

ISSN 1991-346X

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ

Х А Б А Р Л А Р Ы

ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА
СЕРИЯСЫ**



СЕРИЯ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ



**PHYSICO-MATHEMATICAL
SERIES**

3 (301)

МАМЫР – МАУСЫМ 2015 ж.

МАЙ – ИЮНЬ 2015 г.

MAY – JUNE 2015

1963 ЖЫЛДЫҢ ҚАҢТАР АЙЫНАН ШЫҒА БАСТАҒАН
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1963 ГОДА
PUBLISHED SINCE JANUARY 1963

ЖЫЛЫНА 6 РЕТ ШЫҒАДЫ
ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД
PUBLISHED 6 TIMES A YEAR

АЛМАТЫ, ҚР ҰҒА
АЛМАТЫ, НАН РК
ALMATY, NAS RK

Б а с р е д а к т о р

ҚР ҰҒА академигі,

Мұтанов Г. М.

Р е д а к ц и я а л қ а с ы:

физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Әшімов А.А.**; техн. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Байғұнчечков Ж.Ж.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Жұмаділдаев А.С.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Қалменов Т.Ш.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Мұқашев Б.Н.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Өтелбаев М.О.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Тәкібаев Н.Ж.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Харин С.Н.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Әбішев М.Е.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Жантаев Ж.Ш.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Қалимолдаев М.Н.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Косов В.Н.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Мұсабаев Т.А.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Ойнаров Р.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Рамазанов Т.С.** (бас редактордың орынбасары); физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Темірбеков Н.М.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Өмірбаев У.У.**

Р е д а к ц и я к ең е с і:

Украинаның ҰҒА академигі **И.Н. Вишневский** (Украина); Украинаның ҰҒА академигі **А.М. Ковалев** (Украина); Беларусь Республикасының ҰҒА академигі **А.А. Михалевич** (Беларусь); Әзірбайжан ҰҒА академигі **А. Пашаев** (Әзірбайжан); Молдова Республикасының ҰҒА академигі **И. Тигиняну** (Молдова); мед. ғ. докторы, проф. **Иозеф Банас** (Польша)

Главный редактор

академик НАН РК

Г. М. Мутанов

Редакционная коллегия:

доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **А.А. Ашимов**; доктор техн. наук, проф., академик НАН РК **Ж.Ж. Байгунчеков**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **А.С. Джумадильдаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **Т.Ш. Кальменов**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **Б.Н. Мукашев**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **М.О. Отелбаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **Н.Ж. Такибаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **С.Н. Харин**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **М.Е. Абишев**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Ж.Ш. Жантаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **М.Н. Калимолдаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **В.Н. Косов**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Т.А. Мусабаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Р. Ойнаров**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Т.С. Рамазанов** (заместитель главного редактора); доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Н.М. Темирбеков**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **У.У. Умирбаев**

Редакционный совет:

академик НАН Украины **И.Н. Вишневский** (Украина); академик НАН Украины **А.М. Ковалев** (Украина); академик НАН Республики Беларусь **А.А. Михалевич** (Беларусь); академик НАН Азербайджанской Республики **А. Пашаев** (Азербайджан); академик НАН Республики Молдова **И. Тигиняну** (Молдова); д. мед. н., проф. **Иозеф Банас** (Польша)

«Известия НАН РК. Серия физико-математическая». ISSN 1991-346X

Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы)

Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации и архивов Министерства культуры и информации Республики Казахстан №5543-Ж, выданное 01.06.2006 г.

Периодичность: 6 раз в год.

Тираж: 300 экземпляров.

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, ком. 219, 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,

www.nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

© Национальная академия наук Республики Казахстан, 2015

Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75.

Editor in chief

G. M. Mutanov,
academician of NAS RK

Editorial board:

A.A. Ashimov, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **Zh.Zh. Baigunchekov**, dr. eng. sc., prof., academician of NAS RK; **A.S. Dzhumadildayev**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **T.S. Kalmenov**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **B.N. Mukhashev**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **M.O. Otelbayev**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **N.Zh. Takibayev**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **S.N. Kharin**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **M.Ye. Abishev**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **Zh.Sh. Zhantayev**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **M.N. Kalimoldayev**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **V.N. Kosov**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **T.A. Mussabayev**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **R. Oinarov**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **T.S. Ramazanov**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK (deputy editor); **N.M. Temirbekov**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **U.U. Umirbayev**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK

Editorial staff:

I.N. Vishnievski, NAS Ukraine academician (Ukraine); **A.M. Kovalev**, NAS Ukraine academician (Ukraine); **A.A. Mikhalevich**, NAS Belarus academician (Belarus); **A. Pashayev**, NAS Azerbaijan academician (Azerbaijan); **I. Tighineanu**, NAS Moldova academician (Moldova); **Joseph Banas**, prof. (Poland).

News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physical-mathematical series.
ISSN 1991-346X

Owner: RPA "National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan" (Almaty)

The certificate of registration of a periodic printed publication in the Committee of information and archives of the Ministry of culture and information of the Republic of Kazakhstan N 5543-Ж, issued 01.06.2006

Periodicity: 6 times a year

Circulation: 300 copies

Editorial address: 28, Shevchenko str., of. 219, 220, Almaty, 050010, tel. 272-13-19, 272-13-18,

www.nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

© National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, 2015

Address of printing house: ST "Aruna", 75, Muratbayev str, Almaty

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 3, Number 301 (2015), 97 – 101

**ABOUT DETERMINATION
OF PLASTIC STRESS DISTRIBUTED
COMPONENTS ACCORDING
TO THE DIFFERENT CONDITIONS
OF PLASTICITY**

M. Yeskaliyev, G. O. Omirbek, M. K. Chanbaeva

Kazakh State women's Pedagogical University Almaty, Kazakhstan.
E-mail: Yeskaliyev@mail.ru

Key words: deformation, plastic, isotropic, tension, coefficient

Abstract. The article discusses the components of the stress distribution near the cavity beyond the elastic limit. Under the assumptions of the statistical problem of definability plastic stress component satisfies the differential equation and the equilibrium is solved by the stress function and use conditions of plasticity.

ӘОК 539.3:550.3

**ӘРТҮРЛІ АҒЫМДЫҚ ШАРТТАРҒА
ТӘУЕЛДІ ПЛАСТИКАЛЫҚ ОРТАДАҒЫ КЕРНЕУ
КОПОНЕНТТЕРІНІҢ ТАРАЛУЫ ТУРАЛЫ**

М. Е. Есқалиев, Г. Ө. Өмірбек, М. К. Чанбаева

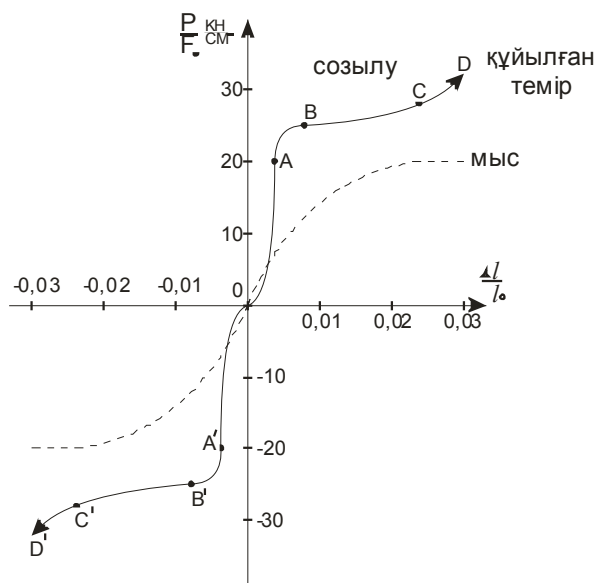
Қазақ мемлекеттік қыздар педагогикалық университеті, Алматы, Қазақстан

Тірек сөздер: деформация, пластикалық, изотропты, кернеу, коэффициент.

Аннотация. Мақалада ағымдық шарттарға тәуелді болатын денедегі пластикалық кернеу компоненттерінің қуыс маңайындағы таралуы қарастырылған. Есеп статикалық анықталғандықтан пластикалық кернеу компоненттері тепе-теңдіктің дифференциалдық теңдеулерін қанағаттандырып, кернеулік функциялармен пластикалық шарттарды пайдалана отырып шешілген.

Қатты дененің біртіндеп өсе беретін P күштің әсерінен формасының өзгеруіне қарсылылығын цилиндр нұсқалы дененің созу кезінде байқалады. Суреттің жоғарғы жағында бөлме температурасындағы жұмсақ болат және мыстың созылу диаграммасы кескінделген.

Вертикаль оське P/F_0 кернеуі, мұндағы F_0 стерженнің алғашқы көлденең ауданы, ал горизонталь оське салыстырмалы ұзару салынған, мұндағы l_0 нұсқаның алғашқы ұзындығы. A нүктесі шектік пропорционалдық атауына сәкес және ол серпімділік шегі B нүктесінен төмен орналасқан. Осы B нүктесінен бастап қалдық деформация пайда болады да, ұзару тез өсе бастайды; сипатталатын BC ағымдық ауданша пайда болады, осыдан кейін кернеу тағы да өсе бастайды. CD аралығы металдың бекемдік күйіне қатысты.



Цилиндрлік нұсқаны созу кезіндегі қалдық деформацияның пайда болуының диаграммасы

Ағымдық шарттар. Материалдың серпімді күйінен ағымдық күйіне көшуі қандай шарттармен сипатталатын мағынасын көрсету қажеттілігі туындайды. Ағымдық күйде орындалатын шартты ағымдық шарт (немесе пластикалық) деп атайды. Изотропты денелер үшін бұл шарт бас кернеулердің симметриялық функциясы болуы керек.

$$f = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = const = K \quad (1)$$

мұндағы K – материал тұрақтысы.

Треска-Сен-Венан шарты. Сен-Венан осы шарттың жазық деформация үшін математикалық тұжырымдамасын берді.

Кеңістік жағдайындағы осы шарттың түрі:

$$\begin{aligned} 2|\tau_1| &= |\sigma_2 - \sigma_3| \leq \sigma_s, \\ 2|\tau_2| &= |\sigma_3 - \sigma_1| \leq \sigma_s, \\ 2|\tau_3| &= |\sigma_1 - \sigma_2| \leq \sigma_s, \end{aligned} \quad (2)$$

Қарапайым созуға ағымдық күйі кезінде

$$\sigma_1 = const = \sigma_s$$

Серпімділік күйі кезінде (2) формула орынды. Ағымдық күйі кезінде осы шарттың біреуінде немесе екеуінде теңдік белгісі болуы қажет.

Жанама кернеу қарқындылығының тұрақтылық шарты (Мизес шарты). Үш өлшемді есептерге арналған теңсіздіктермен берілген Треска-Сен-Венан ағымдық шарты кейбір математикалық қиындықтармен байланысты.

Осы жағдай Мизесті мына шартқа келеді:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_s^2 \quad (3)$$

Мизес шарты мына түрде де жазылуы мүмкін:

$$T = \frac{\sigma_3}{\sqrt{3}} \tau \quad (4)$$

Таза ығысу кезінде $T = \tau$, онда (2.4) өрнектен

$$\tau_s = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}} \quad (5)$$

Бірлескен (ассоциированный) ағымдық заңы.

Ең маңызды қарапайым жағдай, ол ағымдық функциямен пластикалық потенциалдың сәйкес келуі:

$$f = \Phi$$

бұл жағдайда оның қарапайымдылығынан экстремальды ұстаным орнатылады.

Сонымен,

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (6)$$

және пластикалық ағым ағымдық бетке нормаль бағытта дамиды. $d\lambda$ көбейткіші пластикалық деформацияның жұмысына пропорционалды.

$$d\lambda = \frac{dA_p}{mK} \quad (7)$$

Пластикалық ортадағы кернеулер статикалық анықталғандықтан, кернеу компоненттері серпімді-пластикалық шекараны есептемей-ақ табылады.

Дөңгелек қуыс маңайындағы пластикалық кернеу компоненттерін полярлық координаттық жүйеде көрсету қолайлы. Осы кернеу компоненттерін деп белгілесек, олардың жазылу түрі мына $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ түрде болады (тепе-теңдіктің дифференциалдық теңдеулері) [1]:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = 0 \quad (8)$$

($r = 1$ болғанда) қуыс маңайындағы шекаралық шарт:

$$\sigma_r = P_0 = \text{const} \quad \tau_{r\theta} = 0. \quad (9)$$

Кернеу компоненттерімен байланысты кернеулік функцияны енгізсек ол (1) тепе-теңдік дифференциалдық теңдеулерін қанағаттандырады $\varphi(r, \theta)$:

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}, \quad (10)$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right)$$

Пластикалық аумақта дене изотропты деп ескерілсе және қуыс жиегінде тек қана бірқалыпты нормаль кернеулер әсер еткенде кернеулік функция полярлық координатқа тәуелді емес. Онда кернеулік функция мына түрге келеді $\varphi(r)$.

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{d\varphi(r)}{dr},$$

$$\sigma_\theta = \frac{d^2 \varphi(r)}{dr^2},$$

$$\tau_{r\theta} = 0. \quad (11)$$

Ендігі жерде (8) және (9) теңдеулерге пластикалық шарттарды енгізуге болады, бұл шарттар дене құрамына байланысты.

Треска-Сен-Венан пластикалық шарты. Ішкі үйкеліс коэффициенті аз және шамалы қабысу коэффициенті бар денелер үшін Треска-Сен-Венан пластикалық шартын пайдалануға болады:

$$(\sigma_{\theta} - \sigma_r)^2 + 4\tau_{r\theta}^2 = 4k^2 \quad (12)$$

k – қабысу коэффициенті.

(11) өрнектегі кернеулік функция мәндерін (12) өрнекке қойсақ, коэффициенттері айнымалы екінші ретті жәй дифференциалдық теңдеулерді аламыз:

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} - 2k = 0 \quad (13)$$

Бұл теңдеудің жалпы шешімі:

$$\varphi(r) = kr^2 \left(\ln r - \frac{1}{r} \right) + \frac{r^2}{2} C_1 + C_2, \quad (14)$$

C_1, C_2 – интегралдау тұрақтылары, олар [2] әдісімен табылады.

Пластикалық ортадағы кернеу компоненттері (11) формула арқылы (9) шекаралық шартты ескере отырып, табылған (14) формула кернеулік функциямен былайша өрнектеледі:

$$\begin{aligned} \sigma_r/k &= 2\ln r + P_0/k, \\ \sigma_r/k &= 2(\ln r + 1) + P_0/k, \\ \tau_{r\theta} &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Декарттық жүйедегі кернеу компоненттері:

$$\begin{aligned} \sigma_x/k &= \frac{\ln z\bar{z} - (z - \bar{z})^2}{2|z|} + \frac{P_0}{k}, \\ \sigma_y/k &= \frac{\ln z\bar{z} + (z - \bar{z})^2}{2|z|} + \frac{P_0}{k}, \\ \tau_{xy}/k &= \frac{(z + \bar{z})(z - \bar{z})}{2i|z|} \end{aligned} \quad (16)$$

Мұндағы $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$.

Кулон-Мордың пластикалық шарты. Қабысу коэффициенті және ішкі үйкеліс коэффициенті бар, біршама қатты денелер үшін Кулон-Мор пластикалық шартын енгізуге болады:

$$(\sigma_{\theta} - \sigma_r)^2 + 4\tau_{r\theta}^2 = \sin^2\rho(\sigma_{\theta} + \sigma_r + 2k\text{ctg}\rho) \quad (17)$$

Мұндағы – ρ ішкі үйкеліс коэффициенті, k - дененің қабысу коэффициенті (эксперименттік нәтижелерден алынады).

(17) өрнекке (11) кернеулік функция мәндерін қойсақ, коэффициенттері айнымалы екінші ретті жәй дифференциалдық теңдеулерді аламыз:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\varphi}{dr^2} - \frac{\delta}{r} \frac{d\varphi}{dr} + \gamma &= 0, \\ \delta &= \frac{1 - \sin\rho}{1 + \sin\rho}, \gamma = \frac{\cos\rho}{1 + \sin\rho} \end{aligned} \quad (18)$$

(18) теңдеудің жалпы шешімі [2]:

$$\varphi(r) = \frac{\gamma}{2(1-\delta)} r^2 + C_1 r^{\delta+1} + C_2 \quad (19)$$

C_1, C_2 – интегралдау тұрақтылары.

Кулон-Мор шартын қанағаттандыратын кернеу компоненттері (11) формула арқылы (9) шекаралық шартты ескере отырып, табылған (19) формула кернеулік функциямен былайша өрнектеледі:

$$\begin{aligned}\sigma_r/k &= \frac{\delta}{1-\gamma} - \left(\frac{P_0}{k} + \frac{\delta}{1-\gamma} \right) r^{\gamma-1} \\ \sigma_\theta/k &= \frac{\delta}{1-\gamma} - \gamma \left(\frac{P_0}{k} + \frac{\delta}{1+\gamma} \right) r^{\gamma-1} \\ \tau_{r\theta} &= 0.\end{aligned}\quad (20)$$

Декарттық жүйедегі кернеу компоненттері:

$$\begin{aligned}\sigma_x/k &= \left[\operatorname{ctgr} \rho - \sigma \left(1 - \sin \rho \frac{z^2 + \bar{z}^2}{2|z|^2} \right) \right] + \frac{P_0}{k}, \\ \sigma_y/k &= \left[\operatorname{ctgr} \rho - \sigma \left(1 + \sin \rho \frac{z^2 + \bar{z}^2}{2|z|^2} \right) \right] + \frac{P_0}{k}, \\ \tau_{xy}/k &= 2\sigma \sin \rho \frac{z^2 - \bar{z}^2}{4i|z|^2}, \\ z &= x + iy, \bar{z} = x - iy\end{aligned}\quad (21)$$

ӘДЕБИЕТ

- [1] Качанов Л.Т. Основы теории пластичности. – М.: Наука, 1969.
[2] Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. – Т. 2. – М.: Наука, 1985.

REFERENCES

- [1] Kachanov L.T. *Fundamentals of the theory of plasticity*. M.: The Science, 1985 (in Russ.).
[2] Piskunov N.S. *Differential and integral calculus* M.: The Science, 1985 (in Russ.).

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КОМПОНЕНТ ПЛАСТИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ РАЗЛИЧНЫХ УСЛОВИЙ ПЛАСТИЧНОСТИ

М. Е. Ескалиев, Г. О. Омирбек, М. К. Чанбаева

Казахский государственный женский педагогический университет, Алматы, Казахстан

Ключевые слова: деформация, пластичность, изотропность, напряжение, коэффициент.

Аннотация. В статье рассматривается распределение компонент напряжений вблизи полости за пределами упругости. В предположении статистической определенности задачи пластические компоненты напряжений удовлетворяют дифференциальным уравнениями равновесия и решаются с привлечением функции напряжений и использованием условий пластичности.

Поступила 25.02.2015 г.

Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайте:

www.nauka-nanrk.kz

physics-mathematics.kz

Редактор *М. С. Ахметова*

Верстка на компьютере *Д. Н. Калкабековой*

Подписано в печать 9.06.2015.

Формат 60x881/8. Бумага офсетная. Печать – ризограф.

15,7 п.л. Тираж 300. Заказ 3.