ISSN 1991-346X

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ

Х А Б А Р Л А Р Ы

ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

N E W S

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА СЕРИЯСЫ

♦

СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

♦

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

2 (300)

НАУРЫЗ – СӘУІР 2015 ж.
МАРТ – АПРЕЛЬ 2015 г.
MARCH – APRIL 2015

1963 ЖЫЛДЫҢ ҚАҢТАР АЙЫНАН ШЫҒА БАСТАҒАН
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1963 ГОДА
PUBLISHED SINCE JANUARY 1963

ЖЫЛЫНА 6 РЕТ ШЫҒАДЫ
ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД
PUBLISHED 6 TIMES A YEAR

АЛМАТЫ, ҚР ҰҒА
АЛМАТЫ, НАН РК
ALMATY, NAS RK

«Известия НАН РК. Серия физико-математическая». ISSN 1991-346X
Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы)
Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации и архивов Министерства культуры и информации Республики Казахстан **№5543-Ж**, выданное 01.06.2006 г.

Периодичность: 6 раз в год.
Тираж: 300 экземпляров.

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, ком. 219, 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,
www:nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75.

News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physical-mathematical series.
ISSN 1991-346X
Owner: RPA "National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan" (Almaty)
The certificate of registration of a periodic printed publication in the Committee of information and archives of the Ministry of culture and information of the Republic of Kazakhstan N 5543-Ж, issued 01.06.2006

Periodicity: 6 times a year
Circulation: 300 copies

Editorial address: 28, Shevchenko str., of. 219, 220, Almaty, 050010, tel. 272-13-19, 272-13-18,
www:nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

Address of printing house: ST "Aruna", 75, Muratbayev str, Almaty

N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 2, Number 300 (2015), 5 – 13

ON ALGEBRAS OF DISTRIBUTIONS OF BINARY FORMULAS FOR QUITE O-MINIMAL THEORIES

B. Sh. Kulpeshov[1], S. V. Sudoplatov[2]

[1]International Information Technology University, Almaty, Kazakhstan, e-mail: b.kulpeshov@iitu.kz
[2]Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia, e-mail: sudoplat@math.nsc.ru

Keywords: weak o-minimality, quite o-minimality, countable categoricity, algebra of distributions, binary formula, monoid.
Abstract. Algebras of distributions of binary isolating formulas for countably categorical quite o-minimal theories are studied and their generalized commutability is proved.

УДК 510.67

ОБ АЛГЕБРАХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ БИНАРНЫХ ФОРМУЛ ДЛЯ ВПОЛНЕ О-МИНИМАЛЬНЫХ ТЕОРИЙ

Б. Ш. Кулпешов [1], С. В. Судоплатов [2]

[1]Международный университет информационных технологий, Алматы, Казахстан,
[2]Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирский государственный технический университет, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

Ключевые слова: слабая о-минимальность, вполне о-минимальность, счетная категоричность, алгебра распределений, бинарная формула, моноид.
Аннотация. В настоящей работе исследованы алгебры распределений бинарных изолирующих формул для счетно категоричных вполне о-минимальных теорий и доказана их обобщенная коммутативность.

Настоящая работа касается понятия слабой о-минимальности, первоначально глубоко исследованного Д. Макферсоном, Д. Маркером и Ч. Стейнхорном в [1]. Подмножество A линейно упорядоченной структуры M называется *выпуклым*, если для любых $a,b \in A$ и $c \in M$ всякий раз когда $a < c < b$ мы имеем $c \in A$. *Слабо о-минимальной структурой* называется линейно упорядоченная структура $M = \langle M, =, <, \ldots \rangle$ такая, что любое определимое (с параметрами) подмножество структуры M является объединением конечного числа выпуклых множеств в M.

В работах [2-10] исследуются распределения бинарных изолирующих и полуизолирующих формул, связывающих реализации типов. В частности, в монографии [7] рассматривается общий подход к описанию бинарных связей между реализациями 1-типов на языке меток попарно неэквивалентных полуизолирующих формул. Все необходимые определения можно также найти в [7].

Пусть T – полная теория, $M \models T$, и $p(x), q(y) \in S_1(\varnothing)$ реализуются в M. Формула $\varphi(x,y)$ называется (p,q)*-устойчивой* (или (p,q)*-полуизолирующей*), если существует элемент $a \in M$ такой, что $\models p(a)$ и $\varphi(a,M) \subseteq q(M)$. Будем говорить, что a *полуизолирует* b посредством (p,q)*-устойчивой* формулы $\varphi(x,y)$, если выполняется $\models p(a)$, $\models q(b)$ и $\models \varphi(a,b)$. Если дополнительно формула $\varphi(a,y)$ является главной над $\{a\}$, то говорят, что a *изолирует* b, а формула $\varphi(x,y)$ называется (p,q)*-изолирующей.*

Определим для каждой (p,q)-полуизолирующей формулы $\varphi(x,y)$ двухместное отношение $R_{p,\varphi,q} := \{(a,b) \mid M \models p(a) \wedge \varphi(a,b)\}$. При условии $(a,b) \in R_{p,\varphi,q}$ пара (a,b) называется (p,φ,q)*-дугой*. Если $\varphi(a,y)$ – главная формула (над a), то (p,φ,q)-дуга (a,b) также называется *главной*.

Если $\varphi(x,y)$ является $(p \leftrightarrow q)$*-формулой*, т.е. одновременно (p,q)- и (q,p)-устойчивой, то множество $[a,b] := \{(a,b),(b,a)\}$ называется (p,φ,q)*-ребром*. Если (p,φ,q)-ребро $[a,b]$ состоит из главных (p,φ,q)- и (q,φ^{-1},p)-дуг, где $\varphi^{-1}(x,y)$ обозначает $\varphi(y,x)$, то $[a,b]$ называется *главным* (p,φ,q)*-ребром*. Дуги (a,b), у которых пары (b,a) не являются дугами ни по каким (q,p)-формулам, будем называть *необращаемыми*.

Для типов $p(x), q(y) \in S_1(\varnothing)$ обозначим через $PF(p,q)$ множество $\{\varphi(x,y) \mid \varphi(a,y)$ – главная формула, $\varphi(a,M) \subseteq q(M)$, где $\models p(a)\}$. Пусть $PE(p,q)$ – множество пар $(\varphi(x,y), \psi(x,y))$ формул из $PF(p,q)$ таких, что для любой (некоторой) реализации a типа p совпадают множества решений формул $\varphi(a,y)$ и $\psi(a,y)$.

Очевидно, что $PE(p,q)$ является отношением эквивалентности на множестве $PF(p,q)$. Заметим, что каждому $PE(p,q)$-классу E соответствует либо главное ребро, либо необращаемая главная дуга, связывающая реализации типов p и q посредством любой (некоторой) формулы из E. Таким образом, фактор-множество $PF(p,q)/PE(p,q)$ представляется в виде дизъюнктного объединения множеств $PFS(p,q)$ и $PFN(p,q)$, где $PFS(p,q)$ состоит из $PE(p,q)$-классов, соответствующих главным ребрам, а $PFN(p,q)$ состоит из $PE(p,q)$-классов, соответствующих необращаемым главным дугам.

Зафиксируем полную теорию T. Пусть $U = U^- \dot\cup \{0\} \dot\cup U^+$ – некоторый алфавит мощности $\geq |S(T)|$, состоящий из *отрицательных элементов* $u^- \in U^-$, *положительных элементов* $u^+ \in U^+$ и нуля 0. Как обычно, будем писать $u < 0$ для любого элемента $u \in U^-$ и $u > 0$ для любого элемента $u \in U^+$. Множество $U^- \cup \{0\}$ обозначается через $U^{\leq 0}$, а $U^+ \cup \{0\}$ – через $U^{\geq 0}$. Элементы множества U будем называть *метками*.

Рассмотрим инъективные меточные функции $\nu(p,q): PF(p,q)/PE(p,q) \to U$, где $p(x), q(y) \in S_1(\varnothing)$, при которых классам из $PFN(p,q)/PE(p,q)$ соответствуют отрицательные элементы, а классам из $PFS(p,q)/PE(p,q)$ – элементы неотрицательные так, что значение 0 определяется лишь для $p = q$ и задается по формуле $x = y$. При этом будем считать, что $\rho_{\nu(p)} \cap \rho_{\nu(q)} = \{0\}$ для $p \neq q$ (где $\nu(p) := \nu(p,p)$, а через ρ_f обозначается область значений функции f) и $\rho_{\nu(p,q)} \cap \rho_{\nu(p',q')} = \varnothing$, если $p \neq q$ и $(p,q) \neq (p',q')$. Любые меточные функции с указанными свойствами, а также семейства таких функций будем называть *правильными* и далее рассматривать только правильные меточные функции и их правильные семейства.

Через $\theta_{p,u,q}(x,y)$ будут обозначаться формулы из $PF(p,q)$, представляющие метку $u \in \rho_{\nu(p,q)}$.

Отметим, что если $\theta_{p,u,q}(x,y)$ и $\theta_{q,v,p}(x,y)$ – формулы, свидетельствующие о том, что для реализаций a и b типов p и q соответственно пары (a,b) и (b,a) являются главными дугами, то формула $\theta_{p,u,q}(x,y)\wedge\theta_{q,v,p}(y,x)$ свидетельствует о том, что $[a,b]$ является главным ребром. При этом *обратимой* метке u однозначно соответствует (неотрицательная) метка v и наоборот. Метки u и v будем называть *взаимно обратными* и обозначать через v^{-1} и u^{-1} соответственно.

Для типов $p_1,p_2,...,p_{k+1}\in S_1(\varnothing)$ и множеств меток $X_1,X_2,...,X_k\subseteq U$ обозначим через $P(p_1,X_1,p_2,X_2,...,p_k,X_k,p_{k+1})$ множество, состоящее из всех меток $u\in U$, соответствующих формулам $\theta_{p_1,u,p_{k+1}}(x,y)$, которые для реализаций a типа p_1 и некоторых $u_1\in X_1\cap\rho_{\nu(p_1,p_2)}$,..., $u_k\in X_k\cap\rho_{\nu(p_k,p_{k+1})}$ удовлетворяют условию $\theta_{p_1,u,p_{k+1}}(a,M)\subseteq\theta_{p_1,u_1,p_2,u_2,...,p_k,u_k,p_{k+1}}(a,M)$, где

$$\theta_{p_1,u_1,p_2,u_2,...,p_k,u_k,p_{k+1}}(x,y):=\exists x_2,x_3,...,x_k(\theta_{p_1,u_1,p_2}(x,x_2)\wedge\theta_{p_2,u_2,p_3}(x_2,x_3)\wedge...$$
$$...\wedge\theta_{p_{k-1},u_{k-1},p_k}(x_{k-1},x_k)\wedge\theta_{p_k,u_k,p_{k+1}}(x_k,y))$$

Тем самым, на булеане $P(U)$ множества U образуется *алгебра распределений бинарных изолирующих формул* с k-местными операциями $P(p_1,\cdot,p_2,\cdot,...,\cdot,p_k,\cdot,p_{k+1})$, где $p_1,...,p_{k+1}\in S_1(\varnothing)$. Эта алгебра имеет естественное обеднение на любое семейство $R\subseteq S_1(\varnothing)$.

Очевидно, что биективно заменяя множество меток, мы получаем изоморфную алгебру. В частности, имеется *каноническая алгебра*, у которой метки представлены элементами множества $\bigcup\limits_{p,q}PF(p,q)/PE(p,q)$. Тем не менее, мы будем использовать абстрактное множество меток U, отражающее знаки меток и проясняющее алгебраические свойства операций на $P(U)$.

Пример 1 (Example 2.6.1, [1]) Пусть $M=\langle M,<,P_1^1,P_2^1,f^1\rangle$ – линейно упорядоченная структура, так что M есть непересекающееся объединение интерпретаций унарных предикатов P_1 и P_2, при этом $P_1(M)<P_2(M)$. Мы отождествляем интерпретацию P_2 с Q, упорядоченной как обычно, а P_1 с $Q\times Q$, упорядоченной лексикографически. Символ f интерпретируется частичной унарной функцией с $Dom(f)=P_1(M)$ и $Range(f)=P_2(M)$ и определяется посредством $f((n,m))=n$ для всех $(n,m)\in Q\times Q$.

Известно, что M – счетно категоричная слабо о-минимальная структура. Пусть $p:=\{P_1(x)\},q:=\{P_2(x)\}$. Очевидно, что $p,q\in S_1(\varnothing)$. Если обратимся к меточным функциям, то имеем: $\rho_{\nu(q)}=\{0, 1, 2\}$, $\rho_{\nu(p)}=\{0, 3, 4, 5, 6\}$, $\rho_{\nu(p,q)}=\{7, 8, 9\}$, $\rho_{\nu(q,p)}=\{10, 11, 12\}$, где

$$\theta_0(x,y):=x=y,\ \ \theta_{q,1,q}(x,y):=x<y\wedge P_2(x)\wedge P_2(y),\ \theta_{q,2,q}(x,y):=x>y\wedge P_2(x)\wedge P_2(y),$$
$$\theta_{p,3,p}(x,y):=x<y\wedge E(x,y)\wedge P_1(y),\ \theta_{p,4,p}(x,y):=x>y\wedge E(x,y)\wedge P_1(y),$$
$$\theta_{p,5,p}(x,y):=x<y\wedge\neg E(x,y)\wedge P_1(y),\ \theta_{p,6,p}(x,y):=x>y\wedge\neg E(x,y)\wedge P_1(y),$$
$$\theta_{p,7,q}(x,y):=f(x)=y\wedge P_1(x)\wedge P_2(y),\ \theta_{p,8,q}(x,y):=f(x)<y\wedge P_1(x)\wedge P_2(y),$$
$$\theta_{p,9,q}(x,y):=f(x)>y\wedge P_1(x)\wedge P_2(y),\ \theta_{q,10,p}(x,y):=x=f(y)\wedge P_2(x)\wedge P_1(y),$$
$$\theta_{q,11,p}(x,y):=x>f(y)\wedge P_2(x)\wedge P_1(y),\ \theta_{q,12,p}(x,y):=x<f(y)\wedge P_2(x)\wedge P_1(y).$$

Алгебра $P_{\nu(q)}$ задается следующей таблицей Кэли:

$\cdot$	0	1	2
0	{0}	{1}	{2}
1	{1}	{1}	{0, 1, 2}
2	{2}	{0, 1, 2}	{2}

Для алгебры $P_{\nu(p)}$ таблица Кэли имеет следующий вид:

$\cdot$	0	3	4	5	6
0	{0}	{3}	{4}	{5}	{6}
3	{3}	{3}	{0, 3, 4}	{5}	{6}
4	{4}	{0, 3, 4}	{4}	{5}	{6}
5	{5}	{5}	{5}	{5}	{0, 3, 4, 5, 6}
6	{6}	{6}	{6}	{0, 3, 4, 5, 6}	{6}

Согласно таблицам Кэли, алгебры $P_{\nu(p)}$ и $P_{\nu(q)}$ являются коммутативными моноидами, причем моноид $P_{\nu(q)}$ изоморфен ограничению моноида $P_{\nu(p)}$ на множество $\{0, 3, 4\}$.

Определение 2. [11] Пусть T – слабо о-минимальная теория, M – достаточно насыщенная модель теории T, и пусть $\phi(x,\overline{a}), \overline{a} \in M$, – произвольная формула с одной свободной переменной.

Ранг выпуклости формулы $\phi(x,\overline{a})$ ($RC(\phi(x,\overline{a}))$) определяется следующим образом:

1) $RC(\phi(x,\overline{a})) \geq 0$, если $M \models \exists x \phi(x,\overline{a})$.

2) $RC(\phi(x,\overline{a})) \geq 1$, если $\phi(M,\overline{a})$ бесконечно.

3) $RC(\phi(x,\overline{a})) \geq \alpha + 1$, если существует параметрически определимое отношение эквивалентности $E(x, y)$ такое, что существуют $b_i, i \in \omega$, которые удовлетворяют следующему:

– Для любых $i, j \in \omega$, всякий раз когда $i \neq j$ мы имеем $M \models \neg E(b_i, b_j)$;

– Для каждого $i \in \omega$ $RC(E(x,b_i)) \geq \alpha$ и $E(M,b_i)$ – выпуклое подмножество множества $\phi(M,\overline{a})$.

4) $RC(\phi(x,\overline{a})) \geq \delta$, если $RC(\phi(x,\overline{a})) \geq \alpha$ для всех $\alpha \leq \delta$ (δ предельный).

Если $RC(\phi(x,\overline{a})) = \alpha$ для некоторого α, то мы говорим что $RC(\phi(x,\overline{a}))$ *определяется.* В противном случае (т.е. если $RC(\phi(x,\overline{a})) \geq \alpha$ для всех α), мы полагаем $RC(\phi(x,\overline{a})) = \infty$.

Определение 3. [12] *Рангом выпуклости 1-типа* p ($RC(p)$) называется инфимум множества $\{RC(\phi(x)) \mid \phi(x) \in p\}$, т.е. $RC(p) := \inf\{RC(\phi(x)) \mid \phi(x) \in p\}$.

В Примере 1 тип p не слабо ортогонален типу q, $dcl(\{a\}) \cap q(M) \neq \varnothing$ и $dcl(\{b\}) \cap p(M) = \varnothing$ для некоторых (любых) $a \in p(M), b \in q(M)$, $RC(p) = 2, RC(q) = 1$.

Ранг выпуклости произвольной одноместной формулы $\phi(x)$ назовем *бинарным* и будем обозначать через $RC_{bin}(\phi(x))$, если в Определении 2 параметрически определимые отношения эквивалентности заменим на $\varnothing$-определимые (т.е. бинарные) отношения эквивалентности. Тогда очевидно, что в произвольной счетно категоричной слабо о-минимальной теории бинарный ранг выпуклости одноместной формулы конечен. Следовательно, для любого неалгебраического 1-типа $p \in S_1(\varnothing)$ выполняется $RC_{bin}(p) < \omega$.

Определение 4. (Байжанов Б.С., [13]) Пусть M – слабо о-минимальная структура, $A, B \subseteq M$, M – $|A|^+$-насыщенна, $p, q \in S_1(A)$ – неалгебраические типы. Будем говорить что тип p не является *слабо ортогональным* типу q, если существуют A-определимая формула $H(x, y), \alpha \in p(M)$ и β_1, $\beta_2 \in q(M)$ такие что $\beta_1 \in H(M,\alpha)$ и $\beta_2 \notin H(M,\alpha)$.

Вернемся к Примеру 1. Алгебра $P_{\nu(\{p,q\})}$ получается расширением алгебр $P_{\nu(p)}$ и $P_{\nu(q)}$ следующими действиями:

а) $n \cdot 0 = 0 \cdot n = \{n\}$, $n \in \{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$,

б) $7 \cdot 1 = \{8\}$, $7 \cdot 2 = \{9\}$, $7 \cdot 10 = \{0, 3, 4\}, 7 \cdot 11 = \{6\}, 7 \cdot 12 = \{5\}$, в) $8 \cdot 1 = \{8\}$, $8 \cdot 2 = \{7, 8, 9\}$, $8 \cdot 10 = \{5\}$, $8 \cdot 11 = \{0, 3, 4, 5, 6\}$, $8 \cdot 12 = \{5\}$,

г) $9 \cdot 1 = \{7, 8, 9\}$, $9 \cdot 2 = \{9\}$, $9 \cdot 10 = \{6\}$, $9 \cdot 11 = \{6\}$, $9 \cdot 12 = \{0, 3, 4, 5, 6\}$,

д) $10 \cdot 3 = \{10\}$, $10 \cdot 4 = \{10\}$, $10 \cdot 5 = \{12\}$, $10 \cdot 6 = \{11\}$, $10 \cdot 7 = \{0\}$, $10 \cdot 8 = \{1\}$, $10 \cdot 9 = \{2\}$,

е) $11 \cdot 3 = \{11\}$, $11 \cdot 4 = \{11\}$, $11 \cdot 5 = \{10, 11, 12\}$, $11 \cdot 6 = \{11\}$, $11 \cdot 7 = \{2\}$, $11 \cdot 8 = \{0, 1, 2\}$, $11 \cdot 9 = \{2\}$,

ж) $12 \cdot 3 = \{12\}$, $12 \cdot 4 = \{12\}$, $12 \cdot 5 = \{12\}$, $12 \cdot 6 = \{10, 11, 12\}$, $12 \cdot 7 = \{1\}$, $12 \cdot 8 = \{1\}$, $12 \cdot 9 = \{0, 1, 2\}$.

Нетрудно понять, что алгебра $P_{\nu(\{p,q\})}$ является некоммутативным моноидом с частичной операцией умножения.

Пример 5. Пусть $M = \langle M, <, P_1^1, P_2^1, f^1 \rangle$ – линейно упорядоченная структура, так что M есть непересекающееся объединение интерпретаций унарных предикатов P_1 и P_2, при этом $P_1(M) < P_2(M)$. Мы отождествляем интерпретации P_1 и P_2 с Q, упорядоченной как обычно. Символ f интерпретируется частичной унарной функцией с $Dom(f) = P_1(M)$ и $Range(f) = P_2(M)$ и определяется посредством $f(a) = a$ для всех $a \in Q$.

Может быть доказано, что M – счетно категоричная слабо о-минимальная структура. Пусть $p := \{P_1(x)\}, q := \{P_2(x)\}$. Очевидно, что $p, q \in S_1(\varnothing)$ и f – $\varnothing$-определимая биекция $p(M)$ на $q(M)$. Обращаясь к меточным функциям, имеем: $\rho_{\nu(q)} = \{0, 1, 2\}$, $\rho_{\nu(p)} = \{0, 3, 4\}$, $\rho_{\nu(p,q)} = \{5, 6, 7\}$, $\rho_{\nu(q,p)} = \{8, 9, 10\}$, где

$$\theta_0(x,y) := x = y,\ \theta_{p,1,p}(x,y) := x < y \wedge P_1(x) \wedge P_1(y),\ \theta_{p,2,p}(x,y) := x > y \wedge P_1(x) \wedge P_1(y),$$

$$\theta_{q,3,q}(x,y) := x < y \wedge P_2(x) \wedge P_2(y),\ \theta_{q,4,q}(x,y) := x > y \wedge P_2(x) \wedge P_2(y),$$

$$\theta_{p,5,q}(x,y) := f(x) = y \wedge P_1(x) \wedge P_2(y),\ \theta_{p,6,q}(x,y) := f(x) < y \wedge P_1(x) \wedge P_2(y),$$

$$\theta_{p,7,q}(x,y) := f(x) > y \wedge P_1(x) \wedge P_2(y),\ \theta_{q,8,p}(x,y) := x = f(y) \wedge P_2(x) \wedge P_1(y),$$

$$\theta_{q,9,p}(x,y) := x > f(y) \wedge P_2(x) \wedge P_1(y),\ \theta_{q,10,p}(x,y) := x < f(y) \wedge P_2(x) \wedge P_1(y).$$

Алгебра $P_{\nu(q)}$ задается той же самой таблицей Кэли как и алгебра $P_{\nu(q)}$ из Примера 1. Алгебра $P_{\nu(p)}$ имеет ту же самую таблицу Кэли с точностью до взаимно однозначного отображения π множества $\rho_{\nu(p)}$ на множество $\rho_{\nu(q)}$: $\pi(0) = 0, \pi(1) = 3, \pi(2) = 4$. Рассмотрим алгебру $P_{\nu(\{p,q\})}$. Поскольку $\theta_{p,i,q} \cdot \theta_{q,j,p} = \theta_{p,k,p}$ для некоторого $k \in \{0, 1, 2\}$, а $\theta_{q,j,p} \cdot \theta_{p,i,q} = \theta_{q,l,q}$ для некоторого $l \in \{0, 3, 4\}$, то данная алгебра уже не будет коммутативной. А так как $\theta_{p,i,p} \cdot \theta_{q,j,q} = \varnothing$, то операция $\cdot$ будет частичной.

Будем говорить, что алгебра $P_{\nu(\{p,q\})}$ является *обобщенно коммутативной*, если существует взаимно однозначное отображение $\pi : \rho_{\nu(p)} \to \rho_{\nu(q)}$, свидетельствующее о том, что алгебры $P_{\nu(p)}$ и $P_{\nu(q)}$ изоморфны (т.е. когда их таблицы Кэли совпадают с точностью до π), и для любых $l \in \rho_{\nu(p,q)}$, $m \in \rho_{\nu(q,p)}$ имеет место $\pi(l \cdot m) = m \cdot l$.

Можно доказать, что в Примере 5 алгебра $P_{\nu(\{p,q\})}$ является обобщенно коммутативной. В то время как алгебра $P_{\nu(\{p,q\})}$ из Примера 1 не является обобщенно коммутативной, поскольку не существует изоморфизма между $P_{\nu(p)}$ и $P_{\nu(q)}$, а также например, $10 \cdot 7 = \{0\}$, $7 \cdot 10 = \{0, 3, 4\}$, т.е. $10 \cdot 7 \subset 7 \cdot 10$.

Определение 6. [14] Пусть M – слабо о-минимальная структура, $A, B \subseteq M$, M – $|A|^+$-насыщенна, $p, q \in S_1(A)$ – неалгебраические типы. Будем говорить что тип p не является *вполне ортогональным* типу q, если существует A-определимая биекция $f : p(M) \to q(M)$. Будем говорить, что слабо о-минимальная теория является *вполне о-минимальной*, если понятия слабой и вполне ортогональности 1-типов совпадают.

Очевидно, что в Примере 5 теория $\mathrm{Th}(M)$ является вполне о-минимальной, а в Примере 1 теория $\mathrm{Th}(M)$ не является вполне о-минимальной. В работе [15] были полностью описаны счетно категоричные вполне о-минимальные теории. Следующая теорема представляет описание алгебры распределений бинарных изолирующих формул для пары не слабо ортогональных типов в произвольной счетно категоричной вполне о-минимальной теории.

Теорема 7. Пусть T – счетно категоричная вполне о-минимальная теория, $p,q \in S_1(\varnothing)$ – неалгебраические типы, p не слабо ортогонален q. Тогда алгебра $\mathrm{P}_{\nu(\{p,q\})}$ является обобщенно коммутативным моноидом.

Доказательство Теоремы 7. Пусть M – модель теории T. Так как p не слабо ортогонален q, то в силу вполне о-минимальности T существует $\varnothing$-определимая функция $f: p(M) \to q(M)$, являющаяся локально монотонной биекцией $p(M)$ на $q(M)$. В силу бинарности счетно категоричной вполне о-минимальной теории существует $n < \omega$ такой, что $RC(p) = RC(q) = n$, т.е. существуют $\varnothing$-определимые отношения эквивалентности $E_1^p(x,y),\ldots,E_{n-1}^p(x,y)$ и $E_1^q(x,y),\ldots,E_{n-1}^q(x,y)$, разбивающие $p(M)$ и $q(M)$ соответственно на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, при этом $E_1^p(a,M) \subset \ldots \subset E_{n-1}^p(a,M)$ и $E_1^q(b,M) \subset \ldots \subset E_{n-1}^q(b,M)$ для некоторых (любых) $a \in p(M), b \in q(M)$.

Не умаляя общности, предположим что f – локально возрастающая функция на $p(M)$, т.е. f является строго возрастающей на каждом E_1^p-классе. Рассмотрим следующие меточные формулы:

$$\theta_0(x,y) := x = y,$$

$$\theta_{p,1,p}(x,y) := x < y \wedge E_1^p(x,y),\ \theta_{q,1',q}(x,y) := x < y \wedge E_1^q(x,y),$$

$$\theta_{p,2,p}(x,y) := x > y \wedge E_1^p(x,y),\ \theta_{q,2',q}(x,y) := x > y \wedge E_1^q(x,y),$$

$$\theta_{p,3,p}(x,y) := x < y \wedge \neg E_1^p(x,y) \wedge E_2^p(x,y),\ \theta_{q,3',q}(x,y) := x < y \wedge \neg E_1^q(x,y) \wedge E_2^q(x,y),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\theta_{p,2n-1,p}(x,y) := x < y \wedge \neg E_{n-1}^p(x,y),\ \theta_{q,(2n-1)',q}(x,y) := x < y \wedge \neg E_{n-1}^q(x,y),$$

$$\theta_{p,2n,p}(x,y) := x > y \wedge \neg E_{n-1}^p(x,y),\ \theta_{q,(2n)',q}(x,y) := x > y \wedge \neg E_{n-1}^q(x,y),$$

$$\theta_{p,2n+1,q}(x,y) := f(x) = y,\ \theta_{q,4n+2,p}(x,y) := x = f(y),$$

$$\theta_{p,2n+2,q}(x,y) := f(x) < y \wedge E_1^q(f(x),y),\ \theta_{q,4n+3,p}(x,y) := x > f(y) \wedge E_1^q(x,f(y)),$$

$$\theta_{p,2n+3,q}(x,y) := f(x) > y \wedge E_1^q(f(x),y),\ \theta_{q,4n+4,p}(x,y) := x < f(y) \wedge E_1^q(x,f(y)),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\theta_{p,4n+1,q}(x,y) := f(x) > y \wedge \neg E_{n-1}^q(f(x),y),\ \theta_{q,6n+2,p}(x,y) := x < f(y) \wedge \neg E_{n-1}^q(x,f(y)).$$

Осталось понять, что для любых меток l,m таких, что $l \in \{2n+1,\ldots,4n+1\}$ и $m \in \{4n+2,\ldots,6n+2\}$, имеет место равенство $l \cdot m = m \cdot l$ с точностью до изоморфизма между алгебрами $P_{\nu(p)}$ и $P_{\nu(q)}$.

Случай 1. $\theta_{p,l,q}(x,y) \equiv f(x) = y \wedge P_1(x) \wedge P_2(y)$.

Если $\theta_{q,m,p}(x,y) \equiv x = f(y) \wedge P_2(x) \wedge P_1(y)$, то очевидно что $l \cdot m = \{0\} = m \cdot l$.

Если $\theta_{q,m,p}(x,y) \equiv x > f(y) \wedge E_1^q(x,f(y))$, то в силу того, что f – строго возрастающая функция на каждом E_1^p-классе, мы имеем: $l \cdot m = k$, где $\theta_{p,k,p}(x,y) \equiv x > y \wedge E_1^p(x,y)$, и $m \cdot l = k'$, где $\theta_{q,k',q}(x,y) \equiv x > y \wedge E_1^q(x,y)$.

Пусть теперь $\theta_{q,m,p}(x,y) \equiv x > f(y) \wedge \neg E_i^q(x, f(y)) \wedge E_{i+1}^q(x, f(y))$ для некоторого $1 \le i \le n-2$. Если f – строго возрастающая функция на каждом $E_{i+1}^p(a,M)/E_i^p$ (где $a \in p(M)$), то $l \cdot m = k$, где $\theta_{p,k,p}(x,y) \equiv x > y \wedge \neg E_i^p(x,y) \wedge E_{i+1}^p(x,y)$. Если же f – строго убывающая функция на каждом $E_{i+1}^p(a,M)/E_i^p$, то $l \cdot m = k$, где $\theta_{p,k,p}(x,y) \equiv x < y \wedge \neg E_i^p(x,y) \wedge E_{i+1}^p(x,y)$. В обоих этих случаях $m \cdot l = k'$, где $\theta_{q,k',q}(x,y) \equiv x > y \wedge \neg E_i^q(x,y) \wedge E_{i+1}^q(x,y)$.

Пусть теперь $\theta_{q,m,p}(x,y) \equiv x > f(y) \wedge \neg E_{n-1}^q(x, f(y))$. Если f – строго возрастающая функция на $p(M)/E_{n-1}^p$, то $l \cdot m = k$, где $\theta_{p,k,p}(x,y) \equiv x > y \wedge \neg E_{n-1}^p(x,y)$. Если же f – строго убывающая функция на $p(M)/E_{n-1}^p$, то $l \cdot m = k$, где $\theta_{p,k,p}(x,y) \equiv x < y \wedge \neg E_{n-1}^p(x,y)$. В обоих этих случаях $m \cdot l = k'$, где $\theta_{q,k',q}(x,y) := x > y \wedge \neg E_{n-1}^q(x,y)$.

Случай 2. $\theta_{p,l,q}(x,y) \equiv f(x) < y \wedge \neg E_i^q(f(x),y) \wedge E_{i+1}^q(f(x),y)$

Предположим вначале, что формула $\theta_{q,m,p}(x,y)$ эквивалентна одной из следующих формул: $x = f(y) \wedge P_2(x) \wedge P_1(y)$ или $x > f(y) \wedge E_1^q(x, f(y))$. Тогда если f – строго возрастающая функция на каждом $E_{i+1}^p(a,M)/E_i^p$, то $l \cdot m = k$, где $\theta_{p,k,p}(x,y) \equiv x < y \wedge \neg E_i^p(x,y) \wedge E_{i+1}^p(x,y)$. Если же f – строго убывающая функция на каждом $E_{i+1}^p(a,M)/E_i^p$, то $l \cdot m = k$, где $\theta_{p,k,p}(x,y) \equiv x > y \wedge \neg E_i^p(x,y) \wedge E_{i+1}^p(x,y)$. В обоих этих случаях $m \cdot l = k'$, где $\theta_{q,k',q}(x,y) \equiv x < y \wedge \neg E_i^q(x,y) \wedge E_{i+1}^q(x,y)$.

Пусть теперь $\theta_{q,m,p}(x,y) \equiv x > f(y) \wedge \neg E_s^q(x, f(y)) \wedge E_{s+1}^q(x, f(y))$. Предположим вначале, что $i = s$. Тогда можно понять, что $l \cdot m = \{0, 1, 2, ..., 2i+2\}$ и $m \cdot l = \{0, 1', 2', ..., (2i+2)'\}$.

Предположим теперь, что $i+1 \le s$. Если f – строго возрастающая функция на каждом $E_{s+1}^p(a,M)/E_s^p$, то $l \cdot m = k$, где $\theta_{p,k,p}(x,y) \equiv x > y \wedge \neg E_s^p(x,y) \wedge E_{s+1}^p(x,y)$. Если же f – строго убывающая функция на каждом $E_{s+1}^p(a,M)/E_s^p$, то $l \cdot m = k$, где $\theta_{p,k,p}(x,y) \equiv x < y \wedge \neg E_s^p(x,y) \wedge E_{s+1}^p(x,y)$. В обоих этих случаях $m \cdot l = k'$, где \$ $\theta_{q,k',q}(x,y) \equiv x > y \wedge \neg E_s^q(x,y) \wedge E_{s+1}^q(x,y)$.

Пусть теперь $s+1 \le i$. Если f – строго возрастающая функция на каждом $E_{i+1}^p(a,M)/E_i^p$, то $l \cdot m = k$, где $\theta_{p,k,p}(x,y) \equiv x < y \wedge \neg E_i^p(x,y) \wedge E_{i+1}^p(x,y)$. Если же f – строго убывающая функция на каждом $E_{i+1}^p(a,M)/E_i^p$, то $l \cdot m = k$, где $\theta_{p,k,p}(x,y) \equiv x > y \wedge \neg E_i^p(x,y) \wedge E_{i+1}^p(x,y)$. В обоих этих случаях $m \cdot l = k'$, где $\theta_{q,k',q}(x,y) \equiv x < y \wedge \neg E_i^q(x,y) \wedge E_{i+1}^q(x,y)$.

Пусть теперь $\theta_{q,m,p}(x,y) \equiv x < f(y) \wedge \neg E_{n-1}^q(x, f(y))$. Если f – строго возрастающая функция на $p(M)/E_{n-1}^p$, то $l \cdot m = k$, где $\theta_{p,k,p}(x,y) \equiv x > y \wedge \neg E_{n-1}^p(x,y)$. Если же f – строго убывающая функция на $p(M)/E_{n-1}^p$, то $l \cdot m = k$, где $\theta_{p,k,p}(x,y) \equiv x < y \wedge \neg E_{n-1}^p(x,y)$. В обоих этих случаях $m \cdot l = k'$, где $\theta_{q,k',q}(x,y) := x > y \wedge \neg E_{n-1}^q(x,y)$.

Случай 3. $\theta_{p,l,q}(x,y) := f(x) < y \wedge \neg E_{n-1}^q(f(x),y)$.

Предположим, что формула $\theta_{q,m,p}(x,y)$ эквивалентна одной из трех следующих формул: $x = f(y) \wedge P_2(x) \wedge P_1(y)$, $x > f(y) \wedge E_1^q(x, f(y))$ или $x > f(y) \wedge \neg E_1^q(x, f(y)) \wedge E_{i+1}^q(x, f(y))$. Тогда если f – строго возрастающая функция на $p(M)/E_{n-1}^p$, то $l \cdot m = k$, где $\theta_{p,k,p}(x,y) \equiv x < y \wedge \neg E_{n-1}^p(x,y)$. Если же f – строго убывающая функция на $p(M)/E_{n-1}^p$, то $l \cdot m = k$, где $\theta_{p,k,p}(x,y) \equiv x > y \wedge \neg E_{n-1}^p(x,y)$. В обоих этих случаях $m \cdot l = k'$, где $\theta_{q,k',q}(x,y) := x < y \wedge \neg E_{n-1}^q(x,y)$.

Предположим теперь, что $\theta_{q,m,p}(x,y) := x > f(y) \wedge \neg E_{n-1}^q(x, f(y))$. Тогда можно понять, что $l \cdot m = \{0, 1, 2, ..., 2n\}$ и $m \cdot l = \{0, 1', 2', ..., (2n)'\}$. □

Следствие 8. Пусть T – счетно категоричная вполне о-минимальная теория, $p_1, p_2, ..., p_k \in S_1(\varnothing)$ – неалгебраические попарно не слабо ортогональные 1-типы. Тогда

1) Для любых $s, i_1, i_2, ..., i_s, j_1, j_2, ..., j_s$ таких, что $1 \le s \le k$, $1 \le i_1 < i_2 < ... < i_s \le k$, $1 \le j_1 < j_2 < ... < j_s \le k$, выполняется $P_{\nu(\{p_{i_1},...,p_{i_s}\})} \cong P_{\nu(\{p_{j_1},...,p_{j_s}\})}$;

2) Для любых $s, i_1, i_2, ..., i_s$ таких, что $1 \le s \le k-1$, $1 \le i_1 < i_2 < ... < i_s \le k$, алгебра $P_{\nu(\{p_{i_1},...,p_{i_s}\})}$ является подмоноидом моноида $P_{\nu(\{p_{i_1},...,p_{i_s} p'\})}$, где $p' \in \{p_1, ..., p_k\}$ и $p' \ne p_{i_l}$ для всех $1 \le l \le s$;

3) $P_{\nu(\{p_1,...,p_k\})}$ – обобщенно коммутативный моноид.

В заключение отметим, что данные исследования поддержаны грантом КН МОН РК № 0830/ГФ4 по теме «Классификационные вопросы генерических и упорядоченных структур, а также их элементарных теорий» в рамках приоритета «Интеллектуальный потенциал страны».

ЛИТЕРАТУРА

[1] H.D. Macpherson, D. Marker, and C. Steinhorn, Weakly o-minimal structures and real closed fields // Transactions of The American Mathematical Society, 352 (2000), pp. 5435-5483.

[2] A. Pillay, Countable models of stable theories // Proceedings of the American Mathematical Society, 89 (1983), pp. 666-672.

[3] B.S. Baizhanov, Orthogonality of one types in weakly o-minimal theories // Algebra and Model Theory 2. Collection of papers / eds.: A.G. Pinus, K.N. Ponomaryov. – Novosibirsk: NSTU, 1999. – P. 5-28.

[4] B.S. Baizhanov, B.Sh. Kulpeshov, On behaviour of 2-formulas in weakly o-minimal theories // Mathematical Logic in Asia, Proceedings of the 9th Asian Logic Conference / eds.: S. Goncharov, R. Downey, H. Ono. – Singapore, World Scientific: 2006. – P. 31-40.

[5] S.V. Sudoplatov, Hypergraphs of prime models and distributions of countable models of small theories // Journal of Mathematical Sciences. 169 (2010), pp. 680-695.

[6] B.S. Baizhanov, S.V. Sudoplatov, V.V. Verbovskiy, Conditions for non-symmetric relations of semi-isolation // Siberian Electronic Mathematical Reports. 9 (2012), pp. 161-184.

[7] S.V. Sudoplatov, Classification of Countable Models of Complete Theories. – Novosibirsk: NSTU, 2014.

[8] I.V. Shulepov, S.V. Sudoplatov, Algebras of distributions for isolating formulas of a complete theory // Siberian Electronic Mathematical Reports, 11 (2014), pp. 380-407.

[9] S.V. Sudoplatov, Algebras of distributions for semi-isolating formulas of a complete theory // Siberian Electronic Mathematical Reports, 11 (2014), pp. 408-433.

[10] S.V. Sudoplatov, Algebras of distributions for binary semi-isolating formulas for families of isolated types and for countably categorical theories // International Mathematical Forum, 9 (2014), pp. 1029-1033.

[11] B.Sh. Kulpeshov, Weakly o-minimal structures and some of their properties // The Journal of Symbolic Logic, 63 (1998), pp. 1511-1528.

[12] B.Sh. Kulpeshov, Criterion for binarity of $\aleph_0$-categorical weakly o-minimal theories // Annals of Pure and Applied Logic, volume 45, issue 2, 2007, pp. 354-367.

[13] B.S. Baizhanov, Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by a family of unary predicates // The Journal of Symbolic Logic, 66 (2001), pp. 1382-1414.

[14] Б.Ш. Кулпешов, Ранг выпуклости и ортогональность в слабо о-минимальных теориях // Известия НАН РК, серия физико-математическая, 227 (2003), С. 26-31.

[15] B.Sh. Kulpeshov, Countably categorical quite o-minimal theories // Journal of Mathematical Sciences, volume 188, issue 4 (2013), pp. 387-397.

REFERENCES

[1] H.D. Macpherson, D. Marker, and C. Steinhorn, Weakly o-minimal structures and real closed fields // Transactions of The American Mathematical Society, 352 (2000), pp. 5435-5483.

[2] A. Pillay, Countable models of stable theories // Proceedings of the American Mathematical Society, 89 (1983), pp. 666-672.

[3] B.S. Baizhanov, Orthogonality of one types in weakly o-minimal theories // Algebra and Model Theory 2. Collection of papers / eds.: A.G. Pinus, K.N. Ponomaryov. – Novosibirsk: NSTU, 1999. – P. 5-28.

[4] B.S. Baizhanov, B.Sh. Kulpeshov, On behaviour of 2-formulas in weakly o-minimal theories // Mathematical Logic in Asia, Proceedings of the 9th Asian Logic Conference / eds.: S. Goncharov, R. Downey, H. Ono. – Singapore, World Scientific: 2006. – P. 31-40.

[5] S.V. Sudoplatov, Hypergraphs of prime models and distributions of countable models of small theories // Journal of Mathematical Sciences. 169 (2010), pp. 680-695.

[6] B.S. Baizhanov, S.V. Sudoplatov, V.V. Verbovskiy, Conditions for non-symmetric relations of semi-isolation // Siberian Electronic Mathematical Reports. 9 (2012), pp. 161-184.

[7] S.V. Sudoplatov, Classification of Countable Models of Complete Theories. – Novosibirsk: NSTU, 2014.

[8] I.V. Shulepov, S.V. Sudoplatov, Algebras of distributions for isolating formulas of a complete theory // Siberian Electronic Mathematical Reports, 11 (2014), pp. 380-407.

[9] S.V. Sudoplatov, Algebras of distributions for semi-isolating formulas of a complete theory // Siberian Electronic Mathematical Reports, 11 (2014), pp. 408-433.

[10] S.V. Sudoplatov, Algebras of distributions for binary semi-isolating formulas for families of isolated types and for countably categorical theories // International Mathematical Forum, 9 (2014), pp. 1029-1033.

[11] B.Sh. Kulpeshov, Weakly o-minimal structures and some of their properties // The Journal of Symbolic Logic, 63 (1998), pp. 1511-1528.

[12] B.Sh. Kulpeshov, Criterion for binarity of $\aleph_0$-categorical weakly o-minimal theories // Annals of Pure and Applied Logic, volume 45, issue 2, 2007, pp. 354-367.

[13] B.S. Baizhanov, Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by a family of unary predicates // The Journal of Symbolic Logic, 66 (2001), pp. 1382-1414.

[14] Kulpeshov B.Sh. Rank of convexity and orthogonality in weakly o-minimal theories // News of NAS RK. Physico-mathematical series, 227 (2003), pp 26-31. (in Russ.).

[15] B.Sh. Kulpeshov, Countably categorical quite o-minimal theories // Journal of Mathematical Sciences, volume 188, issue 4 (2013), pp. 387-397.

О-МИНИМАЛДЫҚ ТЕОРИЯЛАР ҮШІН БИНАРЛЫҚ ФОРМУЛАЛАРДЫҢ АЛГЕБРАЛАРДАҒЫ ТАРАЛЫМЫ ТУРАЛЫ

Б. Ш. Кулпешов[1], С. В. Судоплатов[2]

[1]Халықаралық ақпараттық технологиялар университеті, Алматы, Қазақстан
[2]РҒА СБ С. Л. Соболев атындағы математика институті, Новосібір мемлекеттік техникалық университеті, Новосібір мемлекеттік университеті, Новосібір, Ресей

Тірек сөздер: әлсіз о-минималдық, әбден о-минималдық, есептік категориялық, таралым алгебрасы, бинарлық формула, моноид.

Аңдатпа. Осы жұмыста есептік-категориялық әбден о-минималдық теориялар үшін бинарлық жекеленгіш формулалардың алгебралардағы таралымы зерттеленді және олардың қорытындылау коммутативтігі дәлелденді.

Поступила 17.03.2015 г.

Publication Ethics and Publication Malpractice
in the journals of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan

For information on Ethics in publishing and Ethical guidelines for journal publication see http://www.elsevier.com/publishingethics and http://www.elsevier.com/journal-authors/ethics.

Submission of an article to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan implies that the described work has not been published previously (except in the form of an abstract or as part of a published lecture or academic thesis or as an electronic preprint, see http://www.elsevier.com/postingpolicy), that it is not under consideration for publication elsewhere, that its publication is approved by all authors and tacitly or explicitly by the responsible authorities where the work was carried out, and that, if accepted, it will not be published elsewhere in the same form, in English or in any other language, including electronically without the written consent of the copyright-holder. In particular, translations into English of papers already published in another language are not accepted.

No other forms of scientific misconduct are allowed, such as plagiarism, falsification, fraudulent data, incorrect interpretation of other works, incorrect citations, etc. The National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan follows the Code of Conduct of the Committee on Publication Ethics (COPE), and follows the COPE Flowcharts for Resolving Cases of Suspected Misconduct (http://publicationethics.org/files/u2/New_Code.pdf). To verify originality, your article may be checked by the Cross Check originality detection service http://www.elsevier.com/editors/plagdetect.

The authors are obliged to participate in peer review process and be ready to provide corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. All authors of a paper should have significantly contributed to the research.

The reviewers should provide objective judgments and should point out relevant published works which are not yet cited. Reviewed articles should be treated confidentially. The reviewers will be chosen in such a way that there is no conflict of interests with respect to the research, the authors and/or the research funders.

The editors have complete responsibility and authority to reject or accept a paper, and they will only accept a paper when reasonably certain. They will preserve anonymity of reviewers and promote publication of corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. The acceptance of a paper automatically implies the copyright transfer to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.

The Editorial Board of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan will monitor and safeguard publishing ethics.

Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайте:

www:nauka-nanrk.kz

physics-mathematics.kz

Редактор *М. С. Ахметова*
Верстка на компьютере *Д. Н. Калкабековой*

Подписано в печать 20.03.2015.
Формат 60х881/8. Бумага офсетная. Печать – ризограф.
10,5 п.л. Тираж 300. Заказ 2.

Национальная академия наук РК
050010, Алматы, ул. Шевченко, 28, т. 272-13-18, 272-13-19