ISSN 1991-346X

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ

Х А Б А Р Л А Р Ы

ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

N E W S

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА
СЕРИЯСЫ

♦

СЕРИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

♦

PHYSICO-MATHEMATICAL
SERIES

2 (300)

НАУРЫЗ – СӘУІР 2015 ж.
МАРТ – АПРЕЛЬ 2015 г.
MARCH – APRIL 2015

1963 ЖЫЛДЫҢ ҚАҢТАР АЙЫНАН ШЫҒА БАСТАҒАН
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1963 ГОДА
PUBLISHED SINCE JANUARY 1963

ЖЫЛЫНА 6 РЕТ ШЫҒАДЫ
ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД
PUBLISHED 6 TIMES A YEAR

АЛМАТЫ, ҚР ҰҒА
АЛМАТЫ, НАН РК
ALMATY, NAS RK

«Известия НАН РК. Серия физико-математическая». ISSN 1991-346X
Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы)
Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации и архивов Министерства культуры и информации Республики Казахстан **№5543-Ж**, выданное 01.06.2006 г.

Периодичность: 6 раз в год.
Тираж: 300 экземпляров.

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, ком. 219, 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,
www:nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75.

News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physical-mathematical series.
ISSN 1991-346X
Owner: RPA "National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan" (Almaty)
The certificate of registration of a periodic printed publication in the Committee of information and archives of the Ministry of culture and information of the Republic of Kazakhstan N 5543-Ж, issued 01.06.2006

Periodicity: 6 times a year
Circulation: 300 copies

Editorial address: 28, Shevchenko str., of. 219, 220, Almaty, 050010, tel. 272-13-19, 272-13-18,
www:nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

Address of printing house: ST "Aruna", 75, Muratbayev str, Almaty

N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 2, Number 300 (2015), 24 – 28

CONSTRUCTING A BASIS FROM SYSTEMS OF EIGENFUNCTIONS OF ONE BOUNDARY VALUE PROBLEM

G. Dildabek[1,2], A. Tengayeva[1,3]

[1]Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan,
[2]Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan, e-mail: dildabek.g@gmail.com,
[3]Kazakh National Agrarian University, Almaty, Kazakhstan, e-mail: aijan0973@mail.ru

Key words: nonlocal boundary conditions; regular but not strengthened regular conditions; basis; eigenfunctions; biorthogonal system.

Abstract. In the present work we investigate a nonlocal boundary spectral problem for an ordinary differential equation in an interval. This problem arises while solving a nonlocal boundary value problem for the Laplace equation by the method of separation of variables. The difference of this problem is the impossibility of direct applying of the Fourier method (separation of variables). Because the corresponding spectral problem for the ordinary differential equation has the system of eigenfunctions not forming a basis. The boundary conditions of this problem are regular but not strengthened regular. The completeness and minimality of the system follow from the regularity of boundary conditions of the spectral problem. The limitation of norms is easily checked by direct calculation. However the properties of the completeness and minimality are not enough for the basis property. The system of eigenfunctions are forming a basis. Based on these eigenfunctions there is constructed a special system of functions that already forms the basis.

УДК 517.984.52

ПОСТРОЕНИЕ БАЗИСА ИЗ СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Г. Дилдабек[1,2], А. А. Тенгаева[1,3]

[1]Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан,
[2]Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан,
[3]Казахский национальный аграрный университет, Алматы, Казахстан

Ключевые слова: нелокальные краевые условия; регулярные, но не усиленно регулярные краевые условия; базис; собственные функции; биортогональная система.

Аннотация: В настоящей работе мы исследуем нелокальную граничную спектральную задачу для обыкновенного дифференциального оператора второго порядка на отрезке. Эта проблема возникает при решении нелокальной краевой задачи для уравнения Лапласа методом разделения переменных. Принципиальным отличием этой задачи является невозможность прямого применения метода Фурье (разделения переменных). Потому что соответствующая спектральная задача для обыкновенного дифференциального уравнения имеет систему собственных функций, не образующих базис. Граничные условия этой задачи регулярные, но не усиленно регулярные. Полнота и минимальность системы следуют из регулярности граничных условий спектральной задачи. Почти-нормированность легко проверяется непосредственным вычислением. Однако только свойств полноты и минимальности недостаточно для базисности системы. Система собственных функций рассматриваемой задачи не образует базиса. Основываясь на этих собственных функциях построена специальная система функций, которая уже образовывает базис.

Введение. Исследования по спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов берут свое начало с классических работ J. Liouville и Sh. Sturm. Фундаментальные основы в спектральной теории дифференциальных операторов были заложены в работах Birkhoff 1908 года, где он впервые выделил регулярные граничные условия для общего обыкновенного дифференциального оператора. Теория регулярных задач была существенно развита в работах Тамаркина и Stone. Эти работы привели к бурному развитию нового широкого научного направления, имеющего к настоящему моменту огромную библиографию. Мы отсылаем читателя к [1, 2] для обширными списками литературы и обзорами полученных результатов.

Несмотря на кажущуюся простоту, спектральная теория обыкновенных дифференциальных операторов далека от завершения. Это относится даже к случаю оператора второго порядка

$$Lu = -u''(x) + q(x)u(x),$$

заданного на конечном отрезке $x \in (a,b)$, который называется оператором Штурма-Лиувилля. Краткий обзор результатов по спектральной теории оператора Штурма-Лиувилля приводится в недавней работе А.С. Макина [3].

Хорошо известно, что граничные условия для обыкновенного дифференциального оператора могут быть разделены на три класса [4]:

– усиленно регулярные краевые условия;

– регулярные, но не усиленно регулярные краевые условия;

– нерегулярные условия.

Если граничные условия усиленно регулярные, то система корневых функций задачи образует базис Рисса в $L_2(a,b)$. Это утверждение было доказано в [5, 6] и [7, Глава XIX]. В других случаях базисность систем корневых функций не является гарантированной.

Окончательное определение классов граничных условий для оператора дифференцирования второго порядка $-D^2$, когда система собственных и присоединенных функций образует базис, было дано в 1998 году в работе P. Lang и J. Locker [8].

В настоящей работе мы рассмотрим одну модельную спектральную задачу для оператора кратного дифференцирования. Краевые условия задачи регулярны, но не усиленно регулярны. Система собственных функций задачи полна, минимальна, почти нормирована, но не образует базис в L_2. На основе этих собственных функций строится специальная система, обладающая свойством базиса в L_2.

1 Постановка задачи. Рассмотрим спектральную задачу

$$-u''(x) = \lambda u(x), \qquad 0 < x < \pi; \tag{1}$$

$$u(0) = 0; \tag{2}$$

$$u'(0) + u'(\pi) + \alpha u(\pi) = 0, \tag{3}$$

где $\alpha > 0$ – фиксированный параметр.

Эта задача возникает при решении методом разделения переменных одной нелокальной краевой задачи для уравнения Лапласа с противоположными потоками на части границы.

Пусть $D = \{(r,\theta): 0 < r < 1, 0 < \theta < \pi\}$ - полукруг. Целью задачи является нахождение функции $u(r,\theta) \in C^0(\bar{D}) \cap C^2(D)$, удовлетворяющей в D уравнению Лапласа

$$\Delta u = 0 \tag{4}$$

и граничным условиям

$$u(1,\theta) = f(\theta), \tag{5}$$

$$u(r,0) = 0, r \in [0,1], \tag{6}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}(r,0) + \frac{\partial u}{\partial \theta}(r,\pi) + \alpha u(r,\pi) = 0, \qquad r \in (0,1). \tag{7}$$

Особенностью этой краевой задачи является невозможность прямого применения метода Фурье (метода разделение переменных). Потому что при $\alpha \neq 0$ соответствующая спектральная задача для обыкновенного дифференциального уравнения (возникающая при методе разделения переменных) имеет систему собственных функций, не образующих базис. Для $\alpha = 0$ задача (4)-(7) рассматривалась в [9-10]. В этом ($\alpha = 0$) случае все собственные значения спектральной задачи являются кратными, а соответствующие собственные подпространства состоят из одной собственной и одной присоединенной функции.

Один из способов построения базиса, на основе системы собственных функций задачи

$$-\vartheta''(x) = \lambda\vartheta(x), \qquad 0 < x < \pi;$$
$$\vartheta(0) = 0; \quad \vartheta'(0) - \vartheta'(\pi) + \alpha\vartheta(\pi) = 0$$

был предложен в [11]. Граничные условия этой задачи регулярные, но не усиленно регулярные. И система её собственных функций полна, минимальна, но не образует базиса. Однако, специальная система функций, построенная с помощью этих собственных функций, уже образует базис. И этот факт применяется для решения нелокальной начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности.

Целью настоящей работы является построение базиса из системы собственных функций задачи (1) – (3).

2 Собственные значения и собственные функции задачи. В целом, построение собственных значений и собственных функций задачи (1) – (3) является достаточно простой задачей. Поэтому мы опускаем некоторые подробности вычислений и представляем основные факты, которые мы будем использовать в дальнейшем.

Мы ищем собственные значения задачи. Отметим, что значение $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи, поскольку для этого значения задача имеет только тривиальное решение.

Пусть $\lambda \neq 0$. В силу (2) собственные функции имеют вид $u(x) = \sin(\sqrt{\lambda}x)$. Из нелокального условия (3) получаем два уравнения

$$\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}\right) = 0, \qquad \cot\left(\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}\right) = -\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}.$$

Решения первого уравнения дают первую серию собственных значений и собственных функций задачи (1) – (3) вида

$$\lambda_{k1} = (2k+1)^2, \qquad u_{k1}(x) = \sin((2k+1)x), \qquad k = 0,1,2,\ldots.$$

Второе уравнение может быть представлено в виде

$$\cot(\beta\pi) = -\frac{\alpha}{2\beta}, \qquad \beta = \frac{\sqrt{\lambda}}{2}.$$

Через β_k обозначим корни этого уравнения. Несложно убедиться в том, что они удовлетворяют неравенствам $2k+1 < 2\beta_k < 2k+2, k = 0,1,2,\ldots$, и для разности $\delta_k = \beta_k - k$ при достаточно больших k выполняются двусторонние оценки

$$\frac{\alpha}{2k+1}\left(1 - \frac{1}{2k+1}\right) < \delta_k < \frac{\alpha}{2k+1}. \tag{8}$$

Следовательно, существует вторая серия собственных значений и собственных функций вида

$$\lambda_{k2} = (2\beta_k)^2, \qquad u_{k2}(x) = \sin(2\beta_k x), \qquad k = 0,1,2,\ldots.$$

Лемма 1. *Система собственных функций* $\{u_{k1}(x), u_{k2}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *задачи (1) – (3) является полной, минимальной, почти нормированной системой, но не образует базиса Рисса в* $L_2(0,\pi)$.

Доказательство. Полнота и минимальности системы следуют из регулярности граничных условий спектральной задачи (1) – (3). Почти-нормированность, то есть нижние и верхние оценки норм собственных функций, легко проверяется непосредственным вычислением. Однако только свойства полноты и минимальности являются не достаточными для базисности.

Действительно, рассмотрим скалярное произведение в $L_2(0,\pi)$ собственных функций (u_{k1}, u_{k2}). Непосредственным вычислением не сложно получить, что

$$(u_{k1}, u_{k2}) = \int_0^{2\pi} \sin((2k+1)x)\sin(2\beta_k x)\,dx = \frac{\pi}{2}\frac{\sin(2\delta_k\pi)}{2\delta_k\pi}\frac{2k+1}{2k+1+2\delta_k}.$$

Учитывая, что $\|u_{k1}\| = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ и $\lim_{k\to\infty}\|u_{k2}\| = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, отсюда, принимая во внимание асимптотику (8), получаем, что угол между нормированными собственными функциями стремится к нулю:

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{u_{k1}}{\|u_{k1}\|}, \frac{u_{k2}}{\|u_{k2}\|}\right)_{L_2(0,\pi)} = 1.$$

Такие системы не могут образовывать базиса. Лемма доказана.

Отметим, что отсутствие базисности системы собственных функций задачи (1) – (3) также может быть получено из более общих фактов работы [8].

3 Построение базиса из системы собственных функций задачи. Покажем, что внутри собственных подпространств, соответствующих попарно близким собственным значениям можно произвести такие преобразования, что полученная новая система будет обладать свойством базисности.

Положим

$$\varphi_{2k}(x) = u_{k1}(x), \qquad \varphi_{2k+1}(x) = (u_{k2}(x) - u_{k1}(x))(2\delta_k)^{-1}, k = 0,1,2,\dots$$

Лемма 2. *Система функций* $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ *задачи образует базис Рисса в* $L_2(0,\pi)$.

Доказательство. Так как система получена преобразованиями внутри собственного подпространства, отвечающего попарно близким собственным значениям, то полнота и минимальности системы не изменились. Для того, чтобы показать базисность системы $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, покажем ее квадратичную близость другому базису Рисса.

В качестве известного базиса Рисса возьмем систему собственных и присоединенных функций задачи Самарского-Ионкина

$$-w''(x) = \lambda w(x), \qquad 0 < x < \pi; \qquad w(0) = 0; \;\; w'(0) + w'(\pi) = 0.$$

Граничные условия этой задачи являются регулярными, но не усиленно регулярными. Все собственные значения этой задачи, за исключением нулевого, двукратны: $\lambda_{k1} = \lambda_{k2} = (2k+1)^2, k = 0,1,2,\dots$. Собственные w_{2k} и присоединенные w_{2k+1} функции задачи образуют базис Рисса в $L_2(0,\pi)$ и имеют вид:

$$w_{2k}(x) = \sin((2k+1)x), \qquad w_{2k+1}(x) = x\cos((2k+1)x), \quad k = 0,1,2,\dots.$$

Мы должны показать сходимость ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|\varphi_k - w_k\|^2 < \infty.$$

Очевидно, что $\varphi_{2k} - w_{2k} = 0$. Для нечетных номеров имеем:

$$\varphi_{2k+1}(x) = \frac{\sin(\delta_k x)}{\delta_k x} x\cos((2k+1+\delta_k)x).$$

Поэтому не сложно показать, что $|\varphi_{2k-1}(x) - w_{2k+1}(x)| \le C\delta_k$. Отсюда и из асимптотики (8) получаем неравенство $|\varphi_{2k-1}(x) - w_{2k+1}(x)| \le \frac{C_1}{k}$, где C_1 – не зависит от k. Полученое неравенство обеспечивает квадратичную близость системы $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ и базиса Рисса $\{w_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$. Лемма доказана.

Построенная новая система $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ может быть использована для решения задачи (4) – (7) методом разделения переменных. Для этого не сложно убедиться в том, что элементы системы удовлетворяют уравнениям:

$$-\varphi''_{2k}(x) = \lambda_{k1}\,\varphi_{2k}(x),$$

$$-\varphi''_{2k+1}(x) = \lambda_{k2}\,\varphi_{2k+1}(x) + \frac{\lambda_{k2} - \lambda_{k1}}{2\delta_k}\,\varphi_{2k}(x).$$

Поэтому с системой $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ можно работать также, как и с системой собственных и присоединенных функций.

Авторы выражают благодарность М.А. Садыбекову за постановку задачи и ценные советы во время работы. Эта работа была поддержана грантом 0824 / ГФ4 Министерства образования и науки Республики Казахстан.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ильин В.А., Крицков Л.В. Свойства спектральных разложений, отвечающих несамосопряженным операторам // Функциональный анализ, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., 96, ВИНИТИ, М.. – 2006. – С. 5–105.

[2] Locker J. Spectral Theory of Non-Self-Adjoint Two-Point Differential Operators. V. 192 of Mathematical Surveys and Monographs. Amsterdam: North-Holland, 2003.

[3] Makin A.S. On Summability of Spectral Expansions Corresponding to the Sturm-Liouville Operator // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. – 2012. - Vol. 2012. - Article ID 843562. - P. 1-13. - doi:10.1155/2012/843562.

[4] Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969.

[5] Михайлов В.П. О базисах Рисса в $L_2(0,1)$ // Докл. АН СССР. – 1962. – Т. 144, № 5. – С. 981-984.

[6] Кесельман Г.М. О безусловной сходимости разложений по собственным функциям некоторых дифференциальных операторов // Изв. вузов СССР. Математика. - 1964. - № 2. – С. 82-93.

[7] Dunford N., Schwartz J.T. Linear Operators, Part III. New York: John Wiley & Sons, 1971.

[8] Lang P., Locker J. Spectral theory of two-point differential operators determined by D^2. II. Analysis of case // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 1990. – Vol.146. – No. 1. - P. 148-191.

[9] Моисеев Е.И., Амбарцумян В.Е. О разрешимости нелокальной краевой задачи с равенством потоков на части границы и сопряженной к ней задачи // Дифференциальные уравнения. – 2010. – Т. 46, № 5. – С. 718 – 725.

[10] Моисеев Е.И., Амбарцумян В.Е. О разрешимости нелокальной краевой задачи с равенством потоков на части границы и сопряженной к ней задачи // Дифференциальные уравнения. – 2010. – Т. 46, № 6. – С. 892 – 895.

[11] Мокин А.Ю. Об одном семействе начально-краевых задач для уравнения теплопроводности // Дифференц. уравнения. – 2009. – Т. 45, № 1. – С. 123-137.

REFERENCES

[1] Il'in V.A., Kritskov L.V. Properties of spectral expansions corresponding to non-self-adjoint differential operators. *Journal of Mathematical Sciences*. – **2003**, 116, 5, 3489-3550. (in Russ.).

[2] Locker J. Spectral Theory of Non-Self-Adjoint Two-Point Differential Operators. V.192 of Mathematical Surveys and Monographs. Amsterdam: North-Holland, 2003.

[3] Makin A.S. On Summability of Spectral Expansions Corresponding to the Sturm-Liouville Operator. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences,* **2012**, 2012, Article ID 843562, 1-13, doi:10.1155/2012/843562.

[4] Naimark M.A. Linear Differential Operators. New York: Ungar, 1967. (in Russ.).

[5] Mihailov V.P. On Riesz bases in $L_2(0,1)$. Doklady Akademii Nauk SSSR, **1962**, 144, 5, 981-984. (in Russ.)

[6] Kesel'man G.M. On the unconditional convergence of eigenfunction expansions of certain differential operators. *Izv. Vuzov. Mat.*, **1964**, 2, 39, 82-93. (in Russ.).

[7] Dunford N., Schwartz J.T. Linear Operators, Part III. New York: John Wiley & Sons, 1971.

[8] Lang P., Locker J. Spectral theory of two-point differential operators determined by D^2. II. Analysis of case. *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 1990, 146, 1, 148-191.

[9] Moiseev E.I., Ambartsumyan V.E. On the solvability of nonlocal boundary value problem with the equality of flows at the part of the boundary and conjugated to its problem. *Differential Equations*, **2010**, 46, 5, 718-725.

[10] Moiseev E.I., Ambartsumyan V.E. On the solvability of nonlocal boundary value problem with the equality of flows at the part of the boundary and conjugated to its problem. *Differential Equations,* 2010, 46, 6, 892-895.

[11] Mokin A.Yu. On a family of initial-boundary value problems for the heat equation. *Differential Equations*, 2009, 45, 1, 126-141.

БІР ШЕТТІК ЕСЕПТІҢ МЕНШІКТІ ФУНКЦИЯЛАР ЖҮЙЕСІНЕН БАЗИС ҚҰРУ

Г. Ділдәбек[1,2], А. А. Тенгаева[1,3]

[1]Математика және математикалық моделдеу институты, Алматы, Қазақстан,
[2]әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан,
[3]Қазақ ұлттық аграрлық университеті, Алматы, Қазақстан

Тірек сөздер: бейлокал шеттәк шарттар; регуляр, бірақ қатаң емес регуляр шеттік шарт; базис; меншікті функциялар; биортогонал жүйе.

Аннотация. Жұмыста кесіндідегі екінші ретті жәй дифференциалдық оператор үшін бейлокал шекаралық спектралды есебі зерттелінеді. Бұл мәселе Лаплас теңдеуі үшін бейлокал шеттік есепті айнымалыны ажырату әдісімен шешу кезінде пайда болады. Бұл есептің айрықша ерекшелілігі Фурье әдісін (айнымалыны ажырату) тікелей қолданудың мүмкін еместігінде болып табылады. Себебі жәй дифференциалдық теңдеу үшін сәйкес спектралды есептің меншікті функциялары базис құрамайды. Бұл есептің шекаралық шарты регуляр, бірақ қатаң емес регуляр болып табылады. Жүйенің толықтыңы мен минималдылығы спектралды есептің шекаралық шартынан шығады. Нормаланғандылығы қарапайым есептеулерден келіп шығады. Бірақ тек қана толықтығы мен минималдылық қасиеттері жүйенің базистігі үшін жеткіліксіз. Қарастырылған есептің меншікті функциялары базис құрамайды. Осы меншікті функцияларды негізге ала отырып базис құрайтын арнайы функциялар жүйесі құрылған.

Поступила 17.03.2015 г.

Publication Ethics and Publication Malpractice in the journals of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan

For information on Ethics in publishing and Ethical guidelines for journal publication see http://www.elsevier.com/publishingethics and http://www.elsevier.com/journal-authors/ethics.

Submission of an article to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan implies that the described work has not been published previously (except in the form of an abstract or as part of a published lecture or academic thesis or as an electronic preprint, see http://www.elsevier.com/postingpolicy), that it is not under consideration for publication elsewhere, that its publication is approved by all authors and tacitly or explicitly by the responsible authorities where the work was carried out, and that, if accepted, it will not be published elsewhere in the same form, in English or in any other language, including electronically without the written consent of the copyright-holder. In particular, translations into English of papers already published in another language are not accepted.

No other forms of scientific misconduct are allowed, such as plagiarism, falsification, fraudulent data, incorrect interpretation of other works, incorrect citations, etc. The National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan follows the Code of Conduct of the Committee on Publication Ethics (COPE), and follows the COPE Flowcharts for Resolving Cases of Suspected Misconduct (http://publicationethics.org/files/u2/New_Code.pdf). To verify originality, your article may be checked by the Cross Check originality detection service http://www.elsevier.com/editors/plagdetect.

The authors are obliged to participate in peer review process and be ready to provide corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. All authors of a paper should have significantly contributed to the research.

The reviewers should provide objective judgments and should point out relevant published works which are not yet cited. Reviewed articles should be treated confidentially. The reviewers will be chosen in such a way that there is no conflict of interests with respect to the research, the authors and/or the research funders.

The editors have complete responsibility and authority to reject or accept a paper, and they will only accept a paper when reasonably certain. They will preserve anonymity of reviewers and promote publication of corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. The acceptance of a paper automatically implies the copyright transfer to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.

The Editorial Board of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan will monitor and safeguard publishing ethics.

Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайте:

www:nauka-nanrk.kz

physics-mathematics.kz

Редактор *М. С. Ахметова*
Верстка на компьютере *Д. Н. Калкабековой*

Подписано в печать 20.03.2015.
Формат 60х881/8. Бумага офсетная. Печать – ризограф.
10,5 п.л. Тираж 300. Заказ 2.

Национальная академия наук РК
050010, Алматы, ул. Шевченко, 28, т. 272-13-18, 272-13-19