ISSN 1991-346X

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ

Х А Б А Р Л А Р Ы

ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

N E W S

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА
СЕРИЯСЫ
♦
СЕРИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
♦
PHYSICO-MATHEMATICAL
SERIES

3 (301)

МАМЫР – МАУСЫМ 2015 ж.
МАЙ – ИЮНЬ 2015 г.
MAY – JUNE 2015

1963 ЖЫЛДЫҢ ҚАҢТАР АЙЫНАН ШЫҒА БАСТАҒАН
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1963 ГОДА
PUBLISHED SINCE JANUARY 1963

ЖЫЛЫНА 6 РЕТ ШЫҒАДЫ
ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД
PUBLISHED 6 TIMES A YEAR

АЛМАТЫ, ҚР ҰҒА
АЛМАТЫ, НАН РК
ALMATY, NAS RK

«Известия НАН РК. Серия физико-математическая». ISSN 1991-346X
Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы)
Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации и архивов Министерства культуры и информации Республики Казахстан **№5543-Ж**, выданное 01.06.2006 г.

Периодичность: 6 раз в год.
Тираж: 300 экземпляров.

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, ком. 219, 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,
www:nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75.

News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physical-mathematical series.
ISSN 1991-346X
Owner: RPA "National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan" (Almaty)
The certificate of registration of a periodic printed publication in the Committee of information and archives of the Ministry of culture and information of the Republic of Kazakhstan N 5543-Ж, issued 01.06.2006

Periodicity: 6 times a year
Circulation: 300 copies

Editorial address: 28, Shevchenko str., of. 219, 220, Almaty, 050010, tel. 272-13-19, 272-13-18,
www:nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

Address of printing house: ST "Aruna", 75, Muratbayev str, Almaty

N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 3, Number 301 (2015), 231 – 242

THE GENERALIZED DECISIONS AND SINGULAR BOUNDARY INTEGRAL EQUATIONS OF THE BOUNDARY VALUE PROBLEM OF ELASTODYNAMICS AT SUPERSONIC TRANSPORT LOADS

L. A. Alexeyeva

Institute of Mathematics and mathematical modeling IMIM of the MES RK, Almaty, Kazakhstan.
E-mail: alexeeva@math.kz

Keywords: isotropic elastic medium, supersonic transport load, boundary value problem, generalized functions method.

Abstract. The transport boundary value problem for the isotropic elastic medium limited by a cylindrical surface of any cross section is considered in case of action of supersonic transport loads. On the basis of generalized functions method its analytical decision is constructed. The corresponding BVP in space of the generalized functions is set, its generalized decision is build in convolution form, its regularization is performed, the dynamic analog of Somigliana formula and the singular boundary equations are constructed which resolve the BVP.

For the transport boundary value problems of elasticity theory for subsonic transport loads, the speed of which is less than the speed of propagation of elastic waves in a medium, MGIU is developed earlier by the author in [1]. It is associated with the first boundary value problem of elasticity theory in a cylindrical area that is elliptical. At supersonic speeds, traffic load than the speed of propagation of longitudinal and transverse waves in an elastic medium, the corresponding boundary value problem becomes a strictly hyperbolic, among shock waves appear, which requires the development of the theory of pseudo-differential operators for its decision. The most convenient apparatus for constructing the solutions of such problems is the generalized functions method (GFM), which summarizes the method of V.S. Vladimirov of Cauchy problem solution for differential equations on the boundary and initial-boundary problems. The most detailed it set out by the author on the example of the classical wave equation in spaces of different dimensions in the paper [2].

УДК 539.3

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ И СИНГУЛЯРНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ПРИ СВЕРХЗВУКОВЫХ ТРАНСПОРТНЫХ НАГРУЗКАХ

Л. А. Алексеева

Институт математики и математического моделирования ИМИМ МОН РК, Алматы, Казахстан

Ключевые слова: изотропная упругая среда, сверхзвуковая транспортная нагрузка, краевая задача, метод обобщенных функций.

Аннотация. Транспортные нагрузки – наиболее распространенный вид динамических нагрузок в средах, порождающих волновые процессы в них. Исследование процессов распространения и дифракции волн на основе методов математического моделирования приводит к решению различных краевых задач математической физики, для которых используются разнообразные методы. Здесь на основе теории обобщенных функций разработан метод граничных интегральных уравнений (ГИУ) решения транспортной краевой задачи теории упругости, которая является модельной для изучения динамики массива в окрестности подземных сооружений типа транспортных тоннелей при произвольном профиле сечения.

Для транспортных краевых задач теории упругости при дозвуковых транспортных нагрузках, скорость движения которых меньше скорости распространения упругих волн в среде, МГИУ разработан автором ранее в [1]. Он связан с решением первой краевой задачи теории упругости в цилиндрической области, которая является эллиптической. При сверхзвуковых скоростях транспортной нагрузки, превышающей скорость распространения продольных и поперечных волн в упругой среде, соответствующая краевая задача становится строго гиперболической, в среде появляются ударные волны, что требует разработки теории псевдодифференциальных операторов для ее решения. Наиболее удобным аппаратом для построения решений таких задач является метод обобщенных функций (МОФ), который обобщает метод В. С. Владимирова решения задач Коши для дифференциальных уравнений на краевые и начально-краевые задачи. Наиболее детально он изложен автором на примере классического волнового уравнения в пространствах различной размерности в статье [2]

Здесь рассмотрена транспортная краевая задача для изотропной упругой среды, ограниченной цилиндрической поверхностью произвольного поперечного сечения, в случае действия сверхзвуковых транспортных нагрузок. На основе МОФ, строится ее решение. Поставлена соответствующая краевая задача в пространстве обобщенных функций, получено ее обобщенное решение, проведена его регуляризация, построен динамический аналог формулы Сомильяны и сингулярные граничные уравнения, разрешающие краевую задачу.

1. Постановка транспортной краевой задачи. Пусть упругая изотропная среда (λ,μ,ρ) занимает область $D^- \subset R^3$, ограниченную гладкой цилиндрической поверхностью Ляпунова *D,* образующие которой параллельны оси Z. Множество $S^- \subset R^2$ --перпендикулярное сечение D^-, *S* - его граница: $D^- = S^- \times Z$, $D = S \times Z$, $\mathbf{n} = (n_1, n_2, 0)$- единичный вектор внешней нормали к *D,* $D_+ = S \times Z_+$, $Z_+ = \{z \in R^1 : z \geq 0\}$.

Пусть на границе *D* заданы транспортные нагрузки $P(x, x_3 + ct)$, движущиеся с постоянной скоростью ***c***:

$$P = \sigma_{ij} n_i e_j = \theta(z) e_j p_j(x,z), \quad x \in S, \quad j = 1,2,3 \tag{1}$$

Здесь e_j - орты декартовой системы координат, $x = (x_1, x_2)$, $z = x_3 + ct$, $\theta(z)$ -функция Хевисайда. Предполагается, что *P*(*x,z*) интегрируемы на $D_+ : p_j(x,z) \in L_1(D_+)$.

Уравнения Ламе, описывающие динамику упругой среды [3], в подвижной системе координат $x'=(x'_1,x'_2,x'_3)=(x_1,x_2,x_3+ct)$, связанной с транспортной нагрузкой, имеют вид:

$$\Lambda_j^i\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u_i=\left(\left(M_1^{-2}-M_2^{-2}\right)\frac{\partial^2}{\partial x'_i\partial' x_j}+\left(M_2^{-2}\Delta-\frac{\partial^2}{\partial x_3'^2}\right)\delta_j^i\right)u_i=0 \tag{2}$$

где $M_j=c/c_j$ - числа Маха , $c_1=\sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho}, c_2=\sqrt{\mu/\rho}$ - скорости распространения продольных (сжатия-расширения) и поперечных (сдвиговых волн) в упругой среде. Здесь

$$M_j>1 \ \ (j=1,2), \tag{3}$$

что делает уравнения (2) гиперболическими [4, 5].

Граничные условия: при z=0

$$u_{i,z}(x,0)=0, \quad \sigma_{i3}(x,0)=0, \quad x\in S^-, \tag{4}$$

При $\|(x,z)\|\to\infty$

$$u_j\to 0, \quad \exists\varepsilon>0: \ \ \|\partial_j u\|<O(\|(x,z)\|^{1+\varepsilon}), \quad j=1,2,z. \tag{5}$$

При сверхзвуковых скоростях возникают ударные волны. На их фронтах F удовлетворяются условия на скачки [6]:

$$\begin{gathered}\left[\,u_j\,\right]_F=0 \ \ \Rightarrow \ \ h_z\left[\,u_{i,j}\,\right]_F=h_j\left[u_{i,z_3}\right]_F, \\ h_j\left[\ \sigma_{ij}\,\right]_F=\rho c^2 h_z\left[\ u_{i,z}\right]_F\end{gathered} \tag{6}$$

где $h=(h_1,h_2,h_3)$ - *волновой вектор* - единичная нормаль к F в R^3, направленная в сторону распространения волны. Требуется построить решение этой краевой задачи.

2. Постановка задач в пространстве обобщенных функций и ее обобщенное решение. Для решения задачи используем метод обобщенных функций. Для этого перейдем к постановке краевой задачи в пространстве обобщенных функций $D_3'(R^3)=\left\{\hat f=(\hat f_1,...,\hat f_3),\,\hat f_k\in D'(R^3),\,k=1,2,3\right\}$, где $D'(R^3)$ - пространство обобщенных функций [7] и введем регулярную обобщенную функцию, определенную на R^3:

$$\hat u(x,z)=u(x,z)H_D^-(x)=u(x,z)H_S^-(x)\theta(z). \tag{7}$$

Здесь $H_S^-(x)$ - характеристическая функция множества S^-, равная ½ на S, $H_D^-(x)$ - характеристическая функция полуцилиндра $D^-=\left\{(x,z):z>0,\,x\in S^-\right\}$, $S^-\in R^2$ -- открытое множество, ограниченное кривой S, $D=\left\{(x,z):z>0,\,x\in S\right\}$:

$$H_D^-(x)=H_S^-(x)H(z)=\begin{cases}1, & (x,z)\in D^-\\ 1/2, & (x,z)\in D\\ 0, & (x,z)\notin D^-+D\end{cases} \tag{8}$$

Используя свойства дифференцирования регулярных обобщенных функций со скачком на S, получим, с учетом граничных условий, уравнение для $\hat u$:

$$\begin{gathered}L_i^j\left(\frac{\partial}{\partial x'}\right)\hat u_j(x')=(\rho c^2 n_z u_{i,z}-p_i)\delta_D(x,z)+(n_z u_i\delta_D(x,z))_{,z}-\\ -\left(\lambda u_k n_k\delta_{ij}+\mu(n_j u_i+n_i u_j))\delta_D(x,z)\right)_{,j}+\left(\sigma_{iz}(x,0)-\rho c\left.\frac{\partial u_i}{\partial z}\right|_{z=0}\right)\delta(z)H_S^-(x)\end{gathered} \tag{9}$$

$\hat G=c^{-1}GH_D^-(x,z)$, $\delta_D(x,z)=\delta_S(x)H(z)$ - простой слой на D_+. Поскольку $n_3\equiv 0$ на D_+, используя свойства свертки с тензором Грина, и граничные условия (4), получим представление решения КЗ в пространстве обобщенных функций:

$$\hat{u}_i = \hat{U}_i^k * p_k\delta_D + \lambda u_k n_k \delta_D * \hat{U}_i^l{}_{,l} + \mu(n_l u_j + n_j u_l)\delta_D * \hat{U}_i^j{}_{,l} \ . \qquad (10)$$

Если ввести тензор фундаментальных напряжений

$$\hat{T}_i^j(x,z,n) = \lambda \hat{U}_i^l{}_{,l} n_j + \mu\left(\partial_n \hat{U}_i^j + n_k \hat{U}_k^j{}_{,i}\right), \qquad (11)$$

связанный с порождаемым тензором $\hat{U}_j^i$ тензором напряжений

$$\Sigma^i_{jk}(x,z) = \lambda \hat{U}_l^i{}_{,l}\delta_{jk} + \mu\left(\hat{U}_j^i{}_{,k} + \hat{U}_k^i{}_{,j}\right). \qquad (12)$$

соотношением

$$\hat{T}_i^j(x,z,n) = \Sigma^i_{jk}(x,z)n_k \qquad (13)$$

то в формуле (10) правую часть можно представить в виде поверхностного интеграла по границе области. С учетом введенных обозначений на границе она примет вид:

$$\hat{u}_i(x,z) = \theta(z)\int_0^\infty d\tau \int_S (U_i^j(x,y,z,\tau)p_i(y,\tau) + T_i^j(x,y,z,\tau,n(y))u_j(y,\tau)dS(y) \qquad (14)$$

где введены тензоры - сдвиги:

$$U_j^i(x,y,z,\tau) = \hat{U}_j^i(x-y,z-\tau), \quad T_j^i(x,y,z,\tau,n) = \hat{T}_j^i(x-y,z-\tau,n) \ . \qquad (15)$$

Формула аналогична формуле Сомильяны статической теории упругости [3], которая позволяет по известным граничным значениям перемещений и напряжений определять перемещения в среде. Однако использовать эту формулу для определения решения краевой задачи в случае сверхзвуковых нагрузок невозможно, т.к. второе слагаемое содержит сильные неинтегрируемые особенности на фронтах ударных волн тензора T_i^j, поэтому интегралы являются расходящимися. Для построения регулярного интегрального представления формулы опишем вначале свойства фундаментальных тензоров U_j^i, T_j^i.

3. Тензор Грина транспортного уравнения Ламе и его первообразная по z. $\mathbf{U} = \left\{\hat{U}_k^i\right\}_{3\times3}$ - матрицу фундаментальных решений транспортного уравнения Ламе:

$$A_i^j\left\{\frac{\partial}{\partial x'}\right\}\hat{U}_j^k + \delta(x')\delta_i^k = 0, \qquad i,j = 1,2,3, \qquad (16)$$

удовлетворяющую условиям затухания на бесконечности.

$$\hat{U}_i^k \to 0, \quad \hat{U}_{i'j}^k \to 0 \qquad \text{при } x' \to \infty. \qquad (17)$$

назовем *тензором Грина* (можно показать, что $\mathbf{U}$ является тензором). Он описывает перемещения упругой среды при действии сосредоточенной в точке силы с компонентами $G_i = \rho c^2 \delta(x)\delta(z)\delta_i^{[k]}$, действующей в направлении координатной оси X_k, бегущей со скоростью *c* вдоль оси X_3. Для произвольной регулярной массовой силы с компонентами $G_k = \rho c^2 g_k$ соответствующее решение имеет вид свертки

$$\hat{u}_i = \hat{U}_i^k * \hat{g}_k = \int_{R^3} \hat{U}_i^k(x-y,z-\tau)\, g_k(y,\tau)dy_1 dy_2 d\tau, \quad i,k = 1,2,3, \qquad (18)$$

если она существует.

Представление $\hat{U}_i^k$ для разных скоростей *c* с использованием преобразования Фурье обобщенных функций получено и изучено ранее автором в [4,5]. В сверхзвуковом случае (при $c>c_1$) матрица Грина имеет следующий вид:

$$2\pi\hat{U}_1^1 = \frac{M_2^2\theta_2}{V_2^-} + \frac{z^2x_1^2}{\|x\|^4}\left(\frac{\theta_1}{V_1^-} - \frac{\theta_2}{V_2^-}\right) - \frac{x_2^2}{\|x\|^4}\left(\theta_1 V_1^- - \theta_2 V_2^-\right),$$

$$2\pi\hat{U}_2^2 = \frac{M_2^2\theta_2}{V_2^-} + \frac{z^2x_2^2}{\|x\|^4}\left(\frac{\theta_1}{V_1^-} - \frac{\theta_2}{V_2^-}\right) - \frac{x_1^2}{\|x\|^4}\left(\theta_1 V_1^- - \theta_2 V_2^-\right),$$

$$2\pi\hat{U}_3^3 = \left(\frac{\theta_1}{V_1^-} + \frac{m_2^2\theta_2}{V_2^-}\right),\ 2\pi\hat{U}_1^3 = \frac{x_1 z}{\|x\|^2}\left(\frac{\theta_1}{V_1^-} - \frac{\theta_2}{V_2^-}\right), \tag{19}$$

$$2\pi\hat{U}_2^3 = -\frac{x_2 z}{\|x\|^2}\left(\frac{\theta_1}{V_1^-} - \frac{\theta_2}{V_2^-}\right) \quad , \quad \hat{U}_2^1 = \hat{U}_1^2, \quad \hat{U}_3^2 = \hat{U}_2^3, \quad \hat{U}_3^1 = \hat{U}_1^3,$$

$$2\pi\hat{U}_1^2 = \frac{x_1x_2}{\|x\|^4}\left(z^2\left(\frac{\theta_1}{V_1^-} - \frac{\theta_2}{V_2^-}\right) + \left(\theta_1 V_1^- - \theta_2 V_2^-\right)\right).$$

Здесь введены обозначения: $\theta_j = \theta(z - m_j\|x\|),\ V_j^- = \sqrt{z^2 - m_j^2\|x\|^2},\ m_j = \sqrt{M_j^2 - 1},\ j = 1,2$, $H(z)$ - функция Хевисайда, равная ½ при z=0. Удобно выделить объемную и сдвиговую составляющие тензора $\hat{U}_i^j$:

$$\hat{U}_i^j = \hat{U}_{i1}^j + \hat{U}_{i2}^j,$$

которые описывают объемные и сдвиговые деформации в отдельности. Их легко выписать, используя (19), группируя слагаемые с одинаковым индексов в θ_j. Легко видеть, что компоненты тензоров $\hat{U}_{il}^j$ вне звуковых конусов $K_l^+ = \{(x,z) : z > m_l\|x\|\}$ (1.l=1,2) равны нулю. Вне зоны K_1^+ среда покоится. В зоне между звуковыми конусами деформация только объемная, в зоне K_2^+ к объемной добавляется также и сдвиговая деформация. На поверхностях конусов: $K_j = \{(x,z) : z = m_j\|x\|\}$ - волновых фронтах фундаментальных решений $\hat{U}_j^i$ сингулярны, имеют особенности типа $\left(z^2 - m_j^2\|x\|^2\right)^{-1/2}$.

Кроме того, имеют место следующие свойства симметрии:

$$\hat{U}_j^i(x,z) = \hat{U}_i^j(x,z) = \hat{U}_j^i(-x,z), \tag{20}$$

что удобно использовать при решении краевых задач. Далее для регуляризации интегралов нам понадобится тензор $\hat{W}_j^i$ - первообразный по z для $\hat{U}_j^i$ $\left(\hat{U}_j^i = \partial_z \hat{W}_j^i\right)$:

$$\hat{W}_j^i = \sum_{k=1}^{2}\hat{W}_{jk}^i = \hat{U}_j^i * \delta(x_1)\delta(x_2)H(z) = \hat{U}_j^i \underset{z}{*} \theta(z). \tag{21}$$

Он имеет вид:

$$2\pi\hat{W}_i^j = \frac{1}{\|x\|}\left(\theta_1 V_1^- - \theta_2 V_2^-\right)\ \left(\frac{z}{r}\left(r,_i r,_j - 0{,}5\text{э}_{[i]3}\delta_{ij}\right) - \delta_{i3} r,_j - \delta_{j3} r,_i\right) +$$

$$+\theta_1 \ln\ \frac{z + V_1^-}{m_1\|x\|}\ \left(0{,}5 m_1^2 \text{э}_{[i]3}\delta_{ij} + \delta_{i3}\delta_{j3}\right) - \theta_2 \ln\ \frac{z + V_2^-}{m_2\|x\|}\ \left(\left(0{,}5 m_2^2 \text{э}_{[i]3} - M_2^2\right)\delta_{ij} + \delta_{i3}\delta_{j3}\right),$$

где $r,_j = x_j/\|x\|,\ j = 1,2;\ r,_3 = 0;\ \text{э}_{ij} = (1 - \delta_{ij})$. Обозначение $\text{э}_{[i]j}$ означает фиксирование индекса i (по i в произведении не сворачиваем). В нем также удобно выделить объемную и сдвиговую части:

$$\hat{W}_i^j(x,z) = \sum_{k=1}^{2} \hat{W}_{ik}^j = \sum_{k=1}^{2} \theta(z - m_k \|x\|) \int_{m_k\|x\|}^{z} \hat{U}_{ik}^j(x,\tau)d\tau. \tag{22}$$

Очевидно, $\hat{W}_i^j$ имеет тот же носитель, что и $\hat{U}_i^j$, но поскольку на K_j^+ :

$$m_j \|x\| = z \Rightarrow \; V_j^-(x,z) = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln \; \frac{z + V_j}{m_j \|x\|} = 0,$$

Следовательно, он непрерывен на фронтах K_j . При $\|x\| \to 0, \quad z \neq 0,$

$$\|x\|^{-2} \left(\theta_1 V_1^- - \theta_2 V_2^-\right) \to \frac{m_2^2 - m_1^2}{2z},$$

поэтому $\hat{W}_i^j$ не имеет сильных особенностей на оси *z,* однако имеет слабую логарифмическую особенность по $\|x\|$. Выделим эти особенности, разбив $\hat{W}_i^j$ на слагаемые:

$$\hat{W}_i^j(x,z) = \hat{W}_i^{js} + \hat{W}_i^{jd} = \sum_{k=1}^{2} \theta_k \hat{W}_{ik}^{js}(x) + \hat{W}_{ik}^{jd}(x,z), \tag{23}$$

где

$$2\pi \hat{W}_{i1}^{js}(x) = -\left(\delta_{i3}\delta_{j3} + 0,5 m_1^2 \delta_{ij} \ni_{[i]3}\right) \; \ln(m_1 \|x\|),$$

$$2\pi \hat{W}_{i2}^{js}(x) = -\left(\delta_{i3}\delta_{j3} + \delta_{ij}(0,5 m_2^2 \ni_{[i]3} - M_2^2)\right) \; \ln(m_2 \|x\|).$$

Тензоры $\hat{W}_{il}^{js}$ диагонального вида, не зависят от *z* внутри звуковых конусов K_l^+ (1.*l*=1,2) и имеют логарифмическую особенность по $\|x\|$ на оси z. В отличие от порождающего тензора $\hat{W}_i^j$, тензоры $\hat{W}_{ik}^{js}$, $\hat{W}_{ik}^{jd}$ имеют ограниченные скачки на фронтах K_l .

Легко видеть, что справедливы следующие свойства симметрии относительно оси *Z* тензоров-сдвигов

$$U_i^j(x,y,z-\tau) = \hat{U}_i^j(x-y,z-\tau)\,,\; W_i^j(x,y,z-\tau) = \hat{W}_i^j(x-y,z-\tau):$$

$$U_i^j(x,y,z-\tau) = U_i^j(y,x,z-\tau),\; W_i^j(x,y,z-\tau) = W_i^j(y,x,z-\tau),$$

кроме компонент с индексами (1.*i,j*)=(1,1,3), (1,2,3), (1,3,1), для которых

$$U_i^3(x,y,z-\tau) = U_i^3(y,x,z-\tau),\; W_i^3(x,y,z-\tau) = W_i^3(y,x,z-\tau),\; i = 1,2. \tag{24}$$

Тензор $\hat{W}_i^j$ также имеет простой физический смысл. Он описывает перемещение упругой среды при действии сосредоточенной на полуоси X_3 силы с компонентами $G_i = \rho c^2 \delta_i^{[k]} \delta(x)\theta(z)$, действующей в направлении координатной оси X_k , и бегущей вдоль X_3 со скоростью *c*.

4. Фундаментальный тензор напряжений $\hat{\mathrm{T}}_i^j$ и его первообразная по *z*. Рассмотрим тензоры напряжений, порождаемые тензором Грина:

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}_{ij}^k(x,z) &= \lambda \hat{U}_{m,m}^{k} \delta_{ij} + \mu\left(\hat{U}_{i,j}^{k} + \hat{U}_{j,i}^{k}\right), \\ \hat{\Gamma}_i^k(x,z,n) &= \hat{\Sigma}_{ij}^k(x,z) n_j, \quad \hat{T}_i^j(x,z,n) = \hat{\Gamma}_j^i(x,z,n). \end{aligned} \tag{25}$$

Тензор $\mathbf{\Gamma} = \hat{\Gamma}_i^k(x,z,n)$ описывает напряжения на площадке с нормалью n n в точке (x,z). Верна следующая теорема.

Т е о р е м а 4.1. *Тензор* $\hat{\mathrm{T}}_i^j$ *является обобщенным решением транспортного уравнения Ламе с массовой силой вида:*

$$A_i^j\left(\partial_{x'}\right)\hat{T}_j^k+K_k^i\left(\partial_{x'},n\right)\delta(x')=0$$

где $K_i^l\left(\partial_{x'},n\right)=\lambda n_i\partial_l+\mu m_j\left(\delta_i^l\partial_j+\delta_j^l\partial_i\right)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (25) следует

$$\hat{\mathrm{T}}_i^j=\hat{\Gamma}_i^j=K_i^l\left(\partial_{x'},n\right)\hat{U}_l^j(x,z), \tag{26}$$

Следовательно,

$$A_i^j\left(\partial_{x'}\right)\hat{T}_j^k=A_i^j\left(\partial_{x'}\right)\hat{\Gamma}_k^j=A_i^j\left(\partial_{x'}\right)K_k^l\left(\partial_{x'},n\right)\hat{U}_l^j=$$

$$=K_k^l\left(\partial_{x'},n\right)A_i^j\left(\partial_{x'}\right)\hat{U}_j^l(x,z)=-K_k^l\left(\partial_{x'},n\right)\delta_i^l\delta(x')=-K_k^i\left(\partial_{x'},n\right)\delta(x').$$

Теорема доказана.

Так как введенный тензор удовлетворяет уравнениям движения, он описывает перемещения упругой среды при действии бегущей сосредоточенной массовой силы мультипольного типа. Однако, в отличие от дозвукового случая [1], не он играет главную роль при решении краевых задач, а его первообразная по z, в которой также удобно выделить объемную и сдвиговую составляющие:

$$\hat{H}_j^i=\sum_{k=1}^{2}\hat{H}_{ik}^j=\hat{T}_j^i*\delta(x_1,x_2)H(z)=\hat{T}_j^i\underset{z}{*}H(z)\ , \tag{27}$$

$$\frac{1}{\mu}\hat{H}_i^j(x,z,n)=\left(2M_1^2-M_2^2\right)n_jf_{11},_i-M_2^2\left(\delta_{ij}\frac{\partial f_{12}}{\partial n}+n_if_{12},_j\right)\ -2\frac{\partial}{\partial n}\left(f_{31},_{ij}-f_{32},_{ij}\right)\ \Bigg)\ .$$

$$2\pi f_{1k},_i(\|x\|,z)=\frac{\theta_k}{V_k^-}\left(\delta_{i3}-\frac{z}{\|x\|}r,_i\right)\ ,$$

$$2\pi f_{3k},_{ij}(\|x\|,z)=\left(\delta_{i3}\delta_{j3}+0{,}5m_k^2\delta_{ij}Э_{[i]3}\right)\ \theta_k\ \ln\ \frac{z+V_k^-}{m_k\|x\|}-$$

$$-\frac{V_k^-\theta_k}{\|x\|}\ \left(\delta_{i3}r,_j+\delta_{j3}r,_i+\frac{z}{\|x\|}\left(r,_i r,_j-0{,}5\delta_{ij}Э_{[i]3}\right)\right)$$

Этот тензор можно получить аналогично **T**, используя закон Гука, только вместо тензора Грина в него следует поставить его первообразную **W**/

Аналогично **W**, выделим в $\hat{H}_i^j$ стационарные и динамические слагаемые:

$$\hat{H}_i^j(x,z,n)=\hat{H}_i^{js}+\hat{H}_i^{jd}=\sum_{k=1}^{2}H(z-m_k\|x\|)\hat{H}_{ik}^{js}(x)+\hat{H}_{ik}^{jd}(x,z), \tag{28}$$

Так как тензоры $\hat{W}_{il}^{js}$ и $\hat{H}_{ik}^{js}$ не зависят от z внутри звуковых конусов K_l^+ (1.l=1,2), назовем их условно *стационарными.* Соответственно тензоры $\hat{W}_i^{jd}$, $\hat{H}_{ik}^{jd}$ -- *динамическими*, они существенно зависят от z, однако являются регулярными.

Тензор $\hat{H}_i^j$ имеет слабые особенности на фронтах типа $\left(z^2-m_j^2\|x\|^2\right)^{-1/2}$. В отличие от $\hat{H}_i^{jd}$ тензор $\hat{H}_i^{js}$ имеет более сильную особенность типа $\|x\|^{-1}$ на оси z.

Для него справедливы свойства симметрии относительно оси Z тензоров-сдвигов:

$$H_i^j(x,y,z-\tau,m)=-H_i^j(y,x,z-\tau,m)=-H_i^j(x,y,z-\tau,-m), \tag{29}$$

кроме (i,j)=(1,3), (2,3), (3,1):

$$H_i^3(x,y,z-\tau)=H_i^3(y,x,z-\tau),\ H_i^3(x,y,z-\tau)=H_i^3(y,x,z-\tau),\ i=1,2. \tag{30}$$

Ясно, что при $z < \tau$ все введенные тензоры-сдвиги равны нулю. Указанные свойства симметрии верны и для стационарного и динамического слагаемых тензоров.

Лемма 3.1. *Тензор* $\hat{H}_i^j$ *удовлетворяет формуле*

$$\int\limits_{S_z(x)} H_k^i(y,x,z,n(y))dS(y,\tau) + \left\{ \int\limits_{S_z^-(x)} \left(\Sigma_{i3}^k(x,y,z) - \rho c^2 U_i^k(x,y,z) \right) dV(y) \right\}_{,z} =$$

$$= \rho c^2 \delta_k^i H_D^-(x).$$

где $S_z(x) = \left\{ y \in S : m_1 \left\| x - y \right\| < z \right\}$, $S_z^-(x) = \left\{ y \in S^- : m_1 \left\| x - y \right\| < z \right\}$, $dV(y) = dy_1 dy_2$. *Для* $x \notin D$ *интегралы регулярные, для* $x \in D$ *- интегралы по* $S_z(x)$ *сингулярные с особенностью при y=x , берутся в смысле главного значения.*

Доказательство: Свернем уравнение для $\hat{U}$:

$$\left(\rho c^2 \right)^{-1} \hat{S}_{ij,j}^k - \hat{U}_{i,zz}^k = \delta_i^k \delta(x) \delta(z)$$

с $\delta(x)\theta(z)$ и получим уравнение для $\hat{W}$:

$$\left(\rho c^2 \right)^{-1} \hat{\Sigma}_{ij,j}^k - \hat{W}_{i,zz}^k = \delta_i^k \delta(x) \theta(z).$$

Далее свернем это уравнение с $H_S^-(x)\delta(z)$ и воспользуемся свойством дифференцирования свертки. В результате получим

$$\left(\rho c^2 \right)^{-1} \hat{\Sigma}_{ij}^k * n_j \delta_S(x) + \left(\rho c^2 \right)^{-1} \hat{\Sigma}_{i3,z}^k \underset{x}{*} H_S^-(x) - \hat{U}_{i,z}^k \underset{x}{*} H_S^-(x) = \delta_i^k H_S^-(x) \theta(z)$$

Это равенство для $x' \notin D$ в силу ограниченности S можно записать в представленном в лемме интегральном виде, где все интегралы существуют. Указанные области интегрирования под знаком интеграла – это носители подынтегральных функций, которые зависят от z.

Пусть $(x,z) \in D$. Обозначим полуокрестности точки x соответственно знаку: $\Gamma_\varepsilon^\pm(x) = \left\{ y \in S^\pm : r < \varepsilon, r = \left\| x - y \right\| \right\}$. Аналогично получим

$$\int\limits_{S_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon^+(x)} H_k^i(y,x,z,m(y,\tau))dS(y,\tau) + \left\{ \int\limits_{S^- + \Gamma^+(x)} \left(\Sigma_{i3}^k(x,y,z) - \rho c^2 U_i^k(x,y,z) \right) dV(y) \right\}_{,z} = \rho c^2 \delta_k^i,$$

$$\int\limits_{S_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon^-(x)} H_i^k(y,x,z,m(y,\tau))dS(y,\tau) + \left\{ \int\limits_{S^- + \Gamma_\varepsilon^-(x)} \left(\Sigma_{i3}^k(x,y,z) - \rho c^2 U_i^k(x,y,z) \right) dV(y) \right\}_{,z} = 0.$$

Здесь $m(y,\tau)$ - единичная внешняя нормаль к поверхности интегрирования, которая совпадает с n на S_ε и направлена вдоль радиуса ε -окружности на $\Gamma_\varepsilon^\pm(x)$.

Сложим эти два равенства и перейдем к пределу по $\varepsilon \to 0$.

Внутренние интегралы по S_ε стремятся к интегралам в смысле главного значения, которые существуют в силу свойств симметрии (29), (30) и асимптотических свойств $H_i^j(y,x,\tau - z, m(y,\tau))$ при $r \to 0$ для *z>0.* Предел суммы внутренних интегралов по Γ_ε^+ и Γ_ε^- стремится к нулю в силу равенства $m(y,\tau)$ в противоположных относительно x точках Γ_ε^+ и Γ_ε^-. Интегралы по $S_\varepsilon^-(x), S_\varepsilon^+(x)$ стремятся к нулю в силу слабой особенности подынтегральных функций. Если поделить предельное равенство на 2 , то с учетом определения H_D^- на *D,* получим доказываемое.

Если для заданных $(\mathbf{x},z)$ выполняется $z \ge \max_{y\in S}(m_1 \|x-y\|)$, то области интегрирования становятся постоянными: $S_z^-(x) = S^-$, $S_z(x) = S$.

Лемма 3.2. Если $z \ge m_1\varepsilon,\ \varepsilon > 0$, то

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{r=\varepsilon} H_i^k\left(y,x,z,\frac{y-x}{r}\right)dS(y,\tau) = \rho c^2\delta_i^k \tag{31}$$

Доказательство: Поскольку для таких z область интегрирования от z не зависит, а подынтегральные выражения непрерывны вместе со всеми производными внутри ε-окружности, дифференцирование по z в формуле леммы, записанном для указанного множества, можно внести под знак интеграла, в результате получим:

$$\int_{r=\varepsilon} H_i^k\left(y,x,z,\frac{y-x}{r}\right)dS(y,\tau) + \int_{r<\varepsilon}\left(\Sigma_{i3}^k(y,x,z) - \rho c^2 U_i^k(x,y,z)\right),_z dV(y) = \rho c^2\delta_i^k$$

Отсюда следует (31), т.к предел по $\varepsilon \to 0$ второго слагаемого равен нулю.

Формула леммы 3.1. является обобщением известной формулы Гаусса для уравнения Лапласа. Она играет важную роль при построении разрешающих сингулярных граничных интегральных уравнений краевых задач в сверхзвуковом случае.

4. Аналог формулы Сомильяны и сингулярные граничные интегральные уравнения при сверхзвуковых скоростях. Для того, чтобы представить обобщенное решение (10) в интегральном виде, преобразуем его, используя первообразную тензора Грина $\hat{W}_i^l$:

$$\begin{aligned}
\hat{u}_i &= \hat{U}_i^j * p_j\delta_D + \left(C_{ij}^{kl}u_k n_l\delta_D * \hat{U}_i^l\right),_j + \hat{U}_i^j * G_j H_D^- = \\
&= \hat{U}_i^j * p_j\delta_D + \left(C_{ij}^{kl}u_k n_l\delta_D * \partial_z\hat{W}_i^l\right),_j + \hat{U}_i^j * G_j H_D^- = \\
&= \hat{U}_i^j * p_j\delta_D + \partial_z\left(u_k n_l\delta_D\right) * C_{ij}^{kl}\partial_j\hat{W}_i^l + \hat{U}_i^j * G_j H_D^- = \\
&= \hat{U}_i^j * p_j\delta_D + \left(u_k,_z n_l\delta_D + u_k(x,0)n_l(x)H_S^-(x)\delta(z)\right) * C_{ij}^{kl}\partial_j\hat{W}_i^l + \hat{U}_i^j * G_j H_D^- = \\
&= \hat{U}_i^j * p_j\delta_D + u_k,_z n_l\delta_D * C_{ij}^{kl}\partial_j\hat{W}_i^l + u_k(x,0)n_l(x)H_S^-(x)\delta(z) \underset{x}{*} C_{ij}^{kl}\partial_j\hat{W}_i^l + \hat{U}_i^j * G_j H_D^-
\end{aligned} \tag{32}$$

Здесь для сокращения записи введен тензор упругих констант, который для изотропной упругой среды имеет вид:

$$C_{ij}^{kl} = \lambda\delta_i^k\delta_j^l + \mu(\delta_i^l\delta_j^k + \delta_j^k\delta_i^l)$$

Формулу (33) теперь можно записать в интегральном виде для $(x,z) \notin D_+$.

Т е о р е м а 4.2. При $c > c_1$ *решение краевой задачи удовлетворяет соотношениям:*

при $(x,z) \notin D$

$$\begin{aligned}
\rho u_i(x,z)H_D^-(x) = \sum_{k=1}^2\int_S \theta(z-m_k r)dS(y)\int_0^{z-m_k r}&\left(U_{ik}^j(x,y,z-\tau)p_j(y,\tau) -\right.\\
&\left.-H_{ik}^j(x,y,z-\tau,n(y))\partial_\tau u_j(y,\tau)\right)d\tau,
\end{aligned} \tag{33}$$

при $(x,z) \in D_+$

$$\begin{aligned}
0,5\rho u_i(x,z) = \sum_{k=1}^2\int_S \theta(z-m_k r)dS(y)\int_0^{z-m_k r}&\left(U_{ik}^j(x,y,z-\tau)p_j(y,\tau)d\tau -\right.\\
-V.P.\int_S \theta(z-m_k r)dS(y)\int_0^{z-m_k r}& H_{ik}^j(x,y,z-\tau,n(y))\partial_\tau u_j(y,\tau)d\tau,
\end{aligned} \tag{34}$$

где последний интеграл сингулярный, берется в смысле главного значения по контуру S или его части.

Доказательство: Интегральная запись обобщенного решения (10) имеет вид (33). Все интегралы существуют, так как подынтегральные функции интегрируемы, в том числе и на фронтах фундаментальных решений, т.к. ядра подынтегральных выражений имеют слабые особенности на фронтах вида $\left(z^2 - m_j^2 \|x\|^2\right)^{-1/2}$. Покажем, что формула сохраняет вид и для $x' \in D$, с учетом определения $H_D^-(x,z)$.

Действительно, пусть $(x,z) \in D^-$ и $(x,z) \to (x^*,z^*)$, $(x^*,z^*) \in D$. Тогда

$$0 = \sum_{k=1}^{2} \left\{ \int_{S_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon^-} \theta(z - m_k r) ds(y) \int_0^{z - m_k r} \left(U_{ik}^j (x^*, y, z^* - \tau) p_j(y,t) - \right.\right. \tag{35}$$

$$\left.\left. - H_{ik}^j (x^*, y, z^* - \tau, n(y)) u_{j'z}(y,\tau) \right) d\tau \right\}$$

Рассмотрим в ней интеграл

$$I_\varepsilon(x^*,z^*) = = \sum_{k=1}^{2} \int_{\Gamma_\varepsilon^-} \theta(z^* - m_k r) ds(y) \int_0^{z^* - m_k r} \left(H_{ik}^j (x^*, y, z^* - \tau, n(y)) u_{j'z}(y,\tau) d\tau, \right.$$

Пусть $\varepsilon < z^*/m_1$. Поскольку $n = m = (x-y)/r$, $r = \varepsilon$ на Γ_ε^-, его можно переписать в виде:

$$I_\varepsilon(x^*,z^*) =$$

$$= \sum_{k=1}^{2} \int_{\Gamma_\varepsilon^-} \theta(z^* - m_k \varepsilon) dS(y) \int_0^{z^* - m_k \varepsilon} \left(H_{ik}^j (x^*, y, z^* - \tau, m(y)) d_\tau u_j(y,\tau) = \right.$$

$$= \sum_{k=1}^{2} \int_{\Gamma_\varepsilon^-} H_{ik}^j (x^*, y, m_k \varepsilon, m(y)) u_j(y, z^* - m_k \varepsilon) dS(y) =$$

$$= \sum_{k=1}^{2} \int_{\Gamma_\varepsilon^-} H_{ik}^j (x^*, y, m_k \varepsilon, m(y)) \left(u_j(y, z^* - m_k \varepsilon) - u_j(x^*, z^*) \right) dS(y) +$$

$$+ u_j(x^*,z^*) \sum_{k=1}^{2} \int_{\Gamma_\varepsilon^-} H_{ik}^j (x^*, y, m_k \varepsilon, m(y)) dS(y).$$

Перейдем в последнем равенстве к пределу по $\varepsilon \to 0$. Первое слагаемое имеет слабую особенность по r даже устранимую, так как при $\varepsilon \to 0, r \to 0$, а $u_j(y, z^* - m_k r) \underset{\varepsilon \to 0}{\to} u_j(x^*, z^*)$.

Поскольку $\Gamma_\varepsilon^- \to 0$, это слагаемое также стремится к 0. Интеграл во втором слагаемом стремится к интегралу по полуокружности. Следовательно, в силу леммы 3.2,

$$I_\varepsilon(x^*,z^*) \underset{\varepsilon \to 0}{\to} 0{,}5\, u_j(x^*,z^*)$$

Перенося это слагаемое в левую часть уравнения, получим, с учетом определения $H_S^-(x)$, получим вторую формулу теоремы. Теорема доказана.

Для $(x,z) \in D$ формула (34) является системой граничных интегральных уравнений для решения краевой задачи. После определения по ним неизвестных граничных значений скорости перемещений, по первой формуле теоремы определяем решение внутри среды. А так как ядра подынтегральных выражений имеют слабые особенности на фронтах, интегралы в формуле (33) допускает перемену порядка интегрирования:

при z>0

$$\rho u_i(x,z)=\sum_{k=1}^{2}\int_0^z d\tau \int_{S_\tau^k(x)}\left(U_{ik}^j(x,y,z-\tau)p_j(y,\tau)-H_{ik}^j(x,y,z-\tau,n(y))\partial_z u_j(y,\tau)\right)dS(y) \quad (35)$$

что можно использовать при численной реализации алгоритма решения задачи.

Для вычисления сингулярных интегралов удобно преобразовать формулу (34), разложив ядра соответственно порождаемой ими деформации.

Т е о р е м а 4.2. *Решение краевой задачи на границе области удовлетворяет сингулярным граничным интегральным уравнениям вида:*

$$0,5\rho u_i(x,z)=\theta(z)\sum_{k=1}^{2}\int_0^z d\tau \int_{S_\tau^k(x)}\left(U_{ik}^j(x,y,z-\tau)p_j(y,\tau)-H_{ik}^{jd}(x,y,z-\tau,n(y))\times\right.$$

$$\left.\times\partial_z u_j(y,\tau)\right)dS(y)-V.P.\int_{s_z^k(x)}H_{ik}^{js}(x,y,n(y))u_j(y,z-m_k r)dS(y),\ (x,z)\in D_+$$

где $S_\tau^k(x')=\{(y,\tau):m_k r<z-\tau\}$, $s_z^k(x)=\{(y):m_k r<z\}$, *где последний интеграл сингулярный, берется в смысле главного значения по контуру S или его части.*

Доказательство следует из разбиения (28) тензора H на динамические и статические составляющие соответственно типу деформаций. Подставляя (28) в формулу теоремы и производя интегрирование по τ в слагаемом, содержащем $u,_z$, получим формулу теоремы. В силу слабых особенностей ядер подынтегральных выражений, содержащих $\hat{H}_{ik}^{jd}$, первый интеграл регулярен. А второй интеграл берется в смысле главного значения, но уже не по поверхности цилиндра, а по контуру его поперечного сечения.

Заключение. Уравнения (34), (35) являются сингулярными ГИУ неклассического типа. Данный тип ГИУ теоретически практически не изучен, так как решение внутри области определяется граничными значениям напряжений и скорости перемещений, а не самих перемещений, как в формуле Сомильяны. Кроме того область интегрирования по граничной поверхности существенно зависит от *z*, что характерно для гиперболических уравнений и систем. Это существенно осложняет численное определение решений таких задач на основе метода последовательных приближений. Однако использование метода граничных элементов при численной дискретизации СГИУ позволяет использовать стандартные методы вычислительной математики для компьютерной реализации решения такой задачи.

Рассмотренные здесь и в [5] краевые задачи являются модельными для динамики подземных сооружений типа транспортных тоннелей и протяженных горных выработок, подверженных динамическому воздействию со стороны движущихся транспортных средств и сейсмических нагрузок. Они позволяет исследовать динамику породного массива в окрестности подземных сооружений в зависимости от его физико-механических свойств, скорости движущего транспорта, особенностей транспортной нагрузки, геометрии сооружения.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Алексеева Л.А. Сингулярные граничные интегральные уравнения краевых задач эластодинамики в случае дозвуковых бегущих нагрузок // Дифференциальные уравнения. – 2010. – Т. 46, № 4. – С. 512-519.

[2] Алексеева Л.А. Обобщенные решения краевых задач для одного класса бегущих решений волнового уравнения // Математический журнал. – 2008. – Т. 8, № 2(28). – С. 1-19.

[3] Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.

[4] Алексеева Л.А. Фундаментальные решения в упругом пространстве в случае бегущих нагрузок // Прикладная математика и механика. – 1991. – Т. 55, № 15. – С. 854-862.

[5] Алексеева Л.А. Обобщенные решения уравнений Ламе в случае бегущих нагрузок. Ударные волны // Математический журнал. – 2009. – Т. 9, № 1(31). – С. 16-25.

[6] Алексеева Л.А. Краевые задачи теории упругости при сверхзвуковых транспортных нагрузках. Единственность решений // Изв. НАН РК. Серия физ.-мат. – 2014. – № 1.

[7] Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, 1978.

REFERENCES

[1] Alexeyeva L.A. *Singular boundary integral equation of boundary value problems in the case of subsonic elastodynamics running loads*. Differential equations. 2010. Vol. 46, № 4. P. 512-519. (in Russ.).

[2] Alexeyeva L.A. *Generalized solutions of boundary value problems for a class of solutions of traveling wave equation*. Mathematical Journal. 2008. Vol. 8, № 2(28). P. 1-19. (in Russ.).

[3] Nowacki W. *Theory of Elasticity*. M.: World, 1975. 872 p. (in Russ.).

[4] Alexeyeva L.A. *Fundamental decisions in the elastic space in the case of heating of the running-portation*. Applied Mathematics and mehanika. 1991. Vol. 55, № 5. P. 854-862. (in Russ.).

[5] Alexeyeva L.A. *Generalized solutions of Lame in the case of running loads. Shock waves*. Mathematical journal. 2009. Vol. 9, № 1(31). P. 16-25. (in Russ.).

[6] Alexeyeva L.A. *Boundary problems of the theory of elasticity in supersonic transport loads. Uniqueness of solutions*. News of NAS RK. Series of physical and mathematical. 2014. №1. (in Russ.).

[7] Vladimirov V.S. *Generalized functions in mathematical physics.* M.: Science, 1978. (in Russ.).

Поступила 25.02.2015 г.

Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайте:

www:nauka-nanrk.kz

physics-mathematics.kz

Редактор *М. С. Ахметова*
Верстка на компьютере *Д. Н. Калкабековой*

Подписано в печать 9.06.2015.
Формат 60x881/8. Бумага офсетная. Печать – ризограф.
15,7 п.л. Тираж 300. Заказ 3.

Национальная академия наук РК
050010, Алматы, ул. Шевченко, 28, т. 272-13-18, 272-13-19