec{b}^2$

3. Нольдік емес екі вектор үшін $\left(\vec{a}\,\vec{b}\right) = 0$ орындалады егер $a \perp b$

4. Нольдік емес екі вектор $\vec{a}$ және $\vec{b}$ үшін $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right| \Leftrightarrow \vec{a} // \vec{b}$

5. Кез келген үш вектор $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ үшін $\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\vec{a}\,\vec{b} + 2\vec{b}\,\vec{c} + 2\vec{c}\,\vec{a}$

6. Кез келген екі вектор $\vec{a}$ және $\vec{b}$ үшін $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| \le \left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right|$, $\quad \left|\vec{a} - \vec{b}\right| \ge \left\|\vec{a}\right| - \left|\vec{b}\right\|$

7. Кез келген 4 нүкте A, B, C, D үшін $AB\,CD = \frac{1}{2}\left(|AD|^2 + |BC|^2 - |AC|^2 - |BD|^2\right)$

Осы тақырыпқа шығарылатын бірнеше мысалдар қарастырамыз

1-есеп. Радиусы *R* тең шеңбер *ABC* үшбұрышына сырттай сызылған. Осы шеңбердің центрі *O* нүктесінен *ABC* үшбұрышы бойынша салынған *ABCD* параллелограммының *D* төбесіне дейінгі қашықтықты табыңыздар.

Шешуі: *ABCD* параллелограмм болғандықтан (1-сурет).

$\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OC} + \vec{OD}$ $\qquad OD^2 \qquad$ табайық $\qquad \vec{OD} = \vec{OA} + \vec{OB} - \vec{OC}$

$\vec{OD} = 3R^2 + 2R^2 - c^2 - 2R^2 + a^2 - 2R^2 - b^2$ немесе $OD^2 = R^2 + a^2 + b^2 - c^2$

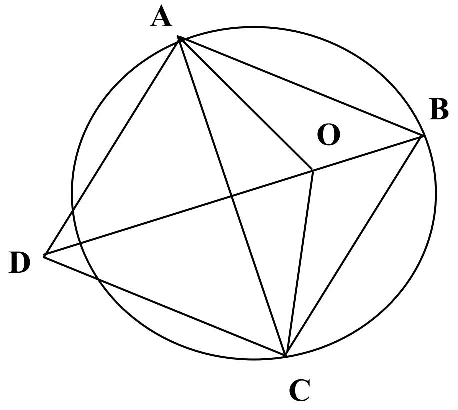
Салдар: $a^2 + b^2 + R^2 \ge c^2$

Осыдан $a^2 + b^2 + R^2 = c^2$ егер $D = 0$ онда $\angle C = 120^0$ $\angle A = \angle B = 30$ салдарда көрсетілген теңсіздіктен басқа да теңсіздіктер шығады:

1. $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$ болғандықтан $a^2 = 4R^2 \sin^2 A$

$b^2 = 4R^2 \sin^2 B$ $\; c^2 = 4R^2 \sin^2 C$ Осыдан $\sin^2 A + \sin^2 B + \frac{1}{4} \ge \sin^2 C$

2. $\sin^2 A = \frac{1 - \cos 2A}{2}$, $\quad \sin^2 B = \frac{1 - \cos 2B}{2}$, $\quad \sin^2 C = \frac{1 - \cos 2C}{2}$ болғандықтан,

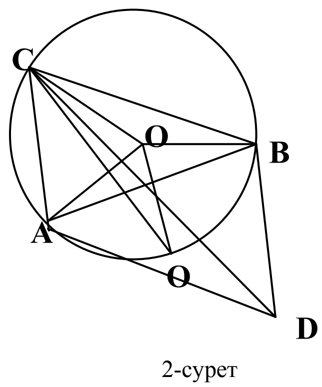


1-сурет

$\frac{1-\cos 2A}{2}+\frac{1-\cos 2B}{2}+\frac{1}{4}\geq\frac{1-\cos 2C}{2}$, $\quad 1-\cos 2A+1-\cos 2B+\frac{1}{2}\geq 1-\cos 2C$

$\cos 2A+\cos 2B-\cos 2C\leq\frac{3}{2}$. Бұл қарастырылған есептің шартын басқа түрде келтірсе болады: *ABC* үшбұрышының қабырғаларының ұзындықтары мен сырттай сызылған шеңбердік радиусы *R* берілген. Шеңбердің центрі *O* нүктесіне *AB* қабырғасы бойынша симметриялы O_1 нүктесінен бойынша *C* төбесіне дейінгі қашықтықты O_1C табыңыздар.

Егер үшбұрыштың қабырғалары берілсе және сырттай сызылған шеңбердік радиусы *R* берілсе. Бұл мәселенің шешімі 2-суреттен көрініп тұрғандай, шындығында CO_1 AB кесіндісінің ортасы M нүктесі бойынша ОД-ға симметриялы. Онда $CO_1=OD$ осыдан $\vec{CO_1}=\vec{OA}+\vec{OB}-\vec{OC}$



2-сурет

2-есеп. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллепипеді берілген.

Келесі теңдіктің орындалатынын дәлелдеңіздер.

$$\left|AC_1\right|^2=\left|AB_1\right|+\left|AC^2\right|+\left|AD_1^{\,2}\right|-\left|AB^2\right|-\left|AD^2\right|-\left|AA_1^{\,2}\right|$$

Шешімі: Жалпы айтқанда параллепипедтің әр бір төбесінде 7 кесінді түйіседі. Параллелепипедтің диагоналы, 3 жақтарының диагоналдары, 3 қыры. Осыдан үшжақтарының диагоналдарының квадраттарынан үш қырының квадраттарын алып тастасақ ол параллепипедтің диагоналының квадратына тең болады. $\vec{AB}=\vec{a}$ $\vec{AD}=\vec{b}$ $\vec{AA_1}=\vec{c}$ $\vec{AC_1}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ $\vec{AC}=\vec{a}+\vec{b}$ $\vec{AA_1}=\vec{c}$

$\vec{AD_1}=\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{AB_1}=\vec{a}+\vec{c}$ демек $\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)^2=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)^2+\left(\vec{a}+\vec{c}\right)^2-\vec{a}^2-\vec{b}^2-\vec{c}^2$

дәлелдеуіміз керек. Жақшаларды ашып жіберсек келесі тепе теңдікке келеміз: $\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)^2=\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+2\left(\vec{a}\,\vec{b}\right)+2\left(\vec{b}\,\vec{c}\right)+2\left(\vec{a}\,\vec{c}\right)$. Осымен байланысты бірнеше теңдікті келтірсе болады:

1. $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2+\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2=2\vec{a}^2+2\vec{b}^2$

2. $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2-\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2=4\left(\vec{a}\,\vec{b}\right)$

3. $\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^2=\dfrac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)-\dfrac{1}{9}\left(\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2+\left(\vec{b}-\vec{c}\right)^2+\left(\vec{c}-\vec{a}\right)^2\right)$

4. $(a+b-c-d)^2=(a-c)^2+(a-d)^2+(b-c)^2+(b-d)^2-(a-b)^2-\left(c-d\right)^2$

Бұл төрт теңдіктер геометриялық тілде келесідей қасиеттерді сипаттайтынын көрсетеді:

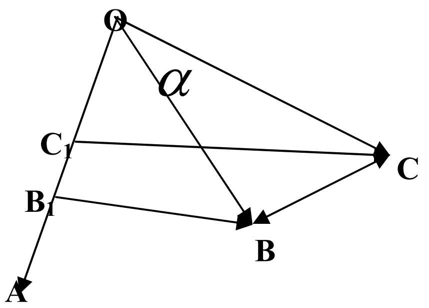
1. Параллелограммның диагоналдарының квадраттарының қосындысы оның барлық қабырғаларының квадраттарының қосындысына тең.

2. Параллелограммның диагоналдарының квадраттарының айырымы оның қабырғаларының төрт еселенген көбейтіндісін олардың арасындағы бұрыштың косинусына көбейткендегіге тең болады.

3. Үшбұрыштың кез келген нүктесінен олардың медианаларының қиылысу нүктесіне дейінгі ара қашықтық, осы нүктеден үшбұрыштың төбелеріне дейінгі ара-қашықтықтарының қосындысының квадратының үштен бірінен үшбұрыштың қабырғаларының қосындысының квадратының тоғыздан бірін шегіріп тастағанға тең.

4. Тетраэдрдің қарама-қарсы екі қырларының орталарын қосатын кесіндінің төрт еселенген квадраты қалған екі қосы қырларының квадраттарының қосындысынан осы қырларының қосындысын алып тастағанға тең болады.

3-есеп. Үшжақты бұрыштың үш жазық бұрыштары берілген. Осы үшжақты бұрыштың екі жақты бұрыштарын табыңыздар.



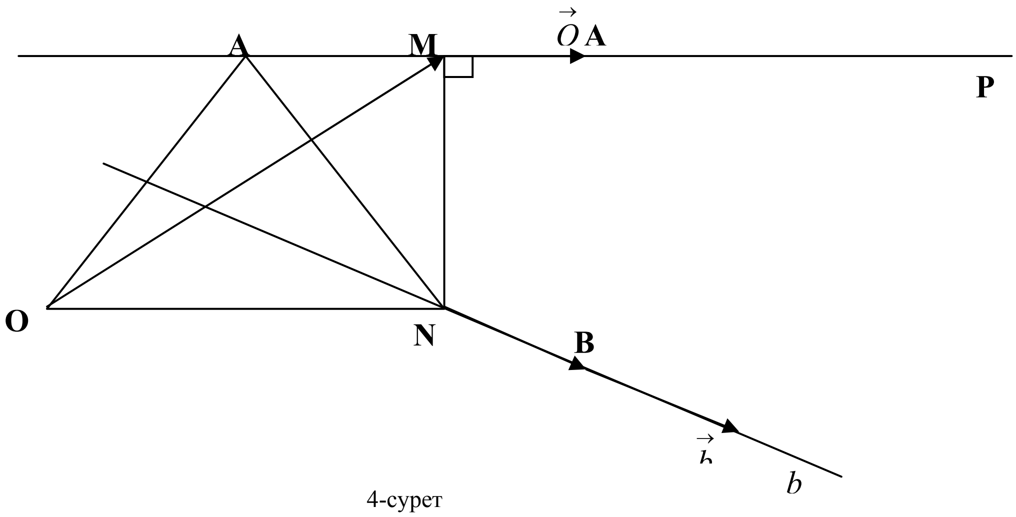
3-сурет

Шешуі: Үш жақты бұрыштың қырларында О төбесінен бастап бірлік векторларды алайық $l_1=\vec{OA},\ \ l_2=\vec{OB},\ \ l_3=\vec{OC}\ \ B\hat{O}C=\alpha,\ \ C\hat{O}A=\beta,\ \ A\hat{O}B=\gamma$ деп белгілейміз. Екі жақты бұрыштарды $\angle A,\ \angle B,\ \angle C$ деп алайық. B_1 және C_1 нүктелері B және C нүктелерінің ОА қырындағы проекциялары болсын. (3-сурет) онда $BC=BB_1+B_1C_1+C_1C$.

Осы теңдіктің екі жағын квадраттаймыз.

Сонда $\vec{BC}^2 = \vec{BB_1}^2 + \vec{B_1C_1} + \vec{C_1C}^2 + 2\,\vec{BB_1}\,\vec{C_1C}$ Себебі $\vec{BB_1}\,\vec{B_1C_1} = 0,\ \ \vec{C_1C}\,\vec{B_1C_1} = 0$; Бірақ $\vec{BC}^2 = 2 - 2\cos\alpha$; $\quad BB_1^{\ 2} = \sin^2\gamma;\ \ CC_1^{\ 2} = \sin^2\beta \quad \vec{BB_1}\,\vec{CC_1} = -\vec{BB_1}\,\vec{C_1C} = -\sin\beta\sin\gamma\cos\hat{A}$; $\vec{B_1C_1}^2 = \left(\vec{OC_1} - \vec{OB_1}\right)^2 = \cos^2\beta + \cos^2\gamma - 2\cos\beta\cos\gamma$

Осыдан $2 - 2\cos\alpha = \sin^2\gamma + \sin^2\beta + \cos^2\beta + \cos^2\gamma - 2\cos\beta\cos\gamma - 2\sin\beta\sin\gamma\cos\vec{A}$, демек $\cos\alpha = \cos\alpha\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos\hat{A}$. Осыдан $\cos\hat{A} = \dfrac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}$ бұл формула үшжақтар үшін ең маңызды формулалардың бірі болып табылады. Егер екі жазықтық перпендикуляр болса $\hat{A} = 90^0$ онда $\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma$



4-сурет

4-есеп. Екі өзара перпендикуляр айқас түзулер берілген p және q олардың векторлық теңдеулері $P:\ \vec{OP} = \vec{OA} + \alpha\,\vec{a}$, $q:\ \vec{OQ} = \vec{OB} + \beta\,\vec{b}$ мұндағы α мен β параметрлер $\alpha, \beta \in R$ ал $|a| = 1,\ |b| = 1$ бірлік бағыттаушы векторлар. Бұл екі түзулердің ортақ перпединкуляры MN. $\vec{MN}$ векторының $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{AB}$ векторлары бойынша жіктелуін табыңыздар.

Шешуі: 4-суреттен $\vec{OM} = \vec{OA} + \alpha_1\,\vec{a}\ \ \vec{ON} = \vec{OB} + \beta_1\,\vec{B}\ \ \vec{MN} = \vec{AB} + \beta_1\,\vec{B} - \alpha_1\,\vec{a}\ \ \alpha_1$ және β_1 табамыз. $\vec{MN}$ векторын скаляр түрде $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларына көбейтеміз:

$$\begin{cases} \vec{AB}\cdot a + \beta_1\,\vec{a} - \alpha_1 = 0 \\ \vec{AB}\cdot b + \beta_1 - \alpha_1\,\vec{a}\,\vec{b} = 0 \end{cases} \quad \text{себебі } \vec{a} \perp \vec{MN},\ \vec{b} \perp \vec{MN}$$

$\vec{a} \perp \vec{b}$ болғандықтан $\alpha_1 = \vec{AB}\cdot\vec{a},\ \beta_1 = -\vec{AB}\cdot\vec{b},$

Осыдан $\vec{MN} = \vec{AB} - \left(\vec{AB}\cdot\vec{a}\right)\vec{a} - \left(\vec{AB}\cdot\vec{b}\right)\vec{b}$

Осы формуланы пайдаланып $\left|\overrightarrow{MN}\right|$ ұзындығын яғни екі айқас түзулердің арасындағы ара қашықтықты табуға болады.

Осы тақырыпқа шығарылған есептердің мазмұнын талдау арқылы келесідей қорытындыға келеміз.

Біріншіден, векторлардың жіктелуіне берілген есептерде ең маңыздысы, вектор-ды базистік векторлар бойынша жіктелуі. Осы жіктелудегі коэффиценттерін пайдаланып:

1. Арақашықтықпен бұрыштарды табуға болады;
2. Параллел кесінділердің қатынастарын табуға болады;
3. Жеке нүктелердің жазықтықтағы және кеңістіктегі орналасуының параметрлерін анықтауға болады;
4. Нүктелер жиынын сипаттауға болады.

Векторлардың базистік векторларға жіктелуіндегі коэффиценттерді табу, координаталар жүйесін ендіріп векторлардың координаталарын табумен сыбайлас екенін көреміз.

ӘДЕБИЕТ

[1] Фетисов А.И. Геометрия. Учебное пособие по программе старших классов. – М.: АПН, 1963.
[2] Колягин Ю.М. и др. Методика преподавания математики в средней школе: Частные методики. – М.: Просвещение, 1977.
[3] Аргунов Б.И. Элементарная геометрия: Учебное пособие для пединститутов. – М.: Просвещение, 1966.

REFERENCES

[1] Fetisov A.I. Geometria. Uchebnoe posobie po programme starchih klassov. M.: APN, 1963.
[2] Kolyagin J.M. i dr. Metodika prepodavanie matematiki v srednei shkole. Chasnye metoliki. M.: Proschvechenye, 1977.
[3] Argunov B.I. Eleventarnaye geometya// Uchebnoe posobie dlya pedinstitutov. M.: Proschvechehye, 1966.

МЕТОДЫ ПРЕМЕНЕНИЯ СВОЙСТВ СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ МЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В ПРОСТРАНСТВЕ

М. Д. Шеныбаев[1], Н. А. Касимова[2]

[1]Южно-Казакстанский государственный педагогисеский институт , Шымкент, Казахстан,
[2]Регониалное социально-инновационный университет, Шымкент, Казахстан

Ключевые слова: векторы, свойство скалярного произведения векторов, геометрические неравенство, метрические задачи.

Аннотация. В работе рассматриваются методы решения стереометрических задач с применением свойств векторов. Проведены методы применения свойств скалярного пройзведения векторов для решения метрических задач в пространстве. В работе, также приведены основные векторные формулы применяемые в стреометрии. Результаты работы полезны для учителей математики преподающих в старших классах.

Поступила 24.02.2015 г.

Publication Ethics and Publication Malpractice
in the journals of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan

For information on Ethics in publishing and Ethical guidelines for journal publication see http://www.elsevier.com/publishingethics and http://www.elsevier.com/journal-authors/ethics.

Submission of an article to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan implies that the described work has not been published previously (except in the form of an abstract or as part of a published lecture or academic thesis or as an electronic preprint, see http://www.elsevier.com/postingpolicy), that it is not under consideration for publication elsewhere, that its publication is approved by all authors and tacitly or explicitly by the responsible authorities where the work was carried out, and that, if accepted, it will not be published elsewhere in the same form, in English or in any other language, including electronically without the written consent of the copyright-holder. In particular, translations into English of papers already published in another language are not accepted.

No other forms of scientific misconduct are allowed, such as plagiarism, falsification, fraudulent data, incorrect interpretation of other works, incorrect citations, etc. The National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan follows the Code of Conduct of the Committee on Publication Ethics (COPE), and follows the COPE Flowcharts for Resolving Cases of Suspected Misconduct (http://publicationethics.org/files/u2/New_Code.pdf). To verify originality, your article may be checked by the Cross Check originality detection service http://www.elsevier.com/editors/plagdetect.

The authors are obliged to participate in peer review process and be ready to provide corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. All authors of a paper should have significantly contributed to the research.

The reviewers should provide objective judgments and should point out relevant published works which are not yet cited. Reviewed articles should be treated confidentially. The reviewers will be chosen in such a way that there is no conflict of interests with respect to the research, the authors and/or the research funders.

The editors have complete responsibility and authority to reject or accept a paper, and they will only accept a paper when reasonably certain. They will preserve anonymity of reviewers and promote publication of corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. The acceptance of a paper automatically implies the copyright transfer to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.

The Editorial Board of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan will monitor and safeguard publishing ethics.

Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайте:

www:nauka-nanrk.kz

physics-mathematics.kz

Редактор *М. С. Ахметова*
Верстка на компьютере *Д. Н. Калкабековой*

Подписано в печать 20.03.2015.
Формат 60х881/8. Бумага офсетная. Печать – ризограф.
10,5 п.л. Тираж 300. Заказ 2.

Национальная академия наук РК
050010, Алматы, ул. Шевченко, 28, т. 272-13-18, 272-13-19