ISSN 1991-346X

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ

Х А Б А Р Л А Р Ы

ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

N E W S

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА СЕРИЯСЫ

♦

СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

♦

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

2 (300)

НАУРЫЗ – СӘУІР 2015 ж.
МАРТ – АПРЕЛЬ 2015 г.
MARCH – APRIL 2015

1963 ЖЫЛДЫҢ ҚАҢТАР АЙЫНАН ШЫҒА БАСТАҒАН
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1963 ГОДА
PUBLISHED SINCE JANUARY 1963

ЖЫЛЫНА 6 РЕТ ШЫҒАДЫ
ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД
PUBLISHED 6 TIMES A YEAR

АЛМАТЫ, ҚР ҰҒА
АЛМАТЫ, НАН РК
ALMATY, NAS RK

Б а с   р е д а к т о р

ҚР ҰҒА академигі,
Мұтанов Г. М.

Р е д а к ц и я   а л қ а с ы:

физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Әшімов А.А.**; техн. ғ.докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Байғұнчеков Ж.Ж.**; физ.-мат. ғ.докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Жұмаділдаев А.С.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Қалменов Т.Ш.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Мұқашев Б.Н.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Өтелбаев М.О.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Тәкібаев Н.Ж.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Харин С.Н.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Әбішев М.Е.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Жантаев Ж.Ш.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Қалимолдаев М.Н.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Косов В.Н.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Мұсабаев Т.А.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Ойнаров Р.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Рамазанов Т.С.** (бас редактордың орынбасары); физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Темірбеков Н.М.;** физ.-мат. ғ. докторы**,** проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Өмірбаев У.У.**

Р е д а к ц и я   к е ңе с і:

Украинаның ҰҒА академигі **И.Н. Вишневский** (Украина); Украинаның ҰҒА академигі **А.М. Ковалев** (Украина); Беларусь Республикасының ҰҒА академигі **А.А. Михалевич** (Беларусь); Әзірбайжан ҰҒА академигі **А. Пашаев** (Әзірбайжан); Молдова Республикасының ҰҒА академигі **И. Тигиняну** (Молдова); мед. ғ. докторы, проф. **Иозеф Банас** (Польша)

Главный редактор

академик НАН РК
Г. М. Мутанов

Редакционная коллегия:

доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **А.А. Ашимов**; доктор техн. наук, проф., академик НАН РК **Ж.Ж. Байгунчеков**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **А.С. Джумадильдаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **Т.Ш. Кальменов**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **Б.Н. Мукашев**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **М.О. Отелбаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **Н.Ж. Такибаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **С.Н. Харин**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **М.Е. Абишев**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Ж.Ш. Жантаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **М.Н. Калимолдаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **В.Н. Косов**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Т.А. Мусабаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Р. Ойнаров**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Т.С. Рамазанов** (заместитель главного редактора): доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Н.М. Темирбеков**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **У.У. Умирбаев**

Редакционный совет:

академик НАН Украины **И.Н. Вишневский** (Украина); академик НАН Украины **А.М. Ковалев** (Украина); академик НАН Республики Беларусь **А.А. Михалевич** (Беларусь); академик НАН Азербайджанской Республики **А. Пашаев** (Азербайджан); академик НАН Республики Молдова **И. Тигиняну** (Молдова); д. мед. н., проф. **Иозеф Банас** (Польша)

«Известия НАН РК. Серия физико-математическая». ISSN 1991-346X
Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы)
Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации и архивов Министерства культуры и информации Республики Казахстан **№5543-Ж**, выданное 01.06.2006 г.

Периодичность: 6 раз в год.
Тираж: 300 экземпляров.

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, ком. 219, 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,
www:nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

© Национальная академия наук Республики Казахстан, 2015

Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75.

E d i t o r i n c h i e f

G. M. Mutanov,
academician of NAS RK

Editorial board:

A.A. Ashimov, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **Zh.Zh. Baigunchekov**, dr. eng. sc., prof., academician of NAS RK; **A.S. Dzhumadildayev**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **T.S. Kalmenov**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **B.N. Mukhashev**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **M.O. Otelbayev**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **N.Zh. Takibayev**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **S.N. Kharin**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **M.Ye. Abishev**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **Zh.Sh. Zhantayev**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **M.N. Kalimoldayev**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member. of NAS RK; **V.N. Kosov**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **T.A. Mussabayev**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **R. Oinarov**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **T.S. Ramazanov**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK (deputy editor); **N.M. Temirbekov**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **U.U. Umirbayev**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK

E d i t o r i a l s t a f f:

I.N. Vishnievski, NAS Ukraine academician (Ukraine); **A.M. Kovalev**, NAS Ukraine academician (Ukraine); **A.A. Mikhalevich**, NAS Belarus academician (Belarus); **A. Pashayev**, NAS Azerbaijan academician (Azerbaijan); **I. Tighineanu**, NAS Moldova academician (Moldova); **Joseph Banas**, prof. (Poland).

News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physical-mathematical series.
ISSN 1991-346X
Owner: RPA "National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan" (Almaty)
The certificate of registration of a periodic printed publication in the Committee of information and archives of the Ministry of culture and information of the Republic of Kazakhstan N 5543-Ж, issued 01.06.2006

Periodicity: 6 times a year
Circulation: 300 copies

Editorial address: 28, Shevchenko str., of. 219, 220, Almaty, 050010, tel. 272-13-19, 272-13-18,
www:nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

© National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, 2015

Address of printing house: ST "Aruna", 75, Muratbayev str, Almaty

N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 2, Number 300 (2015), 29 – 35

INTEGRAL BOUNDARY CONDITIONS OF ELLIPTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH VARAIBLE COEFFICIENTS

T. Sh. Kalmenov, D. Suragan

Institute of mathematics and mathematical modeling MES RK, Almaty, Kazakhstan, e-mail: suragan@list.ru

Keywords: boundary integral condition, elliptic equation, boundary value problem, fundamental solution.
Abstract. In this note we construct integral boundary conditions of second order elliptic differential equations with variable coefficients generalizing results in [2]. We also obtain similar results for polyharmonic operators, that is, integral boundary conditions of iterated Laplacian are constructed.

УДК 517.956

ГРАНИЧНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Т. Ш. Кальменов, Д. Сураган

Институт математики и математического моделирования, МОН РК, Алматы, Казахстан

Ключевые слова: граничное интегральное условие, эллиптическое уравнение, краевая задача, фундаментальное решение.
Аннотация. Построены интегральные граничные условия для эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами, которые обобщают результаты в [2]. Мы также получили аналогичные результаты для полигармонических операторов.

1. Введение. Пусть $\Omega \subset R^d$ открытая ограниченная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Рассмотрим эллиптическое дифференциальное уравнение второго порядка

$$D(u) = -\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{d} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f(x),\ x \in \Omega. \quad (1)$$

Функций a_{ij}, b_j и c вещественные функций, которые для удобства предполагаются C^∞-функциями.

Определение 1. Вещественный скалярный линейный дифференциальный оператор второго порядка D называется строго эллиптическим в Ω, если существует гладкая функция $\gamma(x) > 0$ такой, что

$$\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}\xi_i\,\xi_j \geq \gamma(x)|\xi|^2 \quad (2)$$

для всех $\xi \in R^d$. Если $\gamma > 0$ константа независимая от x и условие (2) выполняется для всех $x \in \Omega$, то D называется равномерно строго эллиптическим.

Определение 2. Пусть $x \in R^d$ любая фиксированная точка. Тогда распределение $E(x, y)$ называется фундаментальным решением дифференциального оператора D (в R^d), если она удовлетворяет уравнение

$$D_y\big(E(x,y)\big) = \delta(x-y) \tag{3}$$

где δ является распределением Дирака (в обобщенном смысле). Как обычно в уравнении (3) обозначение D_y означает дифференцированию по y.

Для строго эллиптических операторов D_y может быть показано, по формуле Грин, что из уравнении (3) следует

$$D_x\big(E(x,y)\big) = \delta(x-y) \tag{4}$$

для любого фиксированного $y \in R^d$.

Для общего дифференциального оператора, существование фундаментального решения является не тривиальным.

Имеет место

Лемма (Хермандер). [1] Пусть D равномерный строго эллиптический оператор четного порядка с вещественными коэффициентами $a_{ij} \in C^\infty$. Тогда для каждого компактной области $\overline{\Omega} \subset R^d$ с $\partial\Omega \in C^\infty$ существует локальное фундаментальное решение $E(x,y)$, которое C^∞ функция для всех переменных $x \neq y$ и $x, y \in \overline{\Omega}$.

В разделе 2 этой работы, используя свойства фундаментальных решений, и мы построили корректную краевую задачу для дифференциального уравнения (1). В разделе 3 мы обобщили этот результат для полигармонических уравнений. На протяжении всей работы мы используем обозначения из [4]-[6].

2. Эллиптические уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. Пусть $\Omega_1 \subset \cdots \subset \Omega_n \subset R^d$ открытые ограниченные области с границами $\partial\Omega_i \in C^\infty$, $i = 1, \dots, n$, соответственно. По лемме Хермандера существует локальное фундаментальное решение $E_i(x,y)$ оператора D для каждого Ω_i. Рассмотрим следующую функцию

$$u(x) = \int_\Omega G(x,y) f(y) dy \tag{5}$$

в $\Omega \subset \Omega_1$, где

$$G(x,y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E_i(x,y) \; x, y \in \Omega. \tag{6}$$

Тривиальное наблюдение показывает, что и $u(x)$ является решением (1) в Ω. Цель этого раздела это – найти граничное условие такое, что с этим граничным условием уравнение (1) имело единственное решение в $H^2(\Omega)$, которое являлось $u(x)$.

Теорема 1. Для каждого $f \in L_2(\Omega)$ (5) является единственным решением уравнения (1) (в $H^2(\Omega)$) с граничным условием

$$-\frac{u(x)}{2} + \int_{\partial\Omega} \partial_{vy} G(x,y) u(y) dy - \int_{\partial\Omega} G(x,y)\left\{\partial_{vy} u(y) - \sum_{j=1}^{d} n_j b_j u\right\} dy = 0, x \in \partial\Omega, \tag{7}$$

где $\partial_{vy} = \sum_{k,j=1}^{d} n_j \, a_{jk} \frac{\partial}{\partial x_k}$ является конормальной производной и $n_1, n_{2,} \dots\dots, n_d$ -компоненты вектора нормали на границе.

Доказательства теоремы 1. Из (6) легко видеть, что G фундаментальное решение оператора D в Ω. Поэтому

$$u(x) = \int_\Omega G(x,y) f(y) dy$$

решение уравнении (1) и принадлежит к $H^2(\Omega)$ для любого $f \in L_2(\Omega)$. Кроме того, следующее представление формулы может быть получено из обобщенной второй формулы Грина в пространстве Соболева [4]

$$u(x) = \int_\Omega G(x,y) f(y) dy + \int_{\partial\Omega} \partial_{vy} G(x,y) u(y) dy - \int_{\partial\Omega} G(x,y)\left\{\partial_{vy} u(y) - \sum_{j=1}^{d} n_j b_j u\right\} dy \tag{8}$$

для каждого $x \in \Omega$. Из (5) и (8) означает, что

$$\int_{\partial\Omega} \partial_{vy} G(x,y) u(y) dy - \int_{\partial\Omega} G(x,y)\left\{\partial_{vy} u(y) - \sum_{j=1}^{d} n_j b_j u\right\} dy = 0$$

для каждого $x \in \Omega$.

Используя свойств двойного и простого слоя потенциалов [4] при $x \to \partial\Omega$, мы находим

$$-\frac{u(x)}{2} + \int_{\partial\Omega} \partial_{\upsilon y} G(x,y)u(y)dy - \int_{\partial\Omega} G(x,y)\left\{\partial_{\upsilon y}u(y) - \sum_{j=1}^{d} n_j b_j\, u\right\}dy = 0 \ x \in \partial\Omega.$$

Мы показали, что (5) является решением краевой задачи (1) с граничным условием (7) в $H^2(\Omega)$. Теперь докажем ее единственность. Если краевая задача имеет два решения, то функция $\vartheta = u - u_1 \in H^2(\Omega)$ удовлетворяет однородное уравнение

$$D(\vartheta) = -\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial \vartheta}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{d} b_i(x)\frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} + c(x)\vartheta = 0, \ \ x \in \Omega, \tag{9}$$

и граничное условие (7), т.е.

$$-\frac{\vartheta(x)}{2} + \int_{\partial\Omega} \partial_{\upsilon y} G(x,y)\vartheta(y)dy - \int_{\partial\Omega} G(x,y)\left\{\partial_{\upsilon y}\vartheta(y) - \sum_{j=1}^{d} n_j b_j\, \vartheta\right\}dy = 0, x \in \partial\Omega. \tag{10}$$

Так как в этом случае $f \equiv 0$, вместо (8) имеем следующую формулу представлении

$$\vartheta(x) = \int_{\partial\Omega} \partial_{\upsilon y} G(x,y)\vartheta(y)dy - \int_{\partial\Omega} G(x,y)\left\{\partial_{\upsilon y}\vartheta(y) - \sum_{j=1}^{d} n_j b_j\, \vartheta\right\}dy \tag{11}$$

для каждого $x \in \Omega$. Как и выше, с помощью свойства двойного и простого слоя потенциалов при $x \to \partial\Omega$, мы находим

$$-\frac{\vartheta(x)}{2} + \int_{\partial\Omega} \partial_{\upsilon y} G(x,y)\vartheta(y)dy - \int_{\partial\Omega} G(x,y)\left\{\partial_{\upsilon y}\vartheta(y) - \sum_{j=1}^{d} n_j b_j\, \vartheta\right\}dy = 0, x \in \partial\Omega. \tag{12}$$

Сравнивая это с (10), приходим к

$$\vartheta(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \tag{13}$$

Однородное строгое эллиптическое уравнение второго порядка (9) с граничным условием Дирихле (13) имеет только одно тривиальное решение $\vartheta \equiv 0$. Это показывает, что граничная задача (1) с граничным условием (7) имеет единственное решение в $H^2(\Omega)$.

Теорема 1 доказана.

Пример. [2] Пусть D оператор Δ –Лапласа, $n = 1$ и $\Omega_1 = R^d$, $d \geq 2$ тогда

$$\varepsilon(x-y) := E_1(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{(d-2)s_d}\dfrac{1}{|x-y|^{d-2}}, & d \geq 3, \\ -\dfrac{1}{2\pi} log|x-y|, & d = 2 \end{cases}$$

является фундаментальным решением оператора Лапласа в Ω_1, $s_d = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\varepsilon\left(\frac{d}{2}\right)}$ является площадью поверхности единичной сферы в R^d и $|x-y|$ стандартным евклидовым расстоянием между x и y. Поэтому вместо (5) имеем

$$u(x) = \int_{\Omega} \varepsilon_d(x-y)f(y)dy, \qquad x \in \Omega\,, \tag{14}$$

который является единственным решением

$$-\Delta u(x) = f(x), \quad x \in \Omega \tag{15}$$

с граничным условием

$$-\frac{u(x)}{2} + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \varepsilon_d(x-y)}{\partial n_y} u(y)dy - \int_{\partial\Omega} \varepsilon_d(x-y)\frac{\partial u(y)}{\partial n_y}dy = 0, x \in \partial\Omega, \tag{16}$$

где $\frac{\partial}{\partial n_y}$ обозначает внешнюю нормальную производную в точке y на $\partial\Omega$.

3. Полигармонические уравнения. Пусть $\Omega_1 \subset \Omega_2 \ldots \ldots \subset \Omega_n \subset R^d$ открытые ограниченные области с границами $\partial\Omega_i \in C^\infty$, $i = 1, \ldots, n$, соответственно. По лемме Хермандера существует локальное фундаментальное решение $E_i(x,y)$ полигармонического уравнения

$$(-\Delta_x)^m u(x) = f(x) \quad m = 1,2, \ldots \tag{17}$$

для каждого Ω_i.

Рассмотрим следующую функцию

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x,y)f(y)dy \tag{18}$$

в $\Omega \subset \Omega_1$, где

$$G(x,y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E_i(x,y), x, y \in \Omega. \tag{19}$$

Тривиальное наблюдение показывает, что и (18) является решением (17) в Ω. Цель этого раздела это – найти граничное условие такое, что с этим граничным условием уравнение (1) имело единственное решение в $H^{2m}(\Omega)$, которое совпадает с (18).

Теорема 2. Для каждого $f \in L_2(\Omega)$ (18) является единственным решением уравнения (17) в $H^{2m}(\Omega)$ с граничными условиями

$$-\frac{1}{2}(-\Delta_x)^i u(x) + \sum_{j=0}^{m-i-1}\int_{\partial\Omega}\frac{\partial}{\partial n_y}\left(-\Delta_y\right)^{m-1-j}G_{m,d}(x,y)\left(-\Delta_y\right)^{j+i}u(y)dS_y - \sum_{j=0}^{m-i-1}\int_{\partial\Omega}\left(-\Delta_y\right)^{m-1-j} G_{m,d}(x,y)\frac{\partial}{\partial n_y}\left(-\Delta_y\right)^{j+i} u(y)dS_y = 0, i = \overline{0, m-1}, x \in \partial\Omega \qquad (20)$$

где $\frac{\partial}{\partial n_y} = n_1\frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + n_n\frac{\partial}{\partial y_n}$-нормальная производная на границе и $n_1, n_{2,} \dots \dots, n_d$ -компоненты единичной нормали.

Доказательства Теоремы 2. Применяя формулу Грина (для каждого $x \in \Omega$) получаем

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} G_{m,d}(x,y)\left(-\Delta_y\right)^m u(y)dy$$

$$= \int_{\partial\Omega}\left(-\Delta_y\right)G_{m,d}(x,y)\left(-\Delta_y\right)^{m-1}u(y)dy + \int_{\partial\Omega}\frac{\partial G_{m,d}(x,y)}{\partial n_y}\left(-\Delta_y\right)^{m-1}u(y)dS_y$$

$$- \int_{\partial\Omega} G_{m,d}(x,y)\frac{\partial\left(-\Delta_y\right)^{m-1}u(y)}{\partial n_y}dS_y$$

$$= \int_{\partial\Omega}\left(-\Delta_y\right)^2 G_{m,d}(x,y)\left(-\Delta_y\right)^{m-2}u(y)dy$$

$$+ \int_{\partial\Omega}\frac{\partial(-\Delta)G_{m,d}(x,y)}{\partial n_y}\left(-\Delta_y\right)^{m-2}u(y)dS_y$$

$$- \int_{\partial\Omega}(-\Delta)G_{m,d}(x,y)\frac{\partial\left(-\Delta_y\right)^{m-2}u(y)}{\partial n_y}dS_y$$

$$+ \int_{\partial\Omega}\frac{\partial G_{m,d}(x,y)}{\partial n_y}\left(-\Delta_y\right)^{m-1}u(y)dS_y - \int_{\partial\Omega} G_{m,d}(x,y)\frac{\partial\left(-\Delta_y\right)^{m-1}u(y)}{\partial n_y}dS_y = \dots =$$

$$u(x) + \sum_{j=0}^{m-1}\int_{\partial\Omega}\frac{\partial}{\partial n_y}\left(-\Delta_y\right)^{m-1-j}G_{m,d}(x,y)\left(-\Delta_y\right)^{j}u(y)dS_y - \sum_{j=0}^{m-1}\int_{\partial\Omega}\left(-\Delta_y\right)^{m-1-j} G_{m,d}(x,y)\frac{\partial}{\partial n_y}\left(-\Delta_y\right)^{j} u(y)dS_y, x \in \Omega, \qquad (21)$$

где $\frac{\partial}{\partial n_y} = n_1\frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + n_n\frac{\partial}{\partial y_n}$-нормальная производная на границе и $n_1, n_{2,} \dots \dots, n_d$ -компоненты единичной нормали. Это означает, тождество

$$\sum_{j=0}^{m-1}\int_{\partial\Omega}\frac{\partial}{\partial n_y}\left(-\Delta_y\right)^{m-1-j}G_{m,d}(x,y)\left(-\Delta_y\right)^{j}u(y)dS_y - \sum_{j=0}^{m-1}\int_{\partial\Omega}\left(-\Delta_y\right)^{m-1-j} G_{m,d}(x,y)\frac{\partial}{\partial n_y}\left(-\Delta_y\right)^{j} u(y)dS_y = 0, x \in \Omega. \qquad (22)$$

Когда $x \to \partial\Omega$, используя свойства двойного и простого слоя потенциалов, из (22) получим

$$-\frac{1}{2}u(x) + \sum_{j=0}^{m-1}\int_{\partial\Omega}\frac{\partial}{\partial n_y}\left(-\Delta_y\right)^{m-1-j}G_{m,d}(x,y)\left(-\Delta_y\right)^{j}u(y)dS_y - \sum_{j=0}^{m-1}\int_{\partial\Omega}\left(-\Delta_y\right)^{m-1-j} G_{m,d}(x,y)\frac{\partial}{\partial n_y}\left(-\Delta_y\right)^{j} u(y)dS_y = 0, \quad x \in \partial\Omega\,. \qquad (23)$$

Таким образом, это соотношение является одним из граничных условий (18). Выведем остальные граничные условия. Для этого мы устанавливаем

$$(-\Delta_x)^{m-i}(-\Delta_x)^i u(x) = f(x) \quad i = \overline{0, m-1},\ m = 1,2, \dots \qquad (24)$$

и проводим подобные вычисления, как и выше,

$$(-\Delta_x)^i u(x)=\int_\Omega \left(-\Delta_y\right)^i G_{m,d}(x,y)\left(-\Delta_y\right)^{m-i}\left(-\Delta_y\right)^i u(y)dy=$$
$$\int_\Omega \left(-\Delta_y\right)\left(-\Delta_y\right)^i G_{m,d}(x,y)\left(-\Delta_y\right)^{m-i-1}\left(-\Delta_y\right)^i u(y)dy+$$
$$\int_{\partial\Omega}\frac{\partial}{\partial n_y}\left(-\Delta_y\right)^i G_{m,d}(x,y)\left(-\Delta_y\right)^{m-i-1}\left(-\Delta_y\right)^i u(y)dS_y-$$
$$\int_{\partial\Omega}\left(-\Delta_y\right)^i G_{m,d}(x,y)\frac{\partial}{\partial n_y}\left(-\Delta_y\right)^{m-i-1}\left(-\Delta_y\right)^i u(y)dS_y=$$
$$\int_\Omega \left(-\Delta_y\right)^2\left(-\Delta_y\right)^i G_{m,d}(x,y)\left(-\Delta_y\right)^{m-i-2}\left(-\Delta_y\right)^i u(y)dy+$$
$$\int_{\partial\Omega}\frac{\partial}{\partial n_y}\left(-\Delta_y\right)\left(-\Delta_y\right)^i G_{m,d}(x,y)\left(-\Delta_y\right)^{m-i-2}\left(-\Delta_y\right)^i u(y)dS_y-$$
$$\int_{\partial\Omega}\frac{\partial}{\partial n_y}\left(-\Delta_y\right)\left(-\Delta_y\right)^i G_{m,d}(x,y)\frac{\partial}{\partial n_y}\left(-\Delta_y\right)^{m-i-2}\left(-\Delta_y\right)^i u(y)dS_y+$$
$$\int_{\partial\Omega}\frac{\partial}{\partial n_y}\left(-\Delta_y\right)^i G_{m,d}(x,y)\left(-\Delta_y\right)^{m-i-1}\left(-\Delta_y\right)^i u(y)dS_y-$$
$$\int_{\partial\Omega}\left(-\Delta_y\right)^i G_{m,d}(x,y)\frac{\partial}{\partial n_y}\left(-\Delta_y\right)^{m-i-1}\left(-\Delta_y\right)^i u(y)dS_y=\ldots=$$
$$\int_\Omega \left(-\Delta_y\right)^{m-i}\left(-\Delta_y\right)^i G_{m,d}(x,y)\left(-\Delta_y\right)^i u(y)dy+$$
$$\sum_{j=0}^{m-i-1}\int_{\partial\Omega}\frac{\partial}{\partial n_y}\left(-\Delta_y\right)^{m-i-1-j}\left(-\Delta_y\right)^i G_{m,d}(x,y)\left(-\Delta_y\right)^j\left(-\Delta_y\right)^i u(y)dS_y-$$
$$\sum_{j=0}^{m-i-1}\int_{\partial\Omega}\left(-\Delta_y\right)^{m-i-1-j}\left(-\Delta_y\right)^i G_{m,d}(x,y)\frac{\partial}{\partial n_y}\left(-\Delta_y\right)^j\left(-\Delta_y\right)^i u(y)dS_y=$$
$$(-\Delta_x)^i u(x)+\sum_{j=0}^{m-i-1}\frac{\partial}{\partial n_y}\int_{\partial\Omega}\left(-\Delta_y\right)^{m-i-1-j}\left(-\Delta_y\right)^i G_{m,d}(x,y)\left(-\Delta_y\right)^j\left(-\Delta_y\right)^i u(y)dS_y-$$
$$\sum_{j=0}^{m-i-1}\int_{\partial\Omega}\left(-\Delta_y\right)^{m-i-1-j}\left(-\Delta_y\right)^i G_{m,d}(x,y)\frac{\partial}{\partial n_y}\left(-\Delta_y\right)^j\left(-\Delta_y\right)^i u(y)dS_y,\ x\in\Omega,$$

где $\left(-\Delta_y\right)^i G_{m,d}(x,y)$ являются фундаментальными решениями полигармонического уравнения (24); т.е.

$$(-\Delta_x)^{m-i}\left(-\Delta_y\right)^i G_{m,d}(x,y)=\delta(x-y)\qquad i=\overline{0,m-1}.$$

От предыдущих соотношений мы получим тождества

$$I_i u(x):=\sum_{j=0}^{m-i-1}\int_{\partial\Omega}\frac{\partial}{\partial n_y}\left(-\Delta_y\right)^{m-1-j}G_{m,d}(x,y)\left(-\Delta_y\right)^{j+i}u(y)dS_y-$$
$$\sum_{j=0}^{m-i-1}\int_{\partial\Omega}\left(-\Delta_y\right)^{m-1-j}G_{m,d}(x,y)\frac{\partial}{\partial n_y}\left(-\Delta_y\right)^{j+i}u(y)dS_y=0$$

$x\in\partial\Omega$, $i=\overline{0,m-1}$. Используя свойства двойного и простого слоя потенциалов как $x\to\partial\Omega$, мы находим

$$-\frac{1}{2}\,(-\Delta_x)^j u(x)+$$
$$\sum_{j=0}^{m-i-1}\int_{\partial\Omega}\frac{\partial}{\partial n_y}\left(-\Delta_y\right)^{m-1-j}G_{m,d}(x,y)\left(-\Delta_y\right)^{j+i}u(y)dS_y-$$
$$\sum_{j=0}^{m-i-1}\int_{\partial\Omega}\left(-\Delta_y\right)^{m-1-j}G_{m,d}(x,y)\frac{\partial}{\partial n_y}\left(-\Delta_y\right)^{j+i}u(y)dS_y=0,\ x\in\partial\Omega. \tag{25}$$

И все являются граничными условиями (18). От этого классического подхода (переходя к пределу) можно легко показать, что формулы (25) остаются в силе для всех $u\in H^{2m}(\Omega)$ [4]. И наоборот, покажем, что если функция $\omega\in H^{2m}(\Omega)$ удовлетворяет уравнение $(-\Delta)^m\omega=f$ и граничные условия (20), то оно совпадает с решением (18). В самом деле, в противном случае функция

$$\vartheta=u-\omega\in H^{2m}(\Omega)$$

где u является (18), удовлетворяет однородное уравнение

$$(-\Delta)^m\vartheta=0 \tag{26}$$

и граничные условия (20), т.е.

$$I_i\vartheta(x):=-\frac{1}{2}\,(-\Delta_x)^j\vartheta(x)+\sum_{j=0}^{m-i-1}\int_{\partial\Omega}\frac{\partial}{\partial n_y}\left(-\Delta_y\right)^{m-1-j}G_{m,d}(x,y)\left(-\Delta_y\right)^{j+i}\vartheta(y)dS_y-$$
$$\sum_{j=0}^{m-i-1}\int_{\partial\Omega}\left(-\Delta_y\right)^{m-1-i}G_{m,d}(x,y)\frac{\partial}{\partial n_y}\left(-\Delta_y\right)^{j+i}\vartheta(y)dS_y=0 \tag{27}$$
$$x\in\partial\Omega\,,\ \ i=\overline{0,m-1}.$$

Применяя формулу Грина к функции $\vartheta\in H^{2m}(\Omega)$ и следуя линии вышеуказанных рассуждений, мы получим

$$0=\int_\Omega\left(-\Delta_y\right)^iG_{m,d}(x,y)\left(-\Delta_y\right)^{m-i}\left(-\Delta_y\right)^i\vartheta(y)dy=$$
$$\int_\Omega\left(-\Delta_y\right)\left(-\Delta_y\right)^iG_{m,d}(x,y)\left(-\Delta_y\right)^{m-1}\vartheta(y)dy+$$
$$\int_{\partial\Omega}\frac{\partial}{\partial n_y}\left(-\Delta_y\right)^iG_{m,d}(x,y)\left(-\Delta_y\right)^{m-1}\left(-\Delta_y\right)^i\vartheta(y)dS_y-$$
$$\int_{\partial\Omega}\left(-\Delta_y\right)^iG_{m,d}(x,y)\frac{\partial}{\partial n_y}\left(-\Delta_y\right)^{m-1}\vartheta(y)dS_y=\cdots=$$
$$(-\Delta_x)^i\vartheta(x)+\sum_{j=0}^{m-i-1}\int_{\partial\Omega}\frac{\partial}{\partial n_y}\left(-\Delta_y\right)^{m-1-j}G_{m,d}(x,y)\left(-\Delta_y\right)^{j+i}\vartheta(y)dS_y-$$
$$\sum_{j=0}^{m-j-1}\int_{\partial\Omega}\left(-\Delta_y\right)^{m-1-j}G_{m,d}(x,y)\frac{\partial}{\partial n_y}\left(-\Delta_y\right)^{j+i}\vartheta(y)dS_y\qquad x\in\Omega\,,\ i=\overline{0,m-1}.$$

Переходя к пределу при $x\to\partial\Omega$, следовательно, мы получим соотношения

$$(-\Delta_x)^i\vartheta(x)|_{x\in\partial\Omega}=I_i\vartheta(x)|_{x\in\partial\Omega}=0,\ i=\overline{0,m-1} \tag{28}$$

Единственность решения краевой задачи

$$(-\Delta)^m\vartheta=0$$
$$(-\Delta)^i\vartheta|_{x\in\partial\Omega}=0,\ i=\overline{0,m-1}$$

следует, что $\vartheta=u-\omega\equiv0,\ \forall x\in\Omega$, т.е. ω совпадает с (18). Таким образом (18) является единсвенным решением краевой задачи (17), (20) в Ω.

Теорема 2 доказано.

Замечание. Это следует из теоремы 2, что ядро (19), которая является одним из фундаментальных решений полигармонического уравнения (17), является функцией Грина краевой задачи (17), (20) в Ω.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Hormander L., The analysis of linear partial differential operators, I-IV, – 1985. – Springer-Verlag Berlin.

[2] Kalmenov T. Sh., Suragan D. To spectral problems for the volume potential // Doklady Mathematics, – 2009. – No 80, – P. 646-649.

[3] Kalmenov T. Sh., Suragan D. Boundary conditions for the volume potential for the polyharmonic equation // Differential Equations, – 2012. – No 48, – P. 604-608.

[4] Hsiao G.C., Wendland W.L. Boundary Integral Equations. – 2008. – Heidelberg.

[5] McLean W., Strongly elliptic systems and boundary integral equations, – 2000. Cambridge Univ. Press, Cambridge UK.

REFERENCES

[1] Hormander L., The analysis of linear partial differential operators, I-IV, Springer-Verlag Berlin, 1985.

[2] Kalmenov T. Sh., Suragan D. *To spectral problems for the volume potential*, Doklady Mathematics, 2009. No 80, 646-649.

[3] Kalmenov T. Sh., Suragan D. *Boundary conditions for the volume potential for the polyharmonic equation*, Differential Equations, 2012. No 48, 604-608.

[4] Hsiao G.C., Wendland W.L. Boundary Integral Equations. Heidelberg, 2008. .

[5] McLean W., Strongly elliptic systems and boundary integral equations, Cambridge Univ. Press, Cambridge UK, 2000.

АЙНЫМАЛЫ КОЭФФИЦИЕНТТІ ЭЛЛИПТИКАЛЫҚ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ҮШІН ШЕГАРАЛЫҚ ИНТЕГРАЛДЫҚ ШАРТТАР

Т. Ш. Кәлменов, Д. Сұраған

Тірек сөздер: шекаралық интегралдық шарт, эллиптикалық теңдеу, шектік есеп**.**

Аннотация. Жұмыста екінші ретті айнымалы коэффициентті эллиптикалық дифференциалдық теңдеулер үшін [2]-ші жұмыстағы нәтижелерді жалпылайтын шегаралық интегралдық шарттар ұсынылады. Және де полигармоникалық операторлар үшін де ұқсас нәтижелер алынған.

Поступила 17.03.2015 г.

Publication Ethics and Publication Malpractice in the journals of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan

For information on Ethics in publishing and Ethical guidelines for journal publication see http://www.elsevier.com/publishingethics and http://www.elsevier.com/journal-authors/ethics.

Submission of an article to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan implies that the described work has not been published previously (except in the form of an abstract or as part of a published lecture or academic thesis or as an electronic preprint, see http://www.elsevier.com/postingpolicy), that it is not under consideration for publication elsewhere, that its publication is approved by all authors and tacitly or explicitly by the responsible authorities where the work was carried out, and that, if accepted, it will not be published elsewhere in the same form, in English or in any other language, including electronically without the written consent of the copyright-holder. In particular, translations into English of papers already published in another language are not accepted.

No other forms of scientific misconduct are allowed, such as plagiarism, falsification, fraudulent data, incorrect interpretation of other works, incorrect citations, etc. The National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan follows the Code of Conduct of the Committee on Publication Ethics (COPE), and follows the COPE Flowcharts for Resolving Cases of Suspected Misconduct (http://publicationethics.org/files/u2/New_Code.pdf). To verify originality, your article may be checked by the Cross Check originality detection service http://www.elsevier.com/editors/plagdetect.

The authors are obliged to participate in peer review process and be ready to provide corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. All authors of a paper should have significantly contributed to the research.

The reviewers should provide objective judgments and should point out relevant published works which are not yet cited. Reviewed articles should be treated confidentially. The reviewers will be chosen in such a way that there is no conflict of interests with respect to the research, the authors and/or the research funders.

The editors have complete responsibility and authority to reject or accept a paper, and they will only accept a paper when reasonably certain. They will preserve anonymity of reviewers and promote publication of corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. The acceptance of a paper automatically implies the copyright transfer to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.

The Editorial Board of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan will monitor and safeguard publishing ethics.

Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайте:

www:nauka-nanrk.kz

physics-mathematics.kz

Редактор *М. С. Ахметова*
Верстка на компьютере *Д. Н. Калкабековой*

Подписано в печать 20.03.2015.
Формат 60x881/8. Бумага офсетная. Печать – ризограф.
10,5 п.л. Тираж 300. Заказ 2.

Национальная академия наук РК
050010, Алматы, ул. Шевченко, 28, т. 272-13-18, 272-13-19