

ISSN 1991-346X

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ

Х А Б А Р Л А Р Ы

ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА
СЕРИЯСЫ**



СЕРИЯ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ



**PHYSICO-MATHEMATICAL
SERIES**

3 (301)

МАМЫР – МАУСЫМ 2015 ж.

МАЙ – ИЮНЬ 2015 г.

MAY – JUNE 2015

1963 ЖЫЛДЫҢ ҚАҢТАР АЙЫНАН ШЫҒА БАСТАҒАН
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1963 ГОДА
PUBLISHED SINCE JANUARY 1963

ЖЫЛЫНА 6 РЕТ ШЫҒАДЫ
ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД
PUBLISHED 6 TIMES A YEAR

АЛМАТЫ, ҚР ҰҒА
АЛМАТЫ, НАН РК
ALMATY, NAS RK

Б а с р е д а к т о р

ҚР ҰҒА академигі,

Мұтанов Г. М.

Р е д а к ц и я а л қ а с ы:

физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Әшімов А.А.**; техн. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Байғұнчечков Ж.Ж.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Жұмаділдаев А.С.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Қалменов Т.Ш.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Мұқашев Б.Н.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Өтелбаев М.О.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Тәкібаев Н.Ж.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Харин С.Н.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Әбішев М.Е.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Жантаев Ж.Ш.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Қалимолдаев М.Н.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Косов В.Н.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Мұсабаев Т.А.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Ойнаров Р.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Рамазанов Т.С.** (бас редактордың орынбасары); физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Темірбеков Н.М.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Өмірбаев У.У.**

Р е д а к ц и я к ең е с і:

Украинаның ҰҒА академигі **И.Н. Вишневский** (Украина); Украинаның ҰҒА академигі **А.М. Ковалев** (Украина); Беларусь Республикасының ҰҒА академигі **А.А. Михалевич** (Беларусь); Әзірбайжан ҰҒА академигі **А. Пашаев** (Әзірбайжан); Молдова Республикасының ҰҒА академигі **И. Тигиняну** (Молдова); мед. ғ. докторы, проф. **Иозеф Банас** (Польша)

Главный редактор

академик НАН РК

Г. М. Мутанов

Редакционная коллегия:

доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **А.А. Ашимов**; доктор техн. наук, проф., академик НАН РК **Ж.Ж. Байгунчеков**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **А.С. Джумадильдаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **Т.Ш. Кальменов**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **Б.Н. Мукашев**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **М.О. Отелбаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **Н.Ж. Такибаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **С.Н. Харин**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **М.Е. Абишев**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Ж.Ш. Жантаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **М.Н. Калимолдаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **В.Н. Косов**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Т.А. Мусабаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Р. Ойнаров**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Т.С. Рамазанов** (заместитель главного редактора); доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Н.М. Темирбеков**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **У.У. Умирбаев**

Редакционный совет:

академик НАН Украины **И.Н. Вишневский** (Украина); академик НАН Украины **А.М. Ковалев** (Украина); академик НАН Республики Беларусь **А.А. Михалевич** (Беларусь); академик НАН Азербайджанской Республики **А. Пашаев** (Азербайджан); академик НАН Республики Молдова **И. Тигиняну** (Молдова); д. мед. н., проф. **Иозеф Банас** (Польша)

«Известия НАН РК. Серия физико-математическая». ISSN 1991-346X

Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы)

Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации и архивов Министерства культуры и информации Республики Казахстан №5543-Ж, выданное 01.06.2006 г.

Периодичность: 6 раз в год.

Тираж: 300 экземпляров.

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, ком. 219, 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,

www.nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

© Национальная академия наук Республики Казахстан, 2015

Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75.

Editor in chief

G. M. Mutanov,
academician of NAS RK

Editorial board:

A.A. Ashimov, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **Zh.Zh. Baigunchekov**, dr. eng. sc., prof., academician of NAS RK; **A.S. Dzhumadildayev**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **T.S. Kalmenov**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **B.N. Mukhashev**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **M.O. Otelbayev**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **N.Zh. Takibayev**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **S.N. Kharin**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **M.Ye. Abishev**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **Zh.Sh. Zhantayev**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **M.N. Kalimoldayev**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **V.N. Kosov**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **T.A. Mussabayev**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **R. Oinarov**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **T.S. Ramazanov**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK (deputy editor); **N.M. Temirbekov**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **U.U. Umirbayev**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK

Editorial staff:

I.N. Vishnievski, NAS Ukraine academician (Ukraine); **A.M. Kovalev**, NAS Ukraine academician (Ukraine); **A.A. Mikhalevich**, NAS Belarus academician (Belarus); **A. Pashayev**, NAS Azerbaijan academician (Azerbaijan); **I. Tighineanu**, NAS Moldova academician (Moldova); **Joseph Banas**, prof. (Poland).

News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physical-mathematical series.
ISSN 1991-346X

Owner: RPA "National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan" (Almaty)

The certificate of registration of a periodic printed publication in the Committee of information and archives of the Ministry of culture and information of the Republic of Kazakhstan N 5543-Ж, issued 01.06.2006

Periodicity: 6 times a year

Circulation: 300 copies

Editorial address: 28, Shevchenko str., of. 219, 220, Almaty, 050010, tel. 272-13-19, 272-13-18,

www.nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

© National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, 2015

Address of printing house: ST "Aruna", 75, Muratbayev str, Almaty

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 3, Number 301 (2015), 145 – 154

**NUMERICAL ANALYSIS OF DYNAMIC DISTURBANCES
IN THE COMPOSITE ROD BY GRID-CHARACTERISTIC METHOD****Sh. M. Mamayev, I. T. Borasheva**

Taraz Innovative Humanitarian University, Taraz, Kazakhstan.

E-mail: sch_mamaev@mail.ru

Key words: composite rod, contact boundary, differential relations, numerical solution, reflected wave, refracted wave

Abstract. Blow to the longitudinal elastoplastic two-layer composite rod with fixed opposite end is considered. This process is described by a system of partial differential equations of hyperbolic type. The composite rod formed of a soft layer (aluminum) and hard layer (steel), with their different location. At the contact boundary rods condition of continuity of the particle velocity and stress. Analysis of numerical solutions showed the possibility of damage to the contact interface for composite rod aluminum-steel, as well as rapid decay of nonlinear effects in the case of steel-aluminum.

Calculations have shown the possibility of damage at the interface of dissimilar materials in the case of a composite rod with material of lower hardness to the material greater rigidity. The composite rod with a combination of "hard" material - "soft" material contributes to a relatively rapid decay of the nonlinear effects in it.

УДК 539.374:519.67

**ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ
ДИНАМИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ В СОСТАВНЫХ СТЕРЖНЯХ
СЕТОЧНО-ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ****Ш. М. Мамаев, И. Т. Борашева**

Таразский инновационно-гуманитарный университет, Тараз, Казахстан

Ключевые слова: составной стержень, контактная граница, дифференциальные соотношения, численное решение, отраженная волна, преломленная волна.

Аннотация. Рассматривается продольный удар по упругопластическому двухслойному составному стержню с закрепленным противоположным концом. Этот процесс описывается системой уравнений в частных производных гиперболического типа. Составной стержень сформирован из мягкого слоя (алюминий) и жесткого слоя (сталь), при различном их расположении. На контактной границе стержней выполняется условие неразрывности скорости частиц и напряжения. Анализ численных решений показала возможность разрушений на контактной границе для составного стержня алюминий-сталь, а также быстрое затухание нелинейных эффектов в случае сталь-алюминий.

В технике получают распространение составные конструкции, основной целью создания которых является использование материалов с необходимыми качествами в соответствующих областях составной конструкции. Например, в дисках авиационных двигателей наиболее напряженной областью является ступица, в то время как полотно менее нагружено. Использование материала с повышенной прочностью в области ступицы и материала, отвечающего менее жестким требованиям, в полотне позволяет создать составную конструкцию с привлекательными

техническими характеристиками: конструкция может быть более легкой, иметь повышенные параметры долговечности и другие технические преимущества. Для изготовления составных конструкций применяют методы сварки трением или диффузионной сварки. В настоящей работе рассматриваются динамические характеристики таких составных конструкций и исследуются особенности волновых процессов, происходящих в них.

1. Основные уравнения плоской продольной волны для неоднородных составных стержней. Процесс распространения продольных волн в неоднородных стержнях, составленных из произвольного числа стержней, характеристики которых изменяется скачком при переходе от одного стержня к другому, описывается следующей системой уравнения в частных производных [1]

$$\begin{cases} \rho_n \frac{\partial v_n}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_n}{\partial x}, \\ \frac{\partial v_n}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon_n}{\partial t}, \\ \frac{\partial \varepsilon_n}{\partial t} - \frac{1}{E_n} \frac{\partial \sigma_n}{\partial t} = F_n(\sigma, \chi), \end{cases} \quad (1.1)$$

где n – номер соответствующего стержня; σ_n, ε_n – осевое напряжение и деформация; v_n – скорость смещение частиц; E_n – модуль упругости; ρ_n – плотность материала стержня; первое уравнение – уравнения движения, второе – уравнение неразрывности, третье – уравнение состояния для соответствующих стержней. Правая часть третьего уравнения зависит от скорости пластической деформаций и при отсутствии вязкости преобразуется в известное соотношение пластического течения [2]

$$F_n(\sigma, \chi) = \begin{cases} 0 & \text{при } \sigma \leq \sigma_n^s, \\ \left(\frac{1}{(E_k)_n} - \frac{1}{E_n} \right) \frac{\partial \sigma}{\partial t} & \text{при } \sigma > \sigma_n^s, \end{cases} \quad (1.2)$$

где $E_k = d\sigma/d\varepsilon$ – касательный модуль к кривой деформирования ($\sigma - \varepsilon$).

Решение системы уравнений (1.1) удобно искать относительно безразмерных параметров и безразмерных переменных

$$\bar{\sigma}_n = \frac{\sigma_n}{\sigma_k^s} = \frac{\sigma_n}{\rho_k c_k^2 l}, \quad \bar{\varepsilon}_n = \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_k^s}, \quad \bar{v}_n = \frac{v_n}{c_k \varepsilon_k^s}, \quad \bar{\rho}_n = \frac{\rho_n}{\rho_k}, \quad \bar{t} = \frac{t c_k}{l}, \quad \bar{x} = \frac{x}{l}, \quad (1.3)$$

где l – характерная длина, $\sigma_n^s, \varepsilon_n^s$ – пределы упругости стержня по напряжению деформации, k – номер стержня, где скорость распространения волн $c_n = (E_n/\rho_n)^{1/2}$ максимальная ($c_k = \max c_n$).

В матричной форме данная система уравнений (1.1) относительно безразмерных параметров и переменных представляется в виде

$$\bar{U}_{n,t} + A_n \bar{U}_{n,x} + \bar{B}_n = 0, \quad (1.4)$$

где

$$\bar{U}_n = \{v_n, \varepsilon_n, \sigma_n\}^T, \quad \bar{B}_n = \{0, 0, E_n F_n\}^T, \quad A_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{\rho_n} \\ -1 & 0 & 0 \\ -E_n & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (1.5)$$

Запятая перед индексом означает частное дифференцирование по соответствующей переменной, T – знак транспонирования.

Собственные значения $(\lambda_n)_i$ матрицы определяют характеристические направления. Решив характеристическое уравнение

$$\det(A_n - \lambda_n \cdot I) = 0,$$

где I – единичная матрица, определим собственные значения матрицы

$$(\lambda_n)_1 = -\sqrt{E_n / \rho_n}, (\lambda_n)_2 = \sqrt{E_n / \rho_n}, (\lambda_n)_3 = 0,$$

Они являются вещественными и различными. Поэтому система уравнений (1.4) является гиперболической [3] и имеет три семейства действительных характеристик

$$\frac{dx}{dt} = -\sqrt{\frac{E_n}{\rho_n}}, \quad \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{E_n}{\rho_n}}, \quad \frac{dx}{dt} = 0, \quad (1.6)$$

вдоль которых выполняются следующие дифференциальные соотношения

$$\begin{aligned} d\sigma_n - \sqrt{\rho_n E_n} dV_n &= -E_n F_n dt, \\ d\sigma_n + \sqrt{\rho_n E_n} dV_n &= -E_n F_n dt, \\ d\varepsilon_n - \frac{1}{E_n} d\sigma_n &= F_n dt. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Интегрирование уравнений вдоль характеристик реализуется конечно-разностным представлением основных соотношений (1.7).

2. Конечно-разностное представление разрешающих уравнений. Интегрируя соотношения (1.7) вдоль характеристик, можно получить систему уравнений для определения неизвестных величин σ_n^{j+1} , v_n^{j+1} , ε_n^{j+1}

$$\begin{cases} \sigma_{ni}^{j+1} - \sigma_{ni+}^j - \sqrt{\rho_n E_n} \cdot (v_{ni}^{j+1} - v_{ni+}^j) = -E_n (F_{ni}^{j+1} + F_{ni+}^j) \tau / 2, \\ \sigma_{ni}^{j+1} - \sigma_{ni-}^j + \sqrt{\rho_n E_n} \cdot (v_{ni}^{j+1} - v_{ni-}^j) = -E_n (F_{ni}^{j+1} + F_{ni-}^j) \tau / 2, \\ \varepsilon_{ni}^{j+1} - \varepsilon_{ni}^j - \frac{1}{E_n} \cdot (\sigma_{ni}^{j+1} - \sigma_{ni}^j) = \frac{\tau}{2} (F_{ni}^{j+1} + F_{ni}^j), \end{cases} \quad (2.1)$$

n – номер стержня, i – номер узла по пространственной переменной, $j, j+1$ – номер нижнего и верхнего слоя по времени, знаки “+” и “-” – точки пересечения характеристики нижним слоем по времени (неузловые точки шаблона) опущенной из точки $A(i, j+1)$ верхнего слоя по времени. Детали получения уравнения (2.1) приведены в [4].

Для вычисления величин $\sigma_{ni\pm}^j, v_{ni\pm}^j, F_{ni\pm}^j$ в неузловых точках шаблона проводится интерполирование значений функции через их значения в узловых точках сетки [5]. При этом для того, чтобы ошибка, вводимая на одном шаге по времени, имела третий и более высокие порядки точности относительно σ, v и не ниже второго порядка точности относительно F , что позволяет обеспечить расчёт со вторым порядком точности относительно искомых величин. Следует использовать следующие соотношения квадратичного интерполирования для вычисления $\sigma_{ni\pm}^j, v_{ni\pm}^j$ и линейного интерполирования для вычисления $F_{ni\pm}^j$.

При линейном интерполировании используется формула

$$R_{n\pm} = R_{in} - \frac{\sqrt{E_n / \rho_n} \tau}{h} \cdot (R_{in} - R_{(i\pm)n}) + O(\tau^2). \quad (2.2)$$

Квадратичное интерполирование для внутренних точек

$$R_{n\pm} = \frac{\sqrt{E_n/\rho_n \tau} \cdot (\sqrt{E_n/\rho_n \tau \pm h})}{2h^2} \cdot R_{(i-1)n} - \frac{(E_n/\rho_n)\tau^2 - h^2}{h^2} \cdot R_{in} + \frac{\sqrt{E_n/\rho_n \tau} (\sqrt{E_n/\rho_n \tau \mp h})}{2h^2} R_{(i+1)n} + O(\tau^3), \quad (2.3)$$

и для граничных точек и точек контактных границ стержней

$$R_{n\pm} = \frac{(\sqrt{E_n/\rho_n \tau - h}) \cdot (\sqrt{E_n/\rho_n \tau - 2h})}{2h^2} R_{in} - \frac{\sqrt{E_n/\rho_n \tau} \cdot (\sqrt{E_n/\rho_n \tau - 2h})}{h^2} R_{(i\mp 1)n} + \frac{\sqrt{E_n/\rho_n \tau} \cdot (\sqrt{E_n/\rho_n \tau - h})}{2h^2} \cdot R_{(i\mp 2)n} + O(\tau^3). \quad (2.4)$$

Шаги по времени τ и пространственной переменной h выбираются в соответствии с требованием условия устойчивости [6] $c\tau/h \leq 1$.

3. Расчетная схема решения уравнений. При реализации расчетной схемы конечно-разностным методом разрешающие уравнения отличаются во внутренних и граничных точках и в точках контактных границ стержней.

3.1. Решение во внутренних точках. Во внутренних точках неизвестные величины $\sigma_i^{j+i}, \varepsilon_i^{j+i}, v_i^{j+i}$ определяется из системы линейных алгебраических уравнений (2.1)

$$\begin{cases} v_{ni}^{j+1} = \frac{1}{2} \left[(\sigma_{ni-}^j - \sigma_{ni+}^j - 0.5\tau \cdot E_n (F_{ni-}^j - F_{ni+}^j)) / \sqrt{\rho_n E_n} + v_{ni-}^j + v_{ni+}^j \right] \\ \sigma_{ni}^{j+1} = \sigma_{ni+}^j + \sqrt{\rho_n E_n} (v_{ni}^{j+1} - v_{ni+}^j) - 0.5\tau \cdot E_n (F_{ni}^{j+1} + F_{ni+}^j) \\ \varepsilon_{ni}^{j+1} = \sigma_{ni}^{j+1} + (\varepsilon - \sigma)_{ni}^j + \frac{\tau}{2} (F_{ni}^{j+1} + F_{ni}^j) \end{cases} \quad (3.1)$$

3.2. Решения в граничных точках. Обычно на границе задаются напряжения σ или скорость частицы v . Граничные условия в общем случае можно записать в виде

$$x = 0, \quad A_1 \cdot \sigma(0, t) + B_1 \cdot v(0, t) = Q_1(t), \quad (3.2)$$

$$x = L, \quad A_2 \cdot \sigma(L, t) + B_2 \cdot v(L, t) = Q_2(t), \quad (3.3)$$

в которых A_1, B_1, A_2, B_2 – некоторые постоянные. В зависимости от конкретных значений A_i, B_i можно сформулировать граничные условия различного типа.

В граничных точках одна из характеристик выходит за предел рассматриваемой области. В связи с этим в системе уравнений (2.1) нельзя использовать одно из уравнений, которое соответствует характеристике, выходящей из области исследования. Если присоединить к оставшимся при этом двум уравнениям одно из граничных условий (3.2) или (3.3), то получается замкнутая система уравнений относительно искомым величин σ, ε, v в граничной точке.

3.3. Решение в точках контактной границы стержней. Точка контактной границы стержней одновременно принадлежит обоим стержням (n -му и $(n+1)$ -му). По отношению к n -му стержню эта граница будет считаться как правая, а по отношению к $(n+1)$ -му стержню как левая, поэтому получается следующая система двух уравнений

$$\begin{cases} \sigma_{ni}^{j+1} - \sigma_{ni+}^j - \sqrt{\rho_n E_n} \cdot (v_{ni}^{j+1} - v_{ni+}^j) = -E_n (F_{ni}^{j+1} + F_{ni+}^j) \tau / 2, \\ \sigma_{(n+1)i}^{j+1} - \sigma_{(n+1)i-}^j + \sqrt{\rho_{n+1} E_{n+1}} \cdot (v_{(n+1)i}^{j+1} - v_{(n+1)i-}^j) = -E_{n+1} (F_{(n+1)i}^{j+1} + F_{(n+1)i-}^j) \tau / 2. \end{cases} \quad (3.4)$$

На контактной границе стержней принимается условия неразрывности вектора скорости частиц и напряжения

$$\sigma_{ni}^{j+1} = \sigma_{(n+1)i}^{j+1}, \quad v_{ni}^{j+1} = v_{(n+1)i}^{j+1}. \quad (3.5)$$

Таким образом, на контактной границе стержней имеются четыре уравнения (3.4), (3.5) с четырьмя неизвестными $\sigma_{ni}^{j+1}, v_{ni}^{j+1}, \sigma_{(n+1)i}^{j+1}, v_{(n+1)i}^{j+1}$.

4. Постановка задачи. Исследуется распространение плоских продольных упругопластических волн в биметаллическом стержне конечной длины l . Составными частями биметаллического стержня являются алюминий и сталь при различных способах их расположения (алюминий–сталь, сталь–алюминий). Нелинейное поведение материалов стержня задано экспериментальными кривыми деформирования, заданными в табличной форме и приведенными в таблицах 1 и 2. Модули упругости и плотности материалов исследуемых стержней составляют $E^{ст} = 200$ ГПа, $E^{ал} = 68.5$ ГПа, $\rho^{ст} = 7.9511 \cdot 10^{-10}$ кг·с²/мм⁴, $\rho^{ал} = 2.755 \cdot 10^{-10}$ кг·с²/мм⁴.

Таблица 1 – Экспериментальная зависимость напряжение-деформация (сталь)

$\varepsilon_i \cdot 10^4$	$\frac{\sigma_i}{9.8} \text{ МПа}$	$\sigma_i = \frac{\sigma_i}{\rho c_1^2} \cdot 10^4$	$\varepsilon_i \cdot 10^4$	$\frac{\sigma_i}{9.8} \text{ МПа}$	$\sigma_i = \frac{\sigma_i}{\rho c_1^2} \cdot 10^4$
0	0	0	22	28.0	1.4
10	20.00	1.0	32	30.0	1.5
11	20.75	1.0375	46	32.0	1.6
12	21.50	1.075	72	34.0	1.7
14	23.00	1.15	133	36.0	1.8
16	24.50	1.225	3600	74.0	3.7
18	26.00	1.3			

Таблица 2 – Экспериментальная зависимость напряжение-деформация (алюминиевый сплав Д-16 АТ)

$\varepsilon_i \cdot 10^4$	$\frac{\sigma_i}{9.8} \text{ МПа}$	$\sigma_i = \frac{\sigma_i}{\rho c_1^2} \cdot 10^4$	$\varepsilon_i \cdot 10^4$	$\frac{\sigma_i}{9.8} \text{ МПа}$	$\sigma_i = \frac{\sigma_i}{\rho c_1^2} \cdot 10^4$
0	0	0	14	31.75	1.5875
2.77	19.00	0.95	20	33.5	1.675
3.6	24.00	1.2	27.5	35.00	1.75
4.1	26.00	1.3	47.5	37.50	1.875
5.0	27.50	1.375	71.87	40.0	2.0
6.5	29.00	1.45	140	44.0	2.2
8.75	30.00	1.50			

На конце стержня $x = 0$ действует нестационарная нагрузка

$$\sigma_1(0, t) = f(t) \quad \text{при } x = 0. \quad (4.1)$$

Другой конец стержня $x = l$ жестко закреплен, т.е.

$$v_2(l, t) = 0 \quad \text{при } x = l. \quad (4.2)$$

На контактной границе стержней принято условие неразрывности вектора скорости частиц и напряжения

$$\sigma_1(l_1, t) = \sigma_2(l_1, t), \quad v_1(l_1, t) = v_2(l_1, t). \quad (4.3)$$

Здесь $l = l_1 + l_2$ – общая длина стержня, l_1, l_2 – длины соответствующих стержней.

Стержень в начальный момент времени находится в состоянии покоя

$$\sigma_n(x, 0) = v_n(x, 0) = \varepsilon_n(x, 0) = 0 \quad (n = 1, 2) \quad \text{при } t = 0 \text{ и } 0 \leq x \leq l. \quad (4.4)$$

При $t > 0$ от начального сечения $x = 0$ начинает распространяться возмущение со скоростью упругих волн. Перед фронтом волны точки стержня находятся в состоянии покоя, т.е.

$$\sigma_n(x, t) = v_n(x, t) = \varepsilon_n(x, t) = 0 \quad (n = 1, 2) \quad \text{при } x \geq t. \quad (4.5)$$

Внешняя динамическая нагрузка $f(t)$ в начале до момента времени t_0 линейно возрастает, а затем так же линейно убывает до нуля, т.е.

$$f(t) = \begin{cases} At & \text{при } t \leq t_0, \\ At_0 - B(t - t_0) & \text{при } t_0 < t \leq t_1, \\ 0 & \text{при } t > t_1. \end{cases} \quad (4.6)$$

Здесь A , B – постоянные, характеризующие скорости возрастания и убывания внешней нагрузки, t_0 – время соответствующее максимуму внешней нагрузки, t_1 – общее время действия внешней нагрузки.

Задача сводится к интегрированию системы уравнений (1.4) при граничных условиях (4.1)-(4.3) и нулевых начальных условиях (4.4). Задача решалась при следующих данных:

$$h = \tau = 0.025, l = 100h, l_1 = l_2 = 50h, A = 3, B = 2, t_0 = 20\tau = 0.5, t_1 = 50\tau = 1.25.$$

Здесь h , τ – шаг по координате и по времени, $\sigma_s^{cm} = \varepsilon_s^{cm} = 1$, $\sigma_s^{al} = 0.95$, $\varepsilon_s^{al} = 2.77$ – пределы упругости по напряжению и деформации. $f(t_0) = 1.5$ – максимальное значение внешней нагрузки.

5. Анализ численных результатов. На рисунке 1а представлено распределение напряжений по оси x для составного стержня алюминий-сталь в фиксированные моменты времени. Из приведенных кривых 1,2 при $t = 20\tau$ и $t = 50\tau$ видно, что со временем $t > t_0 = 20\tau$ стержень начинает разгружаться и по нему распространяется волна разгрузки, максимальные значения напряжений падают. В момент времени $t = 50\tau$ возмущение доходит до контактной границы (раздела) стержней. В этот момент времени обширная область ($18h \leq x \leq 37h$) первого стержня находится в зоне пластических деформаций. В дальнейшем с ростом времени область пластических деформаций приближается к контактной границе стержней. Известно [7], что при увеличении акустического импеданса $R = \rho_1 c_1$ упругих слоев волна напряжения увеличивается, скорость ее распространения снижается (при уменьшении акустического импеданса ситуация будет обратной). Этим обстоятельством объясняется то, что при прохождении возмущений в стержень с большей жесткостью:

- уровни напряжений повышаются и второй стержень в приведенные на рис.1а моменты времени находится в пластически нагруженном состоянии;
- передний фронт упругой волны в расчетное время не достигает нулевого значения (см. кривые 3 и 4).

Так как уровни напряжений во втором стержне повышаются и выполняется условие равенства напряжений на контактной границе (см. (4.3)), то в менее жестком и прочном первом стержне могут появиться граничные повреждения.

Из-за отставания заднего фронта пластической волны расширяются время действия нагрузки в области нелинейных деформаций. После отражения волны от жестко закрепленного конца (кривая 6) напряжения в зафиксированный момент времени $t = 120\tau$ достигает максимального значения и волна напряжения движется в обратном направлении. Отраженная от закрепленной поверхности волна в моменты времени $t < 150\tau$ (кривые 3, 4, 5, 6 и 7) еще не достигает контактной границы. Те же кривые 3, 4, 5, 6 и 7 в первом стержне характеризуют распределения напряжений в соответствующие моменты времени отраженной от контактной границы волны напряжений.

В моменты времени $t = 160\tau$, $t = 200\tau$ характер распределения напряжений определяется:

- во втором стержне наложением волн отраженных от закрепленной поверхности и отраженных и преломленных от контактной границы;
- в первом стержне наблюдается наложение отраженных от свободной поверхности волны, отраженной от контактной границы и преломленной из второго стержня (отраженная от закреплённого конца) волны напряжений.

На рисунке 1б представлен график распределения напряжений для составного стержня при обратном расположении стержней по жесткости (сталь, алюминий). Здесь картина существенно изменилась. Все события, как правило, происходят в первом (жестком) стержне. Пик начального пластического деформирования в первом стержне постепенно снижается, стержень начинает разгружаться (см. кривые 1 и 2). На переднем участке этих кривых имеется область постоянных напряжений, которая с возрастанием времени растет. Эта область соответствует отставанию пластической волны от упругой волны. Волна разгрузки, последовательно разгружая заданный внешний импульс, превращает его в упругий сигнал в форме трапеции (см. кривые 3, 4). В соответствии с импедансом стержней уровни напряжений во втором стержне меньше, чем в первом.

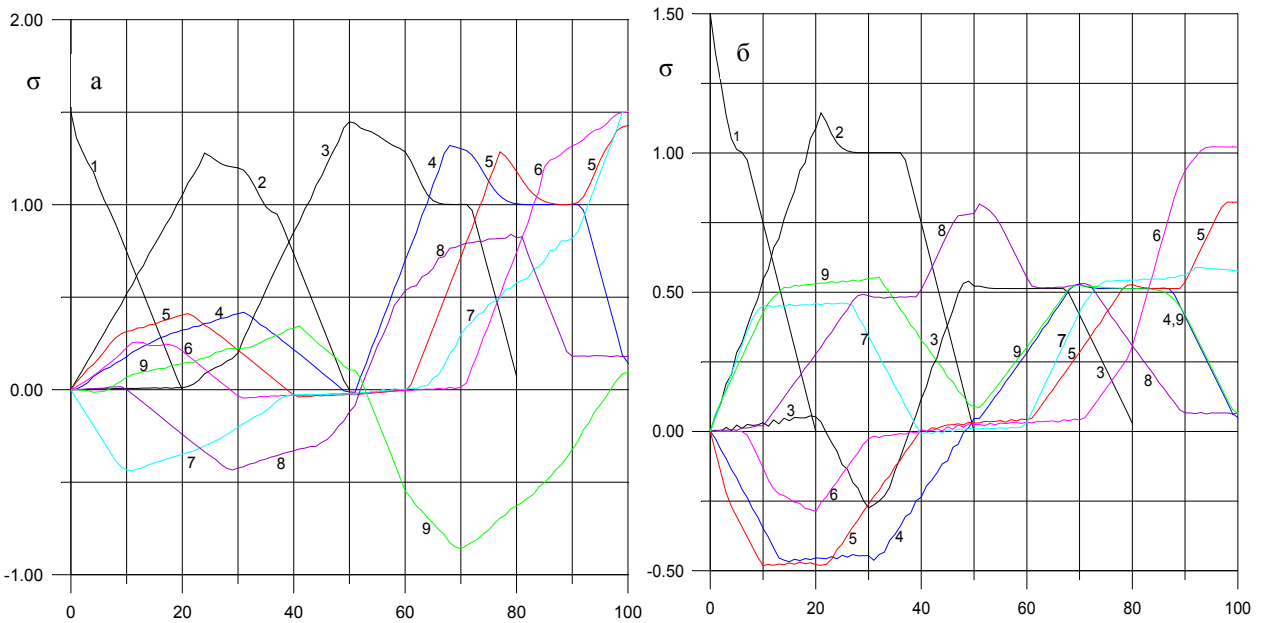


Рисунок 1 – Составной стержень алюминий, сталь (а) и сталь, алюминий (б). Распределение напряжений по оси x в фиксированные моменты времени t : 1(20τ), 2(50τ), 3(80τ), 4(100τ), 5(110τ), 6(120τ), 7(140τ), 8(160τ), 9(200τ)

Кривая 3 демонстрирует, что передний фронт отражённой от контактной границы волны напряжений в первом стержне и передний фронт преломлённой волны напряжений во втором стержне находятся практически на равном удалении от контактной поверхности. В момент времени $t=120\tau$ (кривая 6) при отражении волны от закрепленного конца точки в его окрестности пластически деформированы. До момента времени $t=150\tau$ отраженные в первом стержне волны и преломленные во втором не взаимодействуют друг с другом (см. кривые 3, 4, 5, 6, 7). При переходе преломлённой волны в моменты времени $t > 150\tau$ на её состояние оказывает влияние отражённая волна, а на состояние первого стержня преломлённая из второй области x/h волна. Это обстоятельство можно видеть на кривых x/h 8 и 9, соответствующих моментам времени $t=160\tau$ и $t=200\tau$.

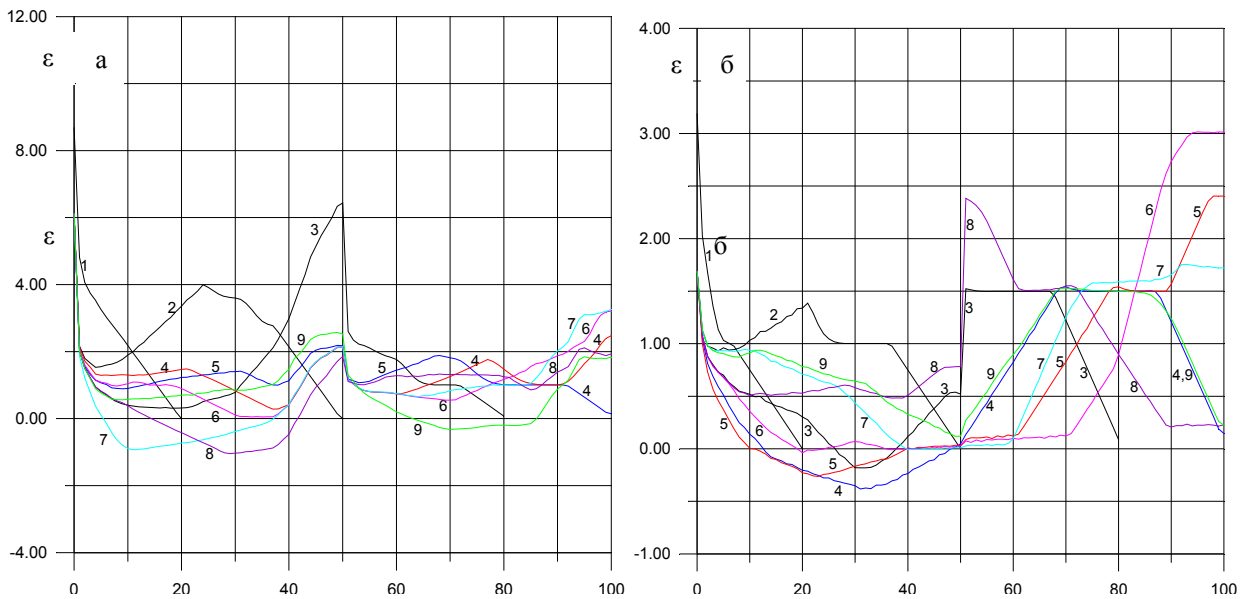


Рисунок 2 – Составной стержень алюминий, сталь (а) и сталь, алюминий (б). Распределение деформаций по оси x в фиксированные моменты времени t : 1(20τ), 2(50τ), 3(80τ), 4(100τ), 5(110τ), 6(120τ), 7(140τ), 8(160τ), 9(200τ)

Из рисунка 2 видно, что в районе перехода от слоя к слою градиент деформации большой и деформация практически здесь терпят разрыв. При переходе от мягкого слоя к жёсткому на границе раздела стержней деформация резко падает (рисунок 2а), а при переходе из жёсткого слоя к мягкому слою деформация резко возрастает (рисунок 2б). Это обстоятельство в некоторой мере может быть обусловлено принятыми в расчетах пределами текучести материалов.

На рисунке 3б приведены осциллограммы напряжений для точек, расположенных в окрестности контактной границы стержней $x = 43, 45, 50, 51, 53, 55, 57, 60, 62, 65h$ составного стержня сталь-алюминий. Из осциллограммы видно, что в точках, лежащих в отрезке $(50h, 65h)$, уровни напряжений в течение определённого времени держатся на постоянном уровне. Это состояние области постоянных упругих напряжений во времени, образованной волной разгрузки (сравни с кривой 3,4 рисунок 1б). В рассматриваемых точках с момента времени $t = 100\tau$ по $t = 140\tau$ напряжения практически равны нулю. Это означает, что упругая волна в рассматриваемой точке заканчивает свое действие и через некоторое время накладывается отражённая от закреплённого конца волна напряжения, которая вырастает до максимального значения, равного 1. В случае, когда волна возвращается к свободному концу ($x=0$) $t > 150\tau$, напряжения в рассматриваемых точках для комбинации алюминий-сталь (рис. 3а) могут принимать как отрицательные, так и положительные значения, в то время как для другого расположения стержней они принимают только положительные значения. Отмеченный результат легко объясняется анализом распространения волны на характеристической плоскости (x, t) . Сначала рассмотрим точку $x=45h$ (2) расположенная в первом стержне, а поведение точек 1-4 аналогичные. В момент времени $t=45\tau$ внешнее возмущение вступает в точку $x=45h$ (2), заканчивает свое действие в момент времени $t=95\tau$, а в момент времени $t=55\tau$ в эту точку вступает отражённая волна от контактной границы и происходит наложение волн, и этот процесс продолжится до момента времени $t=105\tau$, уровень напряжения понизится, становится отрицательной. В момент времени $t=145\tau$ в эту точку вступает отражённая от свободного конца (отражённая от контактной границы волна отражается от свободного конца) волна, а в момент времени $t=155\tau$ вступает отражённая волна от закреплённого конца. Начиная с момента времени $t > 155\tau$ происходит наложение волны, отражённой от свободного и закреплённого конца. Отражённая волна от свободного конца отрицательная, поэтому до

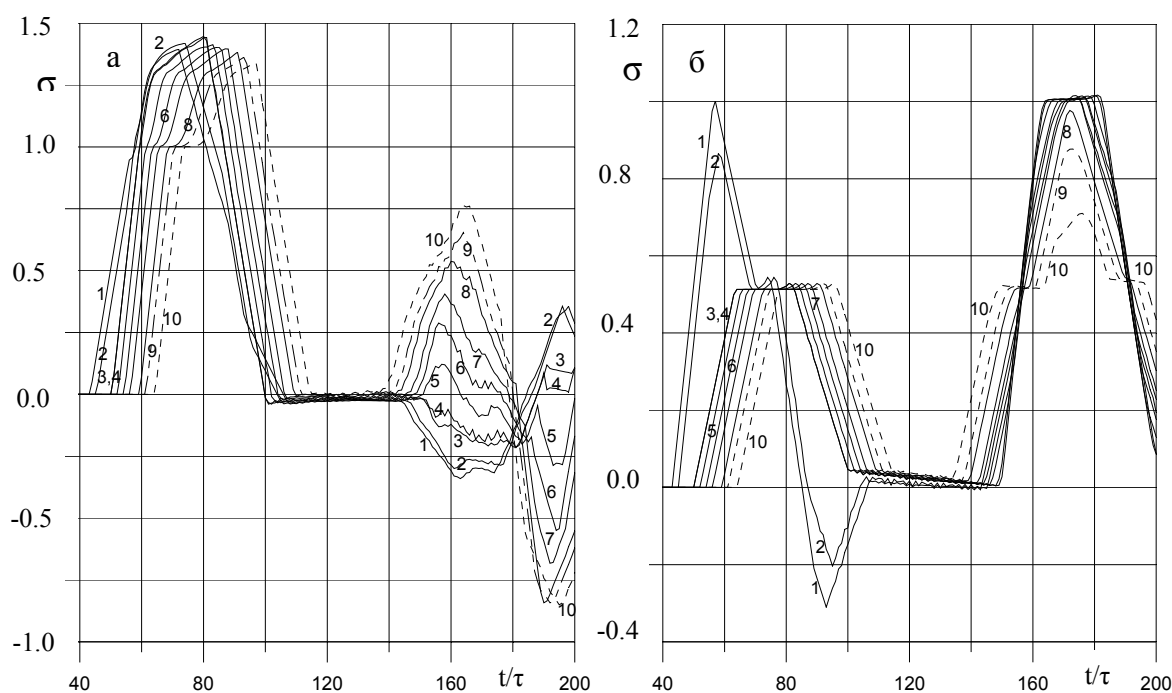


Рисунок 3 – Составной стержень алюминий, сталь (а) и сталь, алюминий (б).

Осциллограммы напряжений для сечений x :

43h (1), 45h (2), 50h (3), 51h (4), 53h (5), 55h (6), 57h (7), 60h (8), 62h (9), 65h (10)

момента времени $t=185\tau$ напряжение отрицательное, а затем становится положительной. Для точек $x>51h$, расположенных ближе закреплённому сечению, картина будет обратная (смотри кривые 5-10).

На рисунке 4 приведены осциллограммы напряжений для точек, расположенных в окрестности закреплённого конца $80h \leq x \leq 100h$ стержня. Из рисунка 4а для стержня (алюминий, сталь) видно, что максимальное значение напряжений превышает предел текучести стали в 1.5 раза, т.е. $\sigma_{ст}^{max}=1.5=1.5\sigma_s^{ст}$. Все точки указанного интервала находятся в пластическом состоянии. Для стержня (сталь, алюминий), (см. рисунок 4б) максимальное значение напряжений превышает предел текучести алюминия в 1.1 раза, т.е. $\sigma_{ал}^{max}=1.043=1.1\sigma_s^{ал}$ и область пластических деформаций, примыкающая к закреплённому концу, сужается, т.е. $90h < x \leq 100h$. В первом случае (алюминий, сталь) максимальное значение напряжений в закреплённом конце в 1.44 раза превышает максимальное значение напряжений, реализованном при другом расположении стержней, т.е. $\sigma_{ст}^{max}=1.44\sigma_{ал}^{max}$.

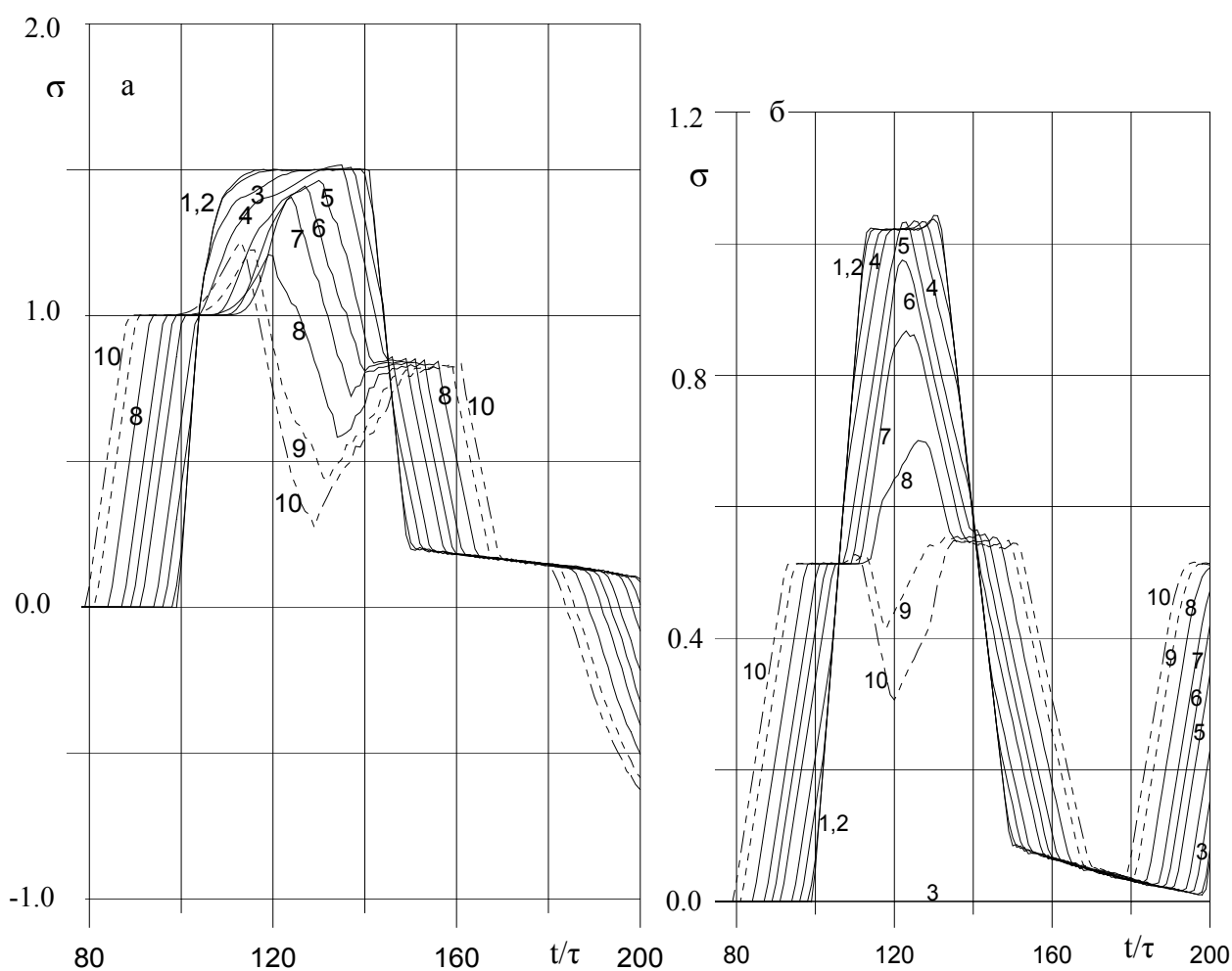


Рисунок 4 – Составной стержень алюминий, сталь (а) и сталь, алюминий (б). Осциллограммы напряжений для сечений x : 100h (1), 99h (2), 97h (3), 95h (4), 92h (5), 90h (6), 88h (7), 85h (8), 82h (9), 80h (10)

Выводы. Результаты расчетов находятся в полном соответствии с общими законами перехода от области к области согласно акустическому импедансу, в том числе в области нелинейных деформаций.

Расчетами показана возможность появления разрушений на границе контакта разнородных материалов в случае составного стержня с материалом меньшей жёсткости на материал большей жёсткости.

Составной стержень с комбинацией «жесткий» материал – «мягкий» материал способствует относительно быстрому затуханию нелинейных эффектов в ней.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ержанов Ж.С., Каримбаев Т.Д., Байтелиев Т.Б. Волны напряжений в однородных и неоднородных средах. – Алматы: Гылым, 1998. – 171 с.
- [2] Каримбаев Т.Д., Мамаев Ш. Теория течения при переменных скоростях деформаций // В кн.: Прикладные задачи механики деформируемого твердого тела. – Алма-Ата, 1989. – С. 52-58
- [3] Годунов С.К. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1971. – 416 с.
- [4] Кукуджанов В.Н. Компьютерное моделирование деформирования, повреждаемости и разрушение неупругих материалов и конструкций: Учебное пособие. – М.: МФТИ, 2008. – 215 с.
- [5] Турчак Л.И. Основы численных методов. – М.: Наука, 1987. – 320 с.
- [6] Магомедов К.М., Холодов А.С. Сеточно-характеристические численные методы. – М.: Наука, 1988. – 288 с.
- [7] Лаптев В.И., Тришин Ю.А. Увеличение начальной скорости и давления при ударе по неоднородной преграде // ПМТФ. – 1974. – № 6. – С. 128-132.

REFERENGES

- [1] Yerzhanov Zh.S., Karimbayev T.D., Bayteliev T.B. *Stress waves in homogeneous and heterogeneous environments*. Almaty: Gylm, 1998. 171 pp. (in Russ.).
- [2] Karimbayev T.D., Mamayev Sh. *Theory of flow at variable speeds of deformations*. In.: Applied problems of solid mechanics. Alma-Ata, 1989. P. 52-58. (in Russ.).
- [3] Godunov S.K. *The equations of mathematical physics*. Nauka, 1971. 416 pp. (in Russ.).
- [4] Kukudzhanov V.N. *Computer modeling of deformation of damage and destruction of non-elastic materials and structures*: Textbook. MM: MIPT, 2008. 215 p. (in Russ.).
- [5] Turchak L.I. *Basics of numerical methods*. M.: Nauka, 1987. 320 p. (in Russ.).
- [6] Magomedov K.M., Kholodov A.S. *Grid-characteristic numerical methods*. M.: Nauka, 1988. 288 p. (in Russ.).
- [7] Laptev V.I., Trishin Yu.A. *The increase in the initial velocity and pressure impact on non-uniform barrier*. J. Appl. 1974. № 6. P. 128-132. (in Russ.).

ҚҰРАМАЛЫ СЫРЫҚТА ДИНАМИКАЛЫҚ КЕРНЕУЛЕРДІҢ ТАРАЛУЫН ТОРЛЫҚ-ХАРАКТЕРИСТИКА ӘДІСІМЕН САНДЫҚ ЗЕРТТЕУ

М. Ш. Мамаев, И. Борашева

Тараз инновациялық-гуманитарлық университеті, Тараз, Қазақстан

Тірек сөздер: құрамалы сырық, түйісу шекарасы, дифференциалдық байланыс, сандық шешім, шағылысқан толқын, сынған толқын.

Аннотация. Қарама қарсы ұшы қатты бекітілген серпімді пластикалық екі қабатты құрамалы сырықты бойлай соққылау қарастырылады. Бұл процесс дербес туындылы гиперболалық типті дифференциалдық теңдеулер жүйесімен жазылады. Құрамалы сырық жұмсақ қабат (алюминий) және қатты қабаттың (болат) әр түрлі орналасуына байланысты құрастырылған. Қабаттардың түйіскен шекараларында кішкентай бөлшектердің жылдамдықтары және кернеулері үзіліссіз шарты орындалады. Сандық шешімдердің талдаулары құрамалы сырық алюминий-болат түйісу шекараларында қирауы мүмкін, ал болат-алюминий сырығында сызықтық емес әсерлердің жылдам өшуін көрсетеді.

Поступила 25.02.2015 г.

Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайте:

www.nauka-nanrk.kz

physics-mathematics.kz

Редактор *М. С. Ахметова*

Верстка на компьютере *Д. Н. Калкабековой*

Подписано в печать 9.06.2015.

Формат 60x881/8. Бумага офсетная. Печать – ризограф.

15,7 п.л. Тираж 300. Заказ 3.