

ISSN 1991-346X

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ

Х А Б А Р Л А Р Ы

ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА
СЕРИЯСЫ**



СЕРИЯ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ



**PHYSICO-MATHEMATICAL
SERIES**

2 (300)

НАУРЫЗ – СӘУІР 2015 ж.

МАРТ – АПРЕЛЬ 2015 г.

MARCH – APRIL 2015

1963 ЖЫЛДЫҢ ҚАҢТАР АЙЫНАН ШЫҒА БАСТАҒАН
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1963 ГОДА
PUBLISHED SINCE JANUARY 1963

ЖЫЛЫНА 6 РЕТ ШЫҒАДЫ
ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД
PUBLISHED 6 TIMES A YEAR

АЛМАТЫ, ҚР ҰҒА
АЛМАТЫ, НАН РК
ALMATY, NAS RK

Б а с р е д а к т о р

ҚР ҰҒА академигі,

Мұтанов Г. М.

Р е д а к ц и я а л қ а с ы:

физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Әшімов А.А.**; техн. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Байғұнчеков Ж.Ж.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Жұмаділдаев А.С.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Қалменов Т.Ш.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Мұқашев Б.Н.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Өтелбаев М.О.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Тәкібаев Н.Ж.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Харин С.Н.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Әбішев М.Е.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Жантаев Ж.Ш.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Қалимолдаев М.Н.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Косов В.Н.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Мұсабаев Т.А.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Ойнаров Р.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Рамазанов Т.С.** (бас редактордың орынбасары); физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Темірбеков Н.М.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Өмірбаев У.У.**

Р е д а к ц и я к ең е с і:

Украинаның ҰҒА академигі **И.Н. Вишневский** (Украина); Украинаның ҰҒА академигі **А.М. Ковалев** (Украина); Беларусь Республикасының ҰҒА академигі **А.А. Михалевич** (Беларусь); Әзірбайжан ҰҒА академигі **А. Пашаев** (Әзірбайжан); Молдова Республикасының ҰҒА академигі **И. Тигиняну** (Молдова); мед. ғ. докторы, проф. **Иозеф Банас** (Польша)

Главный редактор

академик НАН РК

Г. М. Мутанов

Редакционная коллегия:

доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **А.А. Ашимов**; доктор техн. наук, проф., академик НАН РК **Ж.Ж. Байгунчеков**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **А.С. Джумадильдаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **Т.Ш. Кальменов**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **Б.Н. Мукашев**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **М.О. Отелбаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **Н.Ж. Такибаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **С.Н. Харин**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **М.Е. Абишев**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Ж.Ш. Жантаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **М.Н. Калимолдаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **В.Н. Косов**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Т.А. Мусабаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Р. Ойнаров**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Т.С. Рамазанов** (заместитель главного редактора); доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Н.М. Темирбеков**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **У.У. Умирбаев**

Редакционный совет:

академик НАН Украины **И.Н. Вишневский** (Украина); академик НАН Украины **А.М. Ковалев** (Украина); академик НАН Республики Беларусь **А.А. Михалевич** (Беларусь); академик НАН Азербайджанской Республики **А. Пашаев** (Азербайджан); академик НАН Республики Молдова **И. Тигиняну** (Молдова); д. мед. н., проф. **Иозеф Банас** (Польша)

«Известия НАН РК. Серия физико-математическая». ISSN 1991-346X

Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы)

Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации и архивов Министерства культуры и информации Республики Казахстан №5543-Ж, выданное 01.06.2006 г.

Периодичность: 6 раз в год.

Тираж: 300 экземпляров.

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, ком. 219, 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,

www.nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

© Национальная академия наук Республики Казахстан, 2015

Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75.

Editor in chief

G. M. Mutanov,
academician of NAS RK

Editorial board:

A.A. Ashimov, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **Zh.Zh. Baigunchekov**, dr. eng. sc., prof., academician of NAS RK; **A.S. Dzhumadildayev**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **T.S. Kalmenov**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **B.N. Mukhashev**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **M.O. Otelbayev**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **N.Zh. Takibayev**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **S.N. Kharin**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **M.Ye. Abishev**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **Zh.Sh. Zhantayev**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **M.N. Kalimoldayev**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **V.N. Kosov**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **T.A. Mussabayev**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **R. Oinarov**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **T.S. Ramazanov**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK (deputy editor); **N.M. Temirbekov**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **U.U. Umirbayev**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK

Editorial staff:

I.N. Vishnievski, NAS Ukraine academician (Ukraine); **A.M. Kovalev**, NAS Ukraine academician (Ukraine); **A.A. Mikhalevich**, NAS Belarus academician (Belarus); **A. Pashayev**, NAS Azerbaijan academician (Azerbaijan); **I. Tighineanu**, NAS Moldova academician (Moldova); **Joseph Banas**, prof. (Poland).

News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physical-mathematical series.
ISSN 1991-346X

Owner: RPA "National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan" (Almaty)

The certificate of registration of a periodic printed publication in the Committee of information and archives of the Ministry of culture and information of the Republic of Kazakhstan N 5543-Ж, issued 01.06.2006

Periodicity: 6 times a year

Circulation: 300 copies

Editorial address: 28, Shevchenko str., of. 219, 220, Almaty, 050010, tel. 272-13-19, 272-13-18,

www.nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

© National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, 2015

Address of printing house: ST "Aruna", 75, Muratbayev str, Almaty

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 300 (2015), 41 – 43

BOUNDARY CONDITIONS OF THE ONE VOLUME POTENTIAL IN MULTIDIMENSIONAL BALL

B. T. Torebek^{1,2}¹Institute of Mathematics and Mathematical Modelling, Almaty, Kazakhstan,²Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan. E-mail: turebekb85@mail.ru**Key words:** green's function, Poisson equation, fundamental solution, boundary conditions.**Abstract.** In this paper in the multi-dimensional unit ball is considered one volume potential. Found the boundary conditions studied of volume potential. It is proved that the considered volume potential is a solution of a special Robin problem for the Poisson equation.

УДК 517.956.225

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОДНОГО ОБЪЕМНОГО ПОТЕНЦИАЛА В МНОГОМЕРНОМ ШАРЕ

Б. Т. Торекбек^{1,2}¹Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан,²КазНУ им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан**Ключевые слова:** функция Грина, уравнение Пуассона, фундаментальное решение, граничные условия.**Аннотация.** В настоящей работе в многомерном единичном шаре рассматривается один объемный потенциал. Ядро данного потенциала является некоторая функция Грина. Найдены граничные условия исследуемого потенциала. Доказано, что рассматриваемый объемный потенциал является решением специальной задачи Робена для уравнения Пуассона.**1. Введение.** Пусть $\Omega = \{x \in R^n : |x| < 1\}$ - единичный шар, $n \geq 2$, $\partial\Omega = \{x \in R^n : |x| = 1\}$ - единичная сфера и $\omega_n = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ - площадь $\partial\Omega$ в R^n . Пусть f - достаточно гладкая функция в Ω . В области Ω рассмотрим функцию

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, y) f(y) dy, \quad (1)$$

где $G(x, y)$ имеет вид

$$G(x, y) = \varepsilon_n(x - y) + \varepsilon_n \left(x|y| - \frac{y}{|y|} \right), \quad (2)$$

здесь $\varepsilon_n(x - y)$ - фундаментальное решение оператора Лапласа (см. [1]):

$$\varepsilon_n(x - y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x - y|}, & n = 2; \\ \frac{1}{\omega_n(n-2)} |x - y|^{2-n}, & n \geq 3. \end{cases} \quad (3)$$

Так как функция $\varepsilon_n \left(x|y| - \frac{y}{|y|} \right)$ - гармоническая в Ω , то функция (2) удовлетворяет уравнению

$$-\Delta G(x, y) = \delta(x - y), (x, y) \in \Omega,$$

где $\delta(x - y)$ - дельта-функция Дирака. Тогда функция (1) будет решением уравнения

$$-\Delta u(x) = f(x), x \in \Omega. \quad (4)$$

Известно, что в двумерном круге функция (2) совпадает с функцией Грина задачи Неймана для уравнения (4). Для случая $n \geq 3$ неизвестно, какими свойствами обладает функция (2). Даже при $n = 3$ функция (2) не удовлетворяет условию Неймана.

Цель настоящей работы - найти граничные условия, которым удовлетворяет функция (1) при $n \geq 3$.

Отметим, что в работах [2, 3] были найдены граничные условия объемного потенциала для эллиптических уравнений. При этом в качестве ядра объемного потенциала выбиралось гласное фундаментальное решение (3).

Основным результатом нашей работы является

Теорема. Пусть $f(x) \in L_2(\Omega)$ и $u(x) \in W_2^2(\Omega)$. Тогда функция (1) является решением уравнения (4) и на $\partial\Omega$ удовлетворяет условию

$$\frac{\partial u}{\partial n_x}(x) + \frac{n-2}{2}u(x) = 0, x \in \partial\Omega, \quad (7)$$

где $\frac{\partial}{\partial n_x}$ - производная по направлению внешней нормали к $\partial\Omega$ по x . Верно и обратное утверждение:

задача для уравнения (4) с краевым условием (7) имеет единственное решение и это решение дается объемным потенциалом (1).

Доказательство. Рассмотрим функцию (1). Подставляя (4) в (1) и применяя вторую формулу Грина

$$\int_{\Omega} (v \cdot \Delta u - u \cdot \Delta v) dy = \int_{\partial\Omega} \left(v \cdot \frac{\partial}{\partial n_y} u - u \cdot \frac{\partial}{\partial n_y} v \right) dS_y$$

получим

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\Omega} G(x, y) \Delta u(y) dy = \int_{\Omega} \Delta G(x, y) u(y) dy + \int_{\partial\Omega} \left(G(x, y) \frac{\partial}{\partial n_y} u(y) - u(y) \frac{\partial}{\partial n_y} G(x, y) \right) dS_y = \\ &+ u(x) + \int_{\partial\Omega} \left(G(x, y) \frac{\partial}{\partial n_y} u(y) - u(y) \frac{\partial}{\partial n_y} G(x, y) \right) dS_y. \end{aligned}$$

Тогда

$$\int_{\partial\Omega} \left(G(x, y) \frac{\partial}{\partial n_y} u(y) - u(y) \frac{\partial}{\partial n_y} G(x, y) \right) dS_y = 0.$$

Отсюда в силу (2) имеем

$$\int_{\partial\Omega} \left(2\varepsilon_n(x-y) \frac{\partial}{\partial n_y} u(y) - u(y) \frac{\partial}{\partial n_y} G(x, y) \right) dS_y = 0. \quad (8)$$

Теперь вычислим нормальную производную функции (2) по y . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n_y} G(x, y) &= \frac{\partial}{\partial n_y} \varepsilon_n(x-y) + \frac{\partial}{\partial n_y} \varepsilon_n \left(x|y| - \frac{y}{|y|} \right) = \frac{\partial}{\partial n_y} \left[\left(|x|^2 - 2(x, y) + |y|^2 \right)^{\frac{2-n}{2}} + \left(|x|^2 |y|^2 - 2(x, y) + 1 \right)^{\frac{2-n}{2}} \right] = \\ &= \frac{2-n}{2} \left[\left(2|y| - 2(x, y) \right) \left(|x|^2 - 2(x, y) + |y|^2 \right)^{\frac{n}{2}} + \left(2|x|^2 |y| - 2(x, y) \right) \left(|x|^2 |y|^2 - 2(x, y) + 1 \right)^{\frac{n}{2}} \right]. \end{aligned}$$

Отсюда переходя к пределу при $y \rightarrow \partial\Omega$, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n_y} G(x, y) &= \frac{\partial}{\partial n_y} \varepsilon_n(x-y) + \frac{\partial}{\partial n_y} \varepsilon_n \left(x|y| - \frac{y}{|y|} \right) = \\ &= (2-n) \left(1 - 2(x, y) + |x|^2 \right) \left(|x|^2 - 2(x, y) + 1 \right)^{-\frac{n}{2}} = (2-n) \left(|x|^2 - 2(x, y) + 1 \right)^{\frac{2-n}{2}} = (2-n) \varepsilon_n(x-y). \end{aligned}$$

Подставляя полученные результаты в (8), имеем

$$\int_{\partial\Omega} \left(2\varepsilon_n(x-y) \frac{\partial}{\partial n_y} u(y) - (2-n)u(y)\varepsilon_n(x-y) \right) dS_y = 2 \int_{\partial\Omega} \varepsilon_n(x-y) \left(\frac{\partial}{\partial n_y} u(y) + \frac{n-2}{2}u(y) \right) dS_y = 0.$$

Отсюда получим граничное условие (7).

Доказательство обратного результата следует из единственности решения задачи Робена (7). Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантового финансирования Комитета науки МОН РК по проекту № 0570/ГФЗ.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Lawrence C. Evans, Partial Differential Equations. Graduate studies in Mathematics. American Math. Society, V.19, 1998. 668p.
 [2] Кальменов Т. Ш., Сураган Д. К спектральным вопросам объемного потенциала // Доклады РАН. 2009. Т. 428. №1. С.16-19.
 [3] Kalmenov T. Sh., Suragan D. A boundary condition and spectral problems for the Newton potentials // Oper. Theory Adv. Appl. 2011. V. 216. P.187-210.
 [4] Кальменов Т. Ш., Сураган Д. Граничные условия объемного потенциала для полигармонического уравнения // Дифференц. уравнения. 2012. Т.48. №4. С.595-599.

REFERENCES

- [1] Lawrence C. Evans, Partial Differential Equations. Graduate studies in Mathematics. American Math. Society, V.19, 1998. 668p. (in Eng.).
 [2] Kalmenov T. Sh., Suragan D. To spectral problems for the volume potential. Doklady Mathematics. 2009. V. 80. № 2. P.646-649. (in Eng.).
 [3] Kalmenov T. Sh., Suragan D. A boundary condition and spectral problems for the Newton potentials. Oper. Theory Adv. Appl. 2011. V. 216. P.187-210. (in Eng.).
 [4] Kalmenov T. Sh., Suragan D. Boundary conditions for the volume potential for the polyharmonic equation. Differential Equations. 2012. V. 48. № 4. P. 604-608. (in Eng.).

КӨПӨЛШЕМДІ ШАРДАҒЫ БІР КӨЛЕМДІК ПОТЕНЦИАЛДЫҢ ШЕКАРАЛЫҚ ШАРТЫ

Төрбек Б. Т.

Тірек сөздер: Грин функциясы, Пуассон тендеуі, фундаментал шешім, шекаралық шарт.

Аннотация. Жұмыста көпөлшемді бірлік шарда бір көлемдік потенциал қарастырылады. Берілген потенциалдың ядросы қандайда бір Грин функциясы болып табылады. Зерттелінетін потенциалдың шекаралық шарттары анықталады. Қарастырылып отырған көлемдік потенциал Пуассон тендеуі үшін Робен арнайы есебінің шешімі болатындығы дәлелденеді.

Поступила 11.03.2015г.

**Publication Ethics and Publication Malpractice
in the journals of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan**

For information on Ethics in publishing and Ethical guidelines for journal publication see <http://www.elsevier.com/publishingethics> and <http://www.elsevier.com/journal-authors/ethics>.

Submission of an article to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan implies that the described work has not been published previously (except in the form of an abstract or as part of a published lecture or academic thesis or as an electronic preprint, see <http://www.elsevier.com/postingpolicy>), that it is not under consideration for publication elsewhere, that its publication is approved by all authors and tacitly or explicitly by the responsible authorities where the work was carried out, and that, if accepted, it will not be published elsewhere in the same form, in English or in any other language, including electronically without the written consent of the copyright-holder. In particular, translations into English of papers already published in another language are not accepted.

No other forms of scientific misconduct are allowed, such as plagiarism, falsification, fraudulent data, incorrect interpretation of other works, incorrect citations, etc. The National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan follows the Code of Conduct of the Committee on Publication Ethics (COPE), and follows the COPE Flowcharts for Resolving Cases of Suspected Misconduct (http://publicationethics.org/files/u2/New_Code.pdf). To verify originality, your article may be checked by the Cross Check originality detection service <http://www.elsevier.com/editors/plagdetect>.

The authors are obliged to participate in peer review process and be ready to provide corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. All authors of a paper should have significantly contributed to the research.

The reviewers should provide objective judgments and should point out relevant published works which are not yet cited. Reviewed articles should be treated confidentially. The reviewers will be chosen in such a way that there is no conflict of interests with respect to the research, the authors and/or the research funders.

The editors have complete responsibility and authority to reject or accept a paper, and they will only accept a paper when reasonably certain. They will preserve anonymity of reviewers and promote publication of corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. The acceptance of a paper automatically implies the copyright transfer to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.

The Editorial Board of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan will monitor and safeguard publishing ethics.

Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайте:

www.nauka-nanrk.kz

physics-mathematics.kz

Редактор *М. С. Ахметова*
Верстка на компьютере *Д. Н. Калкабековой*

Подписано в печать 20.03.2015.
Формат 60x881/8. Бумага офсетная. Печать – ризограф.
10,5 п.л. Тираж 300. Заказ 2.