ISSN 1991-346X

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ

Х А Б А Р Л А Р Ы

ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

N E W S

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА СЕРИЯСЫ

♦

СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

♦

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

6 (304)

ҚАРАША – ЖЕЛТОҚСАН 2015 ж.
НОЯБРЬ – ДЕКАБРЬ 2015 г.
NOVEMBER – DECEMBER 2015

1963 ЖЫЛДЫҢ ҚАҢТАР АЙЫНАН ШЫҒА БАСТАҒАН
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1963 ГОДА
PUBLISHED SINCE JANUARY 1963

ЖЫЛЫНА 6 РЕТ ШЫҒАДЫ
ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД
PUBLISHED 6 TIMES A YEAR

АЛМАТЫ, ҚР ҰҒА
АЛМАТЫ, НАН РК
ALMATY, NAS RK

«Известия НАН РК. Серия физико-математическая». ISSN 1991-346X
Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы)
Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации и архивов Министерства культуры и информации Республики Казахстан **№5543-Ж**, выданное 01.06.2006 г.

Периодичность: 6 раз в год.
Тираж: 300 экземпляров.

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, ком. 219, 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,
www:nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75.

News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physical-mathematical series.
ISSN 1991-346X
Owner: RPA "National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan" (Almaty)
The certificate of registration of a periodic printed publication in the Committee of information and archives of the Ministry of culture and information of the Republic of Kazakhstan N 5543-Ж, issued 01.06.2006

Periodicity: 6 times a year
Circulation: 300 copies

Editorial address: 28, Shevchenko str., of. 219, 220, Almaty, 050010, tel. 272-13-19, 272-13-18,
www:nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

Address of printing house: ST "Aruna", 75, Muratbayev str, Almaty

N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 6, Number 304 (2015), 109 – 117
UDC 517.946

ABOUT ONE INTEGRAL GEOMETRY PROBLEM FOR FAMILY CURVES IN MULTIDIMENSIONAL SPACE

Dilman T.B., Serikbol M.S.

E-mail: DilmanTB@mail.ru
The Korkyt Ata Kyzylorda State University. Kyzylorda

Key words: integral geometry, family curves, integral equation, solution, uniqueness.

Abstract: In this article the following class of integral geometry problems is considered: about the function reconstruction, shared by the integrals on some set of curves. This problems are correlated with several applications. In order to study the internal earth structure, the multiple explosions are held on Earth surface. Then, the fluctuations regimes of earth surface are measured on equipment for each explosion. The goal of research is to determine distribution of physical parameters inside the Earth accordin to equipment measurements, correlated with laws on dissemination of seismic waves. The most clear functional of such equipment is the arrival time of seismic wave, which exacty serves as a base for interpretation practice. It is known that lineriazed problem of seismic-exploration data interpretation is actually the integral geometry problem. An integral geometry also includes the problems related to the radiography, particularly the interpretation problem of X-ray examination. For instance, a X-ray film darkening functionally correlated with the absorption coefficient is also actually an integral geometry problem. In this case, it is required to determine the function if the integrals of this function on set of rays were set. The integral geometry problem in multidimensional space is studied in this work. The solution uniqueness theorem is proved for the considered integral geometry problem.

УДК 517.946

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ В МНОГОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Дильман Т.Б., Серикбол М.С.

E-mail: DilmanTB@mail.ru
Кызылординский государственный университет имени Коркыт ата, г. Кызылорда

Ключевые слова: интегральная геометрия, семейство кривых, интегральное уравнение, решение, единственность.

Аннотация: В данной статье рассматривается следующий класс задачинтегральной геометрии: о восстановлении функции, заданной интегралами по некоторому семейству кривых. Эти задачи связаны с многочисленными приложениями. В целях изучения внутреннего строения земных недр на поверхности Земли производится серия взрывов. Для каждого взрыва на системе приборов измеряются режимы колебаний земной поверхности. Цель исследования – по показаниям приборов определить внутри Земли распределение физических параметров, связанных с законами распространения сейсмических волн. Наиболее четкий функционал в показаниях приборов – время прихода сейсмической волны, именно он служит основой в практике интерпретации. Известно, что линеаризованная задача интерпретации данных сейсморазведки есть задача интегральной геометрии. К интегральной геометрии сводятся задачи, связанные с просвечиванием, в частности, задачи интерпретации рентгеновских снимков. Потемнение рентгеновской пленки функционально связано с интегралом поглощения вдоль рентгеновского луча от источника до точки на пленке. Таким образом, задача определения пространственного коэффициента поглощения есть задача интегральной геометрии – требуется определить функцию, если заданы интегралы от этой функции по семейству лучей. В работе исследуется задача интегральной геометрии для семейства пространственных кривых. Доказывается теорема единственности решения рассматриваемой задачи интегральной геометрии.

Обратными задачами для дифференциальных уравнений, как известно, принято называть задачи определения дифференциальных уравнений по известной информации о решениях этих уравнений [1-3]. Многие прикладные вопросы, касающиеся исследования кинематических задач сейсмики, теории потенциала, уравнения Штурма-Лиувилля и других процессов, привели к обратным задачам [4-8].

Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений часто некорректны в классическом смысле Адамара. Поэтому актуальность приобретают вопросы единственности и поиск минимальной информации, которая делает обратную задачу определенной. Требуется установить условную корректность в смысле Тихонова некорректно поставленных задач [9-12].

Обратные задачи приводят к операторным уравнениям 1-рода. Например, некоторые обратные задачи для гиперболических уравнений могут быть редуцированы к исследованию интегральных уравнеий типа Вольтерра 1-рода. Это позволяет для одномерных обратных задач получить интегральное уравнение Вольтерра 2-рода с оператором, обладающими достаточно хорошими свойствами [13-15]. В многомерных обратных задачах информации о решениях уравнений задается лиш на части границы рассматриваемой области и поэтому такую обратную задачу невозможно свести к интегральному уравнению 2-рода. Как известно, причиной является некорректность многих обратных задач для дифференциальных уравнений с частными производными.

Многие обратные задачи для дифференциальных уравнений математической физики тесно связаны с задачами интегральной геометрии [16-20]. Возникает необходимость исследования новых задач интегральной геометрии, когда интегрирование искомой функции (или нескольких функций) производится по семейству сложных многообразий.

Рассмотрим следующую задачу интегральной геометрии

$$v(\xi,\eta,\zeta)=\iint\limits_{S(\xi,\eta,\zeta)} u(x,y,z)dS, \tag{1}$$

где $S(\xi,\eta,\zeta)$ - семейство конусов

$(\zeta-z)^2=(\xi-x)^2+(\eta-y)^2 \ (0\le z\le\zeta)$

или $z=\zeta-\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$ с вершинами в точках (ξ,η,ζ), опирающихся на плоскость $z=0$.

Учитывая, что

$$p=z_x'=\frac{\xi-x}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}},\qquad q=z_y'=\frac{\eta-y}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}},$$

$$\sqrt{1+p^2+q^2}=\sqrt{2}$$

поверхностный интеграл (1) можно свести к повторному интегралу

$$v(\xi,\eta,\zeta)=\iint\limits_{D(\xi,\eta,\zeta)} u\left(x,y,\zeta-\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}\right)dxdy.$$

Вводим полярную систему координат $\xi=x+rcos\varphi,\eta=y+rsin\varphi$, тогда имеем

$$v(\xi,\eta,\zeta)=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\zeta} u(\xi-rcos\varphi,\eta-rsin\varphi,\zeta-r)rdrd\varphi.$$

Применяем преобразование Фурье к обеим частям уравнения по переменным ξ,η:

$$\tilde{v}(\lambda,\mu,\zeta)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} v(\xi,\eta,\zeta)\,e^{i(\lambda\xi+\mu\eta)}\,d\xi d\eta=$$

$$=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\zeta} rdrd\varphi\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} u(\xi-rcos\varphi,\eta-rsin\varphi,\zeta-r)\,e^{i(\lambda\xi+\mu\eta)}\,d\xi d\eta.$$

Далее вводя замену переменных $\xi - r\cos\varphi = t$, $\eta - r\sin\varphi = \tau$ последнее уравнение преобразуем к виду

$$\tilde{v}(\lambda,\mu,\zeta) = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\zeta} re^{ir(\lambda\cos\varphi+\mu\sin\varphi)}\tilde{u}(\lambda,\mu,\zeta-r)drd\varphi,$$

где $\tilde{u}(\lambda,\mu,z)$ - преобразование Фурье функции $u(x,y,z)$ по переменным x,y. Меняя порядок интегрирования получаем интегральное уравнение Вольтерра первого рода относительно функции $\tilde{u}(\lambda,\mu,z)$:

$$\tilde{v}(\lambda,\mu,\zeta) = \int_0^{\zeta} rK(\lambda,\mu,r)\,\tilde{u}(\lambda,\mu,\zeta-r)dr, \tag{2}$$

где

$$K(\lambda,\mu,r) = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} e^{ir(\lambda\cos\varphi+\mu\sin\varphi)}d\varphi.$$

Замена $\zeta - r = \rho$ позволяет получить уравнение

$$\tilde{v}(\lambda,\mu,\zeta) = \int_0^{\zeta}(\zeta-r)K(\lambda,\mu,\zeta-\rho)\,\tilde{u}(\lambda,\mu,\rho)d\rho.$$

Дифференцируя это уравнение по ζ получаем

$$\tilde{v}'_{\zeta}(\lambda,\mu,\zeta) = \int_0^{\zeta}[K(\lambda,\mu,\zeta-\rho)+(\zeta-r)K'_{\zeta}(\lambda,\mu,\zeta-\rho)]\,\tilde{u}(\lambda,\mu,\rho)d\rho.$$

Продифференцировав еще раз по ζ приходим к уравнению

$$\tilde{v}''_{\zeta\zeta}(\lambda,\mu,\zeta) = K(\lambda,\mu,0)\tilde{u}(\lambda,\mu,\zeta) +$$
$$+\int_0^{\zeta}\left[2K'_{\zeta}(\lambda,\mu,\zeta-\rho)+(\zeta-r)K''_{\zeta\zeta}(\lambda,\mu,\zeta-\rho)\right]\tilde{u}(\lambda,\mu,\rho)d\rho. \tag{3}$$

Вычислим интеграл $K(\lambda,\mu,r) = 2\sqrt{2}\pi[J_0(\lambda r)+J_0(\mu r)]$ [21, формула (3.715)] где $J_0(x)$ - функция Бесселя первого рода нулевого порядка. Как известно, $J_0(0) = 1$, поэтому $K(\lambda,\mu,0) = 4\sqrt{2}\pi$. Следовательно, уравнение (3) можно записать в виде интегрального уравнения Вольтерра второго рода [22]

$$\tilde{v}''_{\zeta\zeta}(\lambda,\mu,\zeta) = 4\sqrt{2}\pi\tilde{u}(\lambda,\mu,\zeta) + \int_0^{\zeta}\Psi(\lambda,\mu,\zeta-\rho)\,\tilde{u}(\lambda,\mu,\rho)d\rho,$$

$$\Psi(\lambda,\mu,\zeta-\rho) = 4\sqrt{2}\pi\left[\lambda J'_0(\lambda(\zeta-\rho))+\mu J'_0(\mu(\zeta-\rho))\right] +$$
$$+2\sqrt{2}\pi(\zeta-\rho)\left[\lambda^2 J''_0(\lambda(\zeta-\rho))+\mu^2 J''_0(\mu(\zeta-\rho))\right].$$

Таким образом доказана

Теорема 1. Если функция $v(\xi,\eta,\zeta)$ имеет финитную непрерывность по переменным ξ,η и дважды дифференцируема по ζ, то решение $u(x,y,z)$ рассматриваемой задачи интегральной геометрии единственно в классе финитных непрерывных функций.

Рассмотрим более общую задачу интегральной геометрии

$$v(\vec{\xi},\eta) = \int_{S(\vec{\xi},\eta)} u(\vec{x},y)dS, \tag{4}$$

где $\vec{\xi} = (\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)$, $\vec{x} = (x_1,x_2,\dots,x_n)$, $S(\vec{\xi},\eta)$ – семейство поверхностей

$$|\eta - y| = |\vec{x} - \vec{\xi}| \ \ (0 \le y \le \eta) \ \text{ или } \ y = \eta - \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \xi_i)^2}.$$

Учитывая, что

$$p_i = y'_{x_i} = -(x_i - \xi_i) \Big/ \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \xi_i)^2} \quad (i = \overline{1,n}), \quad \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n} p_i^2} = \sqrt{2}$$

преобразуем поверхностный интеграл (4) к виду

$$v(\vec{\xi},\eta) = \sqrt{2} \int\limits_{D(\vec{\xi},\eta)} u(\vec{x}, \eta - |\vec{x} - \vec{\xi}|) d\vec{x},$$

где $D(\vec{\xi},\eta)$ – проекция поверхности $S(\vec{\xi},\eta)$ на гиперплоскость $y = 0$.

Вводим замену переменных $x_i = \xi_i - r cos\varphi_i$ $(i = \overline{1,n})$, где $cos\varphi_i$ $(i = \overline{1,n})$ – направляющие косинусы нормального вектора $\vec{\psi}$ к заданной поверхности семейства $S(\vec{\xi},\eta)$; $r = |\vec{\psi}|$. Учитывая соотношение

$$\sum_{i=1}^{n} cos^2\varphi_i = 1$$

получим

$$x_i = \xi_i - r cos\varphi_i \ \ (i = \overline{1,n-1}), \qquad x_n = \xi_n - r\sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n-1} cos^2\varphi_i}.$$

Якобиан такого преобразования (приложения 1) $R(r,\vec{\varphi}) = r^{n-1}S(\vec{\varphi})$, где

$$\vec{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}), \ \ S(\vec{\varphi}) = \prod_{i=1}^{n-1} sin\varphi_i \Big/ \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n-1} cos^2\varphi_i}.$$

Тогда

$$v(\vec{\xi},\eta) = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\eta} u(\vec{\xi} - r\vec{\psi}, \eta - r) R(r,\vec{\varphi})\, dr d\vec{\varphi}.$$

К обеим частям уравнения применяем преобразование Фурье по вектору $\vec{\xi}$:

$$\tilde{v}(\vec{\lambda},\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\vec{\lambda},\vec{\xi})} d\vec{\xi} \int_0^{2\pi}\int_0^{\eta} \sqrt{2}\, u(\vec{\xi} - r\vec{\psi}, \eta - r) R(r,\vec{\varphi}) dr d\vec{\varphi}.$$

Теперь изменяем порядок интегрирования

$$\tilde{v}(\vec{\lambda},\eta) = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\eta} R(r,\vec{\varphi}) dr d\vec{\varphi} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\vec{\xi} - r\vec{\psi}, \eta - r)\, e^{i(\vec{\lambda},\vec{\xi})} d\vec{\xi}.$$

С помощью замены $\vec{\xi} - r\vec{\psi} = \vec{t}$ $(\vec{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n))$ имеем

$$\tilde{v}(\vec{\lambda},\eta) = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\eta} R(r,\vec{\varphi}) e^{i(\vec{\lambda},r\vec{\psi})} dr d\vec{\varphi} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\vec{t}, \eta - r)\, e^{i(\vec{\lambda},\vec{t})} d\vec{t},$$

отсюда

$$\tilde{v}(\vec{\lambda},\eta)=\int_0^{\eta} r^{n-1}\left(\sqrt{2}\int_0^{2\pi} S(\vec{\varphi})e^{ir(\vec{\lambda},\vec{\psi})}\,d\vec{\varphi}\right)\tilde{u}(\vec{\lambda},\eta-r)dr,$$

где $\tilde{u}$ - преобразование Фурье функции u по вектору $\vec{\xi}$.
Замена переменной $\eta-r=\rho$ позволяет написать последнее уравнение в виде

$$\tilde{v}(\vec{\lambda},\eta)=\int_0^{\eta}(\eta-\rho)^{n-1}T(\vec{\lambda},\eta-\rho)\tilde{u}(\vec{\lambda},\rho)d\rho,$$

или

$$\tilde{v}(\vec{\lambda},\eta)=\int_0^{\eta}K(\vec{\lambda},\eta-\rho)\tilde{u}(\vec{\lambda},\rho)d\rho, \tag{5}$$

где

$$K(\vec{\lambda},\eta-\rho)=(\eta-\rho)^{n-1}T(\vec{\lambda},\eta-\rho),\ \ T(\vec{\lambda},\eta-\rho)=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}S(\vec{\varphi})e^{i(\eta-\rho)(\vec{\lambda},\vec{\psi})}\,d\vec{\varphi}.$$

Дифференцируем по η семейство интегральных уравнений Вольтерра первого рода

$$\tilde{v}'_{\eta}(\vec{\lambda},\eta)=K(\vec{\lambda},0)\tilde{u}(\vec{\lambda},\eta)+\int_0^{\eta}K_{\eta}^{(1)}(\vec{\lambda},\eta-\rho)\tilde{u}(\vec{\lambda},\rho)d\rho.$$

Учитывая, что $K(\vec{\lambda},0)=0$, продифференцируем последнее уравнение еще раз по η

$$\tilde{v}''_{\eta\eta}(\vec{\lambda},\eta)=K_{\eta}^{(1)}(\vec{\lambda},0)\tilde{u}(\vec{\lambda},\rho)+\int_0^{\eta}K_{\eta}^{(2)}(\vec{\lambda},\eta-\rho)\tilde{u}(\vec{\lambda},\rho)d\rho.$$

Из формул

$$K_{\eta}^{(j)}(\vec{\lambda},\eta-\rho)=\frac{(n-1)!}{(n-j-1)!}(\eta-\rho)^{n-j-1}T(\vec{\lambda},\eta-\rho)+$$
$$+C_j^1\frac{(n-1)!}{(n-j)!}(\eta-\rho)^{n-j}T_{\eta}^{(1)}(\vec{\lambda},\eta-\rho)+$$
$$+C_j^2\frac{(n-1)!}{(n-j+1)!}(\eta-\rho)^{n-j+1}T_{\eta}^{(2)}(\vec{\lambda},\eta-\rho)+\cdots+$$
$$+C_j^{j-1}(n-1)(\eta-\rho)^{n-2}T_{\eta}^{(j-1)}(\vec{\lambda},\eta-\rho)+(\eta-\rho)^{n-1}T_{\eta}^{(j)}(\vec{\lambda},\eta-\rho),$$

где C_j^2 - количество сочетаний,

$$T_{\eta}^{(j)}(\vec{\lambda},\eta-\rho)=i^j\sqrt{2}\int_0^{2\pi}S(\vec{\varphi})e^{i(\eta-\rho)(\vec{\lambda},\vec{\psi})}\,(\vec{\lambda},\vec{\psi})^j d\vec{\varphi},$$

следует, что

$$K_{\eta}^{(1)}(\vec{\lambda},0)=K_{\eta}^{(2)}(\vec{\lambda},0)=\cdots=K_{\eta}^{(n-2)}(\vec{\lambda},0)=0.$$

Из формулы

$$K_{\eta}^{(n-1)}(\vec{\lambda},\eta-\rho)=(n-1)!\,T(\vec{\lambda},\eta-\rho)+$$
$$+C_{n-1}^1(n-1)!\,(\eta-\rho)T_{\eta}^{(1)}(\vec{\lambda},\eta-\rho)+\cdots+(\eta-\rho)^{n-1}T_{\eta}^{(n-1)}(\vec{\lambda},\eta-\rho)$$

получим

$$K_{\eta}^{(n-1)}(\vec{\lambda},0)=(n-1)!\,T(\vec{\lambda},0)=(n-1)!\sqrt{2}\int_0^{2\pi}S(\vec{\varphi})\,d\vec{\varphi}\neq 0,$$

так как можно доказать неравенство (приложение 2)

$$\int_0^{2\pi} S(\vec{\varphi})\,d\vec{\varphi} \geq (2\pi)^{n-1}.$$

Таким образом, дифференцируя интегральное уравнение (5) всего n раз по η получаем интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$\tilde{v}_\eta^{(n)}(\vec{\lambda},\eta) = K_\eta^{(n-1)}(\vec{\lambda},0)\tilde{u}(\vec{\lambda},\rho) + \int_0^\eta K_\eta^{(n)}(\vec{\lambda},\eta-\rho)\tilde{u}(\vec{\lambda},\rho)d\rho,$$

или

$$\frac{\tilde{v}_\eta^{(n)}(\vec{\lambda},\eta)}{K_\eta^{(n-1)}(\vec{\lambda},0)} = \tilde{u}(\vec{\lambda},\rho) + \int_0^\eta \frac{K_\eta^{(n)}(\vec{\lambda},\eta-\rho)}{K_\eta^{(n-1)}(\vec{\lambda},0)}\tilde{u}(\vec{\lambda},\rho)d\rho.$$

Следовательно, справедлива

Теорема 2. Если $v(\vec{\xi},\eta)$ имеет финитную непрерывность по вектору $\vec{\xi}$ и n раз дифференцируема по η, то решение $u(\vec{x},y)$ задачи (4) единственно в классе финитных непрерывных функций.

Приложение 1.

Якобиан

$$R(r,\vec{\varphi}) = \begin{vmatrix} x'_{1_r} & x'_{1_{\varphi_1}} & x'_{1_{\varphi_2}} & \dots & x'_{1_{\varphi_{n-1}}} \\ x'_{2_r} & x'_{2_{\varphi_1}} & x'_{2_{\varphi_2}} & \dots & x'_{2_{\varphi_{n-1}}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x'_{n-1_r} & x'_{n-1_{\varphi_1}} & x'_{n-1_{\varphi_2}} & \dots & x'_{n-1_{\varphi_{n-1}}} \\ x'_{n_r} & x'_{n_{\varphi_1}} & x'_{n_{\varphi_2}} & \dots & x'_{n_{\varphi_{n-1}}} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} cos\varphi_1 & -rsin\varphi_1 & 0 & \dots & 0 \\ cos\varphi_2 & 0 & -rsin\varphi_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ cos\varphi_{n-1} & 0 & 0 & \dots & -rsin\varphi_{n-1} \\ cos\varphi_n & \frac{rcos\varphi_1 sin\varphi_1}{cos\varphi_n} & \frac{rcos\varphi_2 sin\varphi_2}{cos\varphi_n} & \dots & \frac{rcos\varphi_{n-1} sin\varphi_{n-1}}{cos\varphi_n} \end{vmatrix} =$$

$$= cos\varphi_1 \begin{vmatrix} 0 & -rsin\varphi_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -rsin\varphi_{n-1} \\ \frac{rcos\varphi_1 sin\varphi_1}{cos\varphi_n} & \frac{rcos\varphi_2 sin\varphi_2}{cos\varphi_n} & \dots & \frac{rcos\varphi_{n-1} sin\varphi_{n-1}}{cos\varphi_n} \end{vmatrix} -$$

$$-cos\varphi_2 \begin{vmatrix} -rsin\varphi_1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -rsin\varphi_{n-1} \\ \frac{rcos\varphi_1 sin\varphi_1}{cos\varphi_n} & \frac{rcos\varphi_2 sin\varphi_2}{cos\varphi_n} & \dots & \frac{rcos\varphi_{n-1} sin\varphi_{n-1}}{cos\varphi_n} \end{vmatrix} + \dots +$$

$$+(-1)^{n-2}cos\varphi_{n-1} \begin{vmatrix} -rsin\varphi_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -rsin\varphi_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{rcos\varphi_1 sin\varphi_1}{cos\varphi_n} & \frac{rcos\varphi_2 sin\varphi_2}{cos\varphi_n} & \dots & \frac{rcos\varphi_{n-1} sin\varphi_{n-1}}{cos\varphi_n} \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{n-1}cos\varphi_n \begin{vmatrix} -rsin\varphi_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -rsin\varphi_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -rsin\varphi_{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{n-2}\frac{rcos^2\varphi_1 sin\varphi_1}{cos\varphi_n}\begin{vmatrix} -rsin\varphi_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -rsin\varphi_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -rsin\varphi_{n-1}\end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{n-2}\frac{rcos^2\varphi_2 sin\varphi_2}{cos\varphi_n}\begin{vmatrix} -rsin\varphi_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -rsin\varphi_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -rsin\varphi_{n-1}\end{vmatrix} + \dots +$$

$$+(-1)^{n-2}\frac{rcos^2\varphi_{n-1} sin\varphi_{n-1}}{cos\varphi_n}\begin{vmatrix} -rsin\varphi_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -rsin\varphi_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -rsin\varphi_{n-2}\end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{n-1}cos\varphi_n\begin{vmatrix} -rsin\varphi_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -rsin\varphi_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -rsin\varphi_{n-1}\end{vmatrix} =$$

$$= \frac{r^{n-1}sin\varphi_1 sin\varphi_2 \dots sin\varphi_{n-1}}{cos\varphi_n}[cos^2\varphi_1 + cos^2\varphi_2 + \dots + cos^2\varphi_{n-1}] +$$

$$+r^{n-1}cos\varphi_n sin\varphi_1 sin\varphi_2 \dots sin\varphi_{n-1} =$$

$$= \frac{r^{n-1}sin\varphi_1 sin\varphi_2 \dots sin\varphi_{n-1}}{cos\varphi_n}\sum_{k=1}^{n} cos^2\varphi_k = \frac{r^{n-1}}{cos\varphi_n}\prod_{i=1}^{n-1} sin\varphi_i.$$

Приложение 2.

При $n = 2$

$$\int_0^{2\pi} \frac{sin\varphi_1}{\sqrt{1 - cos^2\varphi_1}} d\varphi_1 = 2\pi.$$

При $n = 3$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{sin\varphi_1 sin\varphi_2}{\sqrt{1 - cos^2\varphi_1 - cos^2\varphi_2}} d\varphi_1 d\varphi_2 \geq$$

$$\geq \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{sin\varphi_1 sin\varphi_2}{\sqrt{1 - cos^2\varphi_1 - cos^2\varphi_2 + cos^2\varphi_1 cos^2\varphi_2}} d\varphi_1 d\varphi_2 =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{sin\varphi_1 sin\varphi_2}{\sqrt{(1 - cos^2\varphi_1)(1 - cos^2\varphi_2)}} d\varphi_1 d\varphi_2 = (2\pi)^2.$$

При $n = 4$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{sin\varphi_1 sin\varphi_2 sin\varphi_3}{\sqrt{1 - cos^2\varphi_1 - cos^2\varphi_2 - cos^2\varphi_3}} d\varphi_1 d\varphi_2\, d\varphi_3 \geq$$

$$\geq \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{sin\varphi_1 sin\varphi_2 sin\varphi_3 d\varphi_1 d\varphi_2 d\varphi_3}{\sqrt{1 - cos^2\varphi_1 - cos^2\varphi_2 - cos^2\varphi_3 + cos^2\varphi_1(cos^2\varphi_2 + cos^2\varphi_3) + I}} =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{sin\varphi_1 sin\varphi_2 sin\varphi_3}{\sqrt{(1 - cos^2\varphi_1)(1 - cos^2\varphi_2)(1 - cos^2\varphi_3)}} d\varphi_1 d\varphi_2\, d\varphi_3 = (2\pi)^3,$$

так как

$$cos^2\varphi_1(cos^2\varphi_2 + cos^2\varphi_3) + I \geq 0,$$

где

$$I = cos^2\varphi_1 cos^2\varphi_2 cos^2\varphi_3.$$

По методу математической индукции полагаем при $n = k$

$$\int_0^{2\pi}\dots\int_0^{2\pi}\frac{sin\varphi_1\dots sin\varphi_{k-2}sin\varphi_{k-1}}{\sqrt{1-cos^2\varphi_1-\dots-cos^2\varphi_{k-2}-cos^2\varphi_{k-1}}}d\varphi_1\dots d\varphi_{k-2}d\varphi_{k-1}\geq$$
$$\geq(2\pi)^{k-1}.$$

Докажем при $n=k+1$

$$\int_0^{2\pi}\dots\int_0^{2\pi}\frac{sin\varphi_1\dots sin\varphi_{k-1}sin\varphi_k d\varphi_1\dots d\varphi_{k-1}d\varphi_k}{\sqrt{1-cos^2\varphi_1-\dots-cos^2\varphi_{k-1}-cos^2\varphi_k}}\geq$$
$$\geq\int_0^{2\pi}\dots\int_0^{2\pi}\frac{sin\varphi_1\dots sin\varphi_{k-1}sin\varphi_k d\varphi_1\dots d\varphi_{k-1}d\varphi_k}{\sqrt{1-cos^2\varphi_1-\dots-cos^2\varphi_{k-1}-cos^2\varphi_k+U}}=$$
$$=\int_0^{2\pi}\dots\int_0^{2\pi}\frac{sin\varphi_1\dots sin\varphi_{k-1}sin\varphi_k d\varphi_1\dots d\varphi_{k-1}d\varphi_k}{\sqrt{1-cos^2\varphi_1-\dots-cos^2\varphi_{k-1}-cos^2\varphi_k+Ucos^2\varphi_k}}=$$
$$=\int_0^{2\pi}\dots\int_0^{2\pi}\frac{sin\varphi_1\dots sin\varphi_{k-1}sin\varphi_k d\varphi_1\dots d\varphi_{k-1}d\varphi_k}{\sqrt{1-cos^2\varphi_1-\dots-cos^2\varphi_{k-1}-cos^2\varphi_k(1-U)}}=$$
$$=\int_0^{2\pi}\dots\int_0^{2\pi}\frac{sin\varphi_1\dots sin\varphi_{k-1}sin\varphi_k d\varphi_1\dots d\varphi_{k-1}d\varphi_k}{\sqrt{(1-cos^2\varphi_1-\dots-cos^2\varphi_{k-1})(1-cos^2\varphi_k)}}\geq$$
$$\geq(2\pi)^{k-1}\int_0^{2\pi}d\varphi_k=(2\pi)^k,$$

где $U=cos^2\varphi_1+\dots+cos^2\varphi_{k-1}$. Следовательно, для любого натурального $n\geq 2$ справедливо неравенство

$$\int_0^{2\pi}S(\vec{\varphi})\,d\vec{\varphi}\geq(2\pi)^{n-1}.$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. 287 с. Москва, 1980.

[2] Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. 288 с. Москва, 1986.

[3] Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. 206 с. Москва, 1978.

[4] Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. 92 с. Новоси-бирск, 1962.

[5] Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Васильев В.Г. Многомерные обратные задачи для дифференци-альных уравнений. Новосибирск, 1969, 67 с.

[6] Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. Москва: Наука, 1984, 264 с.

[7] Аниконов Ю.Е. Некоторые методы исследования многомерных обратных задач для дифференци-альных уравнений. Новосибирск: Наука, 1978, 120 с.

[8] Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное издатель-ство, 2008, 460 с.

[9] Темирбулатов С.И. Обратные задачи для эллиптических уравнений. Алма-Ата, 1975, 72 с..

[10] Бидайбеков Е.Ы. О единственности решения обратных задач для некоторых квазилинейных уравнений гиперболического типа. Канд. дисс. Новосибирск, 1975.

[11] Елубаев С., Турсынбеков О.Ш. Теорема единственности одной обратной задачи для гиперболи-ческого уравнения третьего порядка. Известия АН КазССР, сер. физ.-мат., 1975, №5, с. 22-28.

[12] Баканов Г.Б. Методы решения конечно-разностных обратных задач теории распространения волн. 130 с. Кызылорда, 2001.

[13] Лаврентьев М.М., Резницкая К.Г., Яхно В.Г. Обдномерные обратные задачи математической физики. Новосибирск: Наука, 1982, 88 с.

[14] Бухгейм А.Л. Уравнения Вольтерра и обратные задачи. 207 с. Новосибирск, 1983.

[15] Елубаев С.Е., Ділман Т.Б. Гиперболалық және параболалық теңдеулер үшін кейбір кері есептер. 2-басылымы, Қызылорда: Принт, 2012, 236 б.

[16] Лаврентьев М.М., Бухгейм А.Л. Об одном классе задач интегральной геометрии. Доклады АН СССР, 1973, т. 211, №1, с. 38-39.

[17] Мухометов Р.Г. Теорема единственности и устойчивости задачи восстановления двумерной римановой и некоторого класса плоских задач интегральной геометрии. Канд. дисс. Новосибирск, 1976.

[18] Амиров А.Х. Об одной задаче интегральной геометрии. В кн.: Условно-корректные задачи и проблемы геофизики, с. 4-10. Новосибирск:ВЦ СО АН СССР, 1979.

[19] Алексеев А.А. Об одной задаче интегральной геометрии в трехмерном пространстве. В кн.: Единственность, устойчивость и методы решения некорректных задач математической физики, с. 3-15. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1984.

[20] Дильманов Т.Б. Единственность и устойчивость решений задач интегральной геометрии для специальных семейств кривых. Канд. дисс. Новосибирск: НГУ, 1986.

[21] Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Москва: Наука, 1971, 1108 с.

[22] Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. Москва: Физматгиз, 1959, 232 с.

REFERENCES

[1] Lavrent'ev M.M., Romanov V.G., Shishatskij S.P. Nekorrektnye zadachi matematicheskoj fiziki i analiza. 287 s. Moskva, 1980.

[2] Tihonov A.N., Arsenin V.Ja. Metody reshenija nekorrektnyh zadach. 288 s. Moskva, 1986.

[3] Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. Teorija linejnyh nekorrektnyh zadach i ee prilozhenija. 206 s. Moskva, 1978.

[4] Lavrent'ev M.M. O nekotoryh nekorrektnyh zadachah matematicheskoj fiziki. 92 s. Novosi-birsk, 1962.

[5] Lavrent'ev M.M., Romanov V.G., Vasil'ev V.G. Mnogomernye obratnye zadachi dlja differenci-al'nyh uravnenij. Novosibirsk, 1969, 67 s.

[6] Romanov V.G. Obratnye zadachi matematicheskoj fiziki. Moskva: Nauka, 1984, 264 s.

[7] Anikonov Ju.E. Nekotorye metody issledovanija mnogomernyh obratnyh zadach dlja differenci-al'nyh uravnenij. Novosibirsk: Nauka, 1978, 120 s.

[8] Kabanihin S.I. Obratnye i nekorrektnye zadachi. Novosibirsk: Sibirskoe nauchnoe izdatel'-stvo, 2008, 460 s.

[9] Temirbulatov S.I. Obratnye zadachi dlja jellipticheskih uravnenij. Alma-Ata, 1975, 72 s..

[10] Bidajbekov E.Y. O edinstvennosti reshenija obratnyh zadach dlja nekotoryh kvazilinejnyh uravnenij giperbolicheskogo tipa. Kand. diss. Novosibirsk, 1975.

[11] Elubaev S., Tursynbekov O.Sh. Teorema edinstvennosti odnoj obratnoj zadachi dlja giperboli-cheskogo uravnenija tret'ego porjadka. Izvestija AN KazSSR, ser. fiz.-mat., 1975, №5, s. 22-28.

[12] Bakanov G.B. Metody reshenija konechno-raznostnyh obratnyh zadach teorii rasprostranenija voln. 130 s. Kyzylorda, 2001.

[13] Lavrent'ev M.M., Reznickaja K.G., Jahno V.G. Obdnomernye obratnye zadachi matematicheskoj fiziki. Novosibirsk: Nauka, 1982, 88 s.

[14] Buhgejm A.L. Uravnenija Vol'terra i obratnye zadachi. 207 s. Novosibirsk, 1983.

[15] Elubaev S.E., Dilman T.B. Giperbolalyҡ zhəne parabolalyҡ teңdeuler үshin kejbir keri esepter. 2-basylymy, Қyzylorda: Print, 2012, 236 b.

[16] Lavrent'ev M.M., Buhgejm A.L. Ob odnom klasse zadach integral'noj geometrii. Doklady AN SSSR, 1973, t. 211, №1, s. 38-39.

[17] Muhometov R.G. Teorema edinstvennosti i ustojchivosti zadachi vosstanovlenija dvumernoj rimanovoj i nekotorogo klassa ploskih zadach integral'noj geometrii. Kand. diss. Novosibirsk, 1976.

[18] Amirov A.H. Ob odnoj zadache integral'noj geometrii. V kn.: Uslovno-korrektnye zadachi i problemy geofiziki, s. 4-10. Novosibirsk:VC SO AN SSSR, 1979.

[19] Alekseev A.A. Ob odnoj zadache integral'noj geometrii v trehmernom prostranstve. V kn.: Edinstvennost', ustojchivost' i metody reshenija nekorrektnyh zadach matematicheskoj fiziki, s. 3-15. Novosibirsk: VC SO AN SSSR, 1984.

[20] Dil'manov T.B. Edinstvennost' i ustojchivost' reshenij zadach integral'noj geometrii dlja special'nyh semejstv krivyh. Kand. diss. Novosibirsk: NGU, 1986.

[21] Gradshtejn I.S., Ryzhik I.M. Tablicy integralov, summ, rjadov i proizvedenij. Moskva: Nauka, 1971, 1108 s.

[22] Mihlin S.G. Lekcii po linejnym integral'nym uravnenijam. Moskva: Fizmatgiz, 1959, 232 s.

УДК 517.946

Көп өлшемді кеңістіктегі бір интегралдық геометрия есебі туралы

Ділман Т.Б., Серікбол М.С.
E-mail: DilmanTB@mail.ru
Қорқыт Ата атындағы Қызылорда мемлекеттік университеті. Қызылорда қаласы

Тірек сөздер: интегралдық геометрия, қисықтар үйірі, интегралдық теңдеу, шешім, жалғыздық.

Түйін: Бұл мақалада интегралдық геометрия есептерінің келесі класы қарастырылады: белгілі бір қисықтар үйірі бойынша алынған интегралдар арқылы интеграл астындағы функция ізделінеді. Бұл есептер қолданыстағы көптеген есептермен тығыз байланысты. Сейсмикалық барлаудың нәтижелерін түсіндіру мәселесінде Жердің ішкі құрылымын зерттеу үшін оның бетінде бетінде жарылыстар жасалынады. Әрбір жарылыс кезінде арнаулы құралдармен Жер қыртысында пайда болған тербелістер өлшенеді. Зерттеу мақсаты – құралдар көрсеткіштері бойынша сейсмикалық толқындардың таралу заңдылықтарымен байланысты физикалық параметрлерді анықтау. Құрал көрсеткіштерінің негізгі функционалы ретінде сейсмикалық толқындардың келу уақыттары алынады. Сейсмикалық барлаудың нәтижелерін түсіндірудің сызықтандырылған есебі интегралдық геометрия есебі екені белгілі. Рентгендік түсірілімдерді түсіндіріп беру мәселесі қарастырылған интегралдық геометрия есептеріне келтіреді. Пленкадағы қоюлану рентгендік сәуленің қайнар көзінен пленкадағы нүктеге дейінгі алынған жұтылу интегралымен функционалды байланыста болады. Сонымен кеңістіктегі жұтылу коэффициентін анықтау мәселесі келесі интегралдық геометрия есебіне келтіріледі: сәулелер үйірі бойынша алынған интегралдар арқылы интеграл астындағы функцияны табу керек. Мақалада көп өлшемді кеңістіктегі қисықтар үйірі үшін интегралдық геометрия есебі зерттеліп, шешімнің жалғыздығы туралы теорема дәлелденеді.

Сведения об авторах

Ділман Төребай Бимағанбетұлы – доцент кафедры математики и прикладной механики Кызылор-динского государственного университета имени Коркыт Ата, кандидат физико-математических наук,

Серікбол Мақпал Серікболқызы – преподаватель кафедры математики и прикладной механики Кы-зылординского государственного университета имени Коркыт Ата, магистр математики.

Publication Ethics and Publication Malpractice in the journals of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan

For information on Ethics in publishing and Ethical guidelines for journal publication see http://www.elsevier.com/publishingethics and http://www.elsevier.com/journal-authors/ethics.

Submission of an article to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan implies that the described work has not been published previously (except in the form of an abstract or as part of a published lecture or academic thesis or as an electronic preprint, see http://www.elsevier.com/postingpolicy), that it is not under consideration for publication elsewhere, that its publication is approved by all authors and tacitly or explicitly by the responsible authorities where the work was carried out, and that, if accepted, it will not be published elsewhere in the same form, in English or in any other language, including electronically without the written consent of the copyright-holder. In particular, translations into English of papers already published in another language are not accepted.

No other forms of scientific misconduct are allowed, such as plagiarism, falsification, fraudulent data, incorrect interpretation of other works, incorrect citations, etc. The National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan follows the Code of Conduct of the Committee on Publication Ethics (COPE), and follows the COPE Flowcharts for Resolving Cases of Suspected Misconduct (http://publicationethics.org/files/u2/New_Code.pdf). To verify originality, your article may be checked by the Cross Check originality detection service http://www.elsevier.com/editors/plagdetect.

The authors are obliged to participate in peer review process and be ready to provide corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. All authors of a paper should have significantly contributed to the research.

The reviewers should provide objective judgments and should point out relevant published works which are not yet cited. Reviewed articles should be treated confidentially. The reviewers will be chosen in such a way that there is no conflict of interests with respect to the research, the authors and/or the research funders.

The editors have complete responsibility and authority to reject or accept a paper, and they will only accept a paper when reasonably certain. They will preserve anonymity of reviewers and promote publication of corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. The acceptance of a paper automatically implies the copyright transfer to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.

The Editorial Board of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan will monitor and safeguard publishing ethics.

Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайте:

www:nauka-nanrk.kz

http://www.physics-mathematics.kz

Редактор *М. С. Ахметова*
Верстка на компьютере *Д. Н. Калкабековой*

Подписано в печать 10.11.2015.
Формат 60х881/8. Бумага офсетная. Печать – ризограф.
10,2 п.л. Тираж 300. Заказ 6.

Национальная академия наук РК
050010, Алматы, ул. Шевченко, 28, т. 272-13-18, 272-13-19