ISSN 1991-346X

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ

Х А Б А Р Л А Р Ы

ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

N E W S

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА СЕРИЯСЫ

♦

СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

♦

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

6 (304)

ҚАРАША – ЖЕЛТОҚСАН 2015 ж.
НОЯБРЬ – ДЕКАБРЬ 2015 г.
NOVEMBER – DECEMBER 2015

1963 ЖЫЛДЫҢ ҚАҢТАР АЙЫНАН ШЫҒА БАСТАҒАН
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1963 ГОДА
PUBLISHED SINCE JANUARY 1963

ЖЫЛЫНА 6 РЕТ ШЫҒАДЫ
ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД
PUBLISHED 6 TIMES A YEAR

АЛМАТЫ, ҚР ҰҒА
АЛМАТЫ, НАН РК
ALMATY, NAS RK

«Известия НАН РК. Серия физико-математическая». ISSN 1991-346X
Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы)
Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации и архивов Министерства культуры и информации Республики Казахстан **№5543-Ж**, выданное 01.06.2006 г.

Периодичность: 6 раз в год.
Тираж: 300 экземпляров.

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, ком. 219, 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,
www:nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75.

News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physical-mathematical series.
ISSN 1991-346X
Owner: RPA "National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan" (Almaty)
The certificate of registration of a periodic printed publication in the Committee of information and archives of the Ministry of culture and information of the Republic of Kazakhstan N 5543-Ж, issued 01.06.2006

Periodicity: 6 times a year
Circulation: 300 copies

Editorial address: 28, Shevchenko str., of. 219, 220, Almaty, 050010, tel. 272-13-19, 272-13-18,
www:nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

Address of printing house: ST "Aruna", 75, Muratbayev str, Almaty

N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 6, Number 304 (2015), 47 – 56

TASK ABOUT ACTION OF MOBILE PERIODIC LOAD ON THE MULTILAYERED COVER IN THE ELASTIC HALF-SPACE

L. A. Alexeyeva, V. N. Ukrainets, S. R. Girnis

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling of MES RK, Almaty,
Pavlodar state university, Kazakhstan.
E-mail: alexeeva@math.kz, vitnikukr@mail.ru, girnis@mail.ru

Keywords: elastic half-space, multilayered cover, transport loading, deflected mode.
Abstract. The task is analytically solved about action of moving periodic load on supported by multi-layer circular cylindrical shell cavity, located in elastic half-space. Motion of the layers of the shell and elastic half-space are described by dynamic equations to theory of elasticity in moving coordinate system. Analytical decision of the problem of the determination component tense-deformed conditions of the array and the shell is received by subsonic velocity of the load.

УДК 539.3

ЗАДАЧА О ДЕЙСТВИИ ПОДВИЖНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ НА МНОГОСЛОЙНУЮ ОБОЛОЧКУ В УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Л. А. Алексеева, В. Н. Украинец, С. Р. Гирнис

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан,
Петропавловский государственный университет им. С. Торайгырова, Казахстан

Ключевые слова: упругое полупространство, многослойная оболочка, транспортная нагрузка, напряженно-деформированное состояние.
Аннотоация. Аналитически решена задача о действии движущейся периодической нагрузки на подкрепленную многослойной круговой цилиндрической оболочкой полость, расположенную в упругом полупространстве. Движение слоев оболочки и упругого полупространства описывается динамическими уравнениями теории упругости в подвижной системе координат. Определены компоненты перемещений и напряжений в массиве и оболочке при дозвуковых скоростях нагрузки, когда скорость движения меньше скорости распространения упругих волн в среде и слоях оболочки.

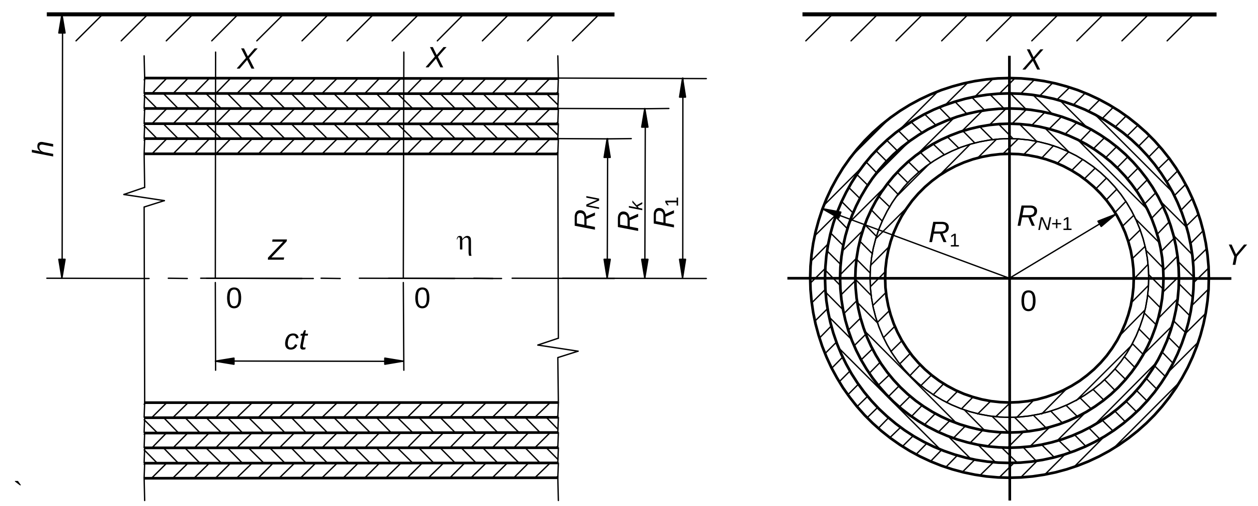
Изучение динамики тоннелей и трубопроводов при действии движущихся нагрузок методами математического моделирования приводит к краевым задачам для упругих сред с цилиндрическими полостями, подкрепленными упругими однослойными и многослойными оболочками. Для подземного сооружения глубокого заложения (глубина более пяти характерных поперечных размеров) обычно влиянием дневной поверхности пренебрегают. Модельными для таких сооружений являются внешние краевые задачи механики упругих сред с цилиндрическими полостями, неподкрепленными или подкрепленными упругими цилиндрическими оболочками, по которым движутся нагрузки, форма которых не меняется с течением времени (*транспортные нагрузки*), что характерно для транспортных задач.

Впервые задача о действии движущейся с постоянной дозвуковой скоростью осесимметричной нормальной нагрузки на тонкостенную цилиндрическую оболочку в упругой среде рассмотрена в работе В.И. Пожуева [1]. Аналогичные исследования напряженно-деформированного состояния двухслойной оболочки в упругом массиве при действии транспортных нагрузок проведены авторами с использованием моделей теории упругости и тонких оболочек [2-4]. Было показано существование критических скоростей движения нагрузок, при превышении которых в тоннелях позади бегущей нагрузки возникают свободные незатухающие колебания [3, 4]. Последнее ограничивает диапазон возможных скоростей движения в тоннелях и трубопроводах, определение которого необходимо для обеспечения прочности и надежности подобных сооружений при эксплуатации.

Для подземных сооружений мелкого заложения (глубина меньше вышеупомянутой) следует учитывать влияние дневной поверхности. Движение дозвуковой периодической нагрузки вдоль неподкрепленной цилиндрической полости и подкрепленной упругой круговой цилиндрической оболочкой в упругом полупространстве изучалось авторами на основе методов неполного разделения переменных и переразложения цилиндрических и плоских волн. Были получены аналитические решения соответствующих краевых задач, на основе которых проведены численные эксперименты и их анализ для разного типа нагрузок и скоростей их движения [4-7].

В настоящей работе эта теория обобщена на многослойные цилиндрические оболочки в упругом полупространстве.

1. Постановка задачи. Уравнения движения. Контактные условия. Рассмотрим бесконечно длинную круговую цилиндрическую многослойную оболочку, состоящую из N концентрических упругих слоёв с разными физико-механическими и геометрическими характеристиками, расположенную в линейно-упругом, однородном и изотропном упругом полупространстве (массиве). Для решения задачи используем две системы координат: неподвижную декартову (x, y, z) и цилиндрическую (r, θ, z) (рисунок).



Многослойная оболочка в упругом полупространстве

Контакт между оболочкой и окружающей ее упругой средой (массивом) будем полагать либо жестким, либо скользящим при двусторонней связи в радиальном направлении. Контакт между слоями оболочки полагаем жёстким.

Пусть на внутреннюю поверхность оболочки действует периодическая по её оси нагрузка интенсивностью P, движущаяся с постоянной скоростью c в направлении оси z, а граница полупространства $x = h$ свободна от нагрузок.

Последовательно пронумеруем слои оболочки, присвоив контактирующему с массивом слою порядковый номер 2.

Физико-механические свойства материала массива и слоев оболочки характеризуются соответственно следующими постоянными: ν_1, μ_1, ρ_1; ν_i, μ_i, ρ_i ($i = 2, 3,\dots, N+1$), где ν_k – коэффициент Пуассона, $\mu_k = E_k / 2(1+\nu_k)$ – модуль сдвига, ρ_k – плотность, E_k – модуль упругости ($k = 1, 2,\dots, N+1$). В дальнейшем индекс $k = 1$ относится к массиву, а $k = 2, 3,\dots, N+1$ – к слоям оболочки.

Определим реакцию массива и оболочки на данную бегущую нагрузку, используя для описания движения массива и слоев оболочки динамические уравнения теории упругости в векторной форме

$$(\lambda_k + \mu_k)\,\mathrm{grad\,div}\,\mathbf{u}_k + \mu_k \nabla^2 \mathbf{u}_k = \rho_k\, \partial^2 \mathbf{u}_k \big/ \partial t^2,\ \ k = 1, 2,\dots, N+1, \tag{1}$$

где $\lambda_k = 2\mu_k \nu_k / (1 - 2\nu_k)$, $\mathbf{u}_k$ – векторы смещений точек массива и слоев оболочки, ∇^2 – оператор Лапласа.

Так как рассматривается установившийся процесс, то картина деформаций стационарна по отношению к движущейся нагрузке. Поэтому удобно перейти к связанной с нагрузкой подвижной системе координат $\eta = z - ct$. Тогда уравнения (1) примут вид

$$\left(M_{pk}^{-2} - M_{sk}^{-2}\right)\mathrm{grad\,div}\,\mathbf{u}_k + M_{sk}^{-2} \nabla^2 \mathbf{u}_k = \partial^2 \mathbf{u}_k \big/ \partial \eta^2,\ k = 1, 2,\dots, N+1, \tag{2}$$

где $M_{pk} = c/c_{pk}$, $M_{sk} = c/c_{sk}$ – числа Маха; $c_{pk} = \sqrt{(\lambda_k + 2\mu_k)/\rho_k}$, $c_{sk} = \sqrt{\mu_k / \rho_k}$ – скорости распространения волн расширения-сжатия и сдвига в массиве и слоях оболочки. Здесь рассмотрим дозвуковой случай: все $M_{pk} < 1$, $M_{sk} < 1$.

Выражая $\mathbf{u}_k$ через потенциалы Ламе [7, 8]

$$\mathbf{u}_k = \mathrm{grad}\,\varphi_{1k} + \mathrm{rot}\left(\varphi_{2k}\mathbf{e}_\eta\right) + \mathrm{rot\,rot}\left(\varphi_{3k}\mathbf{e}_\eta\right),\ \ k = 1, 2,\dots, N+1, \tag{3}$$

система уравнений (2) преобразуются к виду

$$\nabla^2 \varphi_{jk} = M_{jk}^2\, \partial^2 \varphi_{jk} \big/ \partial \eta^2,\ j = 1, 2, 3,\ \ k = 1, 2,\dots, N+1. \tag{4}$$

Здесь $\mathbf{e}_\eta$ – орт оси η, $M_{1k} = M_{pk}$, $M_{2k} = M_{3k} = M_{sk}$.

Используя (3) и закон Гука получаем выражения для компонент векторов $\mathbf{u}_k$ и тензоров напряжений в массиве ($k = 1$) и слоях оболочки ($k = 2, 3,\dots, N+1$) в подвижной цилиндрической системе координат

$$\begin{aligned} u_{rk} &= \frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \varphi_{3k}}{\partial \eta \partial r}, \\ u_{\theta k} &= \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial \theta} - \frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \varphi_{3k}}{\partial \eta \partial \theta}, \\ u_{\eta k} &= \frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial \eta} + m_{sk}^2 \frac{\partial^2 \varphi_{3k}}{\partial \eta^2}; \end{aligned} \tag{5}$$

$$\sigma_{\eta\eta k} = (2\mu_k + \lambda_k M_{pk}^2)\frac{\partial^2 \varphi_{1k}}{\partial \eta^2} + 2\mu_k m_{sk}^2 \frac{\partial^3 \varphi_{3k}}{\partial \eta^3},$$

$$\sigma_{\theta\theta k} = \lambda_k M_{pk}^2 \frac{\partial^2 \varphi_{1k}}{\partial \eta^2} + \frac{2\mu_k}{r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 \varphi_{1k}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 \varphi_{2k}}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial^3 \varphi_{3k}}{\partial \theta^2 \partial \eta} + \frac{\partial^2 \varphi_{3k}}{\partial r \partial \eta}\right),$$

$$\sigma_{rrk}=\lambda_k M_{pk}^2\frac{\partial^2\varphi_{1k}}{\partial\eta^2}+2\mu_k\left(\frac{\partial^2\varphi_{1k}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2\varphi_{2k}}{\partial\theta\partial r}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial\varphi_{2k}}{\partial\theta}+\frac{\partial^3\varphi_{3k}}{\partial r^2\partial\eta}\right),$$

$$\sigma_{r\eta k}=\mu_k\left(2\frac{\partial^2\varphi_{1k}}{\partial\eta\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2\varphi_{2k}}{\partial\theta\partial\eta}+(1+m_{sk}^2)\frac{\partial^3\varphi_{3k}}{\partial\eta^2\partial r}\right), \tag{6}$$

$$\sigma_{\eta\theta k}=\mu_k\left(\frac{2}{r}\frac{\partial^2\varphi_{1k}}{\partial\theta\partial\eta}-\frac{\partial^2\varphi_{2k}}{\partial r\partial\eta}+\frac{(1+m_{sk}^2)}{r}\frac{\partial^3\varphi_{3k}}{\partial\theta\partial\eta^2}\right),$$

$$\sigma_{r\theta k}=2\mu_k\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2\varphi_{1k}}{\partial\theta\partial r}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial\varphi_{1k}}{\partial\theta}-\frac{\partial^2\varphi_{2k}}{\partial r^2}-\frac{m_{sk}^2}{2}\frac{\partial^2\varphi_{2k}}{\partial\eta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial^3\varphi_{3k}}{\partial r\partial\eta\partial\theta}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi_{3k}}{\partial\eta\partial\theta}\right),$$

где $m_{sk}^2=1-M_{sk}^2>0$.

В подвижных декартовых координатах выражения для компонент напряженно-деформированного состояния (НДС) массива имеют вид

$$u_{x1}=\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_{21}}{\partial y}+\frac{\partial^2\varphi_{31}}{\partial x\partial\eta},$$

$$u_{y1}=\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial y}-\frac{\partial\varphi_{21}}{\partial x}+\frac{\partial^2\varphi_{31}}{\partial y\partial\eta}, \tag{7}$$

$$u_{\eta1}=\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial\eta}+m_{s1}^2\frac{\partial^2\varphi_{31}}{\partial\eta^2};$$

$$\sigma_{\eta\eta1}=(2\mu_1+\lambda_1 M_{p1}^2)\frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial\eta^2}+2\mu_1 m_{s1}^2\frac{\partial^3\varphi_{31}}{\partial\eta^3},$$

$$\sigma_{yy1}=\lambda_1 M_{p1}^2\frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial\eta^2}+2\mu_1\left(\frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\varphi_{21}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^3\varphi_{31}}{\partial y^2\partial\eta}\right),$$

$$\sigma_{xx1}=\lambda_1 M_{p1}^2\frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial\eta^2}+2\mu_1\left(\frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_{21}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^3\varphi_{31}}{\partial x^2\partial\eta}\right),$$

$$\sigma_{x\eta1}=\mu_1\left(2\frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial\eta\partial x}+\frac{\partial^2\varphi_{21}}{\partial y\partial\eta}+(1+m_{s1}^2)\frac{\partial^3\varphi_{31}}{\partial\eta^2\partial x}\right), \tag{8}$$

$$\sigma_{\eta y1}=\mu_1\left(2\frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial y\partial\eta}-\frac{\partial^2\varphi_{21}}{\partial x\partial\eta}+(1+m_{s1}^2)\frac{\partial^3\varphi_{31}}{\partial y\partial\eta^2}\right),$$

$$\sigma_{xy1}=2\mu_1\left(\frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2\varphi_{21}}{\partial x^2}-\frac{m_{s1}^2}{2}\frac{\partial^2\varphi_{21}}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^3\varphi_{31}}{\partial x\partial y\partial\eta}\right).$$

Таким образом, для определения компонент НДС массива и слоев оболочки необходимо решить уравнения (4), используя следующие *граничные условия:*

- для свободной от нагрузок поверхности полупространства ($x = h$)

$$\sigma_{xx1} = \sigma_{xy1} = \sigma_{x\eta 1} = 0; \tag{9}$$

- для скользящего контакта оболочки с массивом

при $r = R_1$ $u_{r1} = u_{r2}$, $\sigma_{rr1} = \sigma_{rr2}$, $\sigma_{r\eta 1} = 0$, $\sigma_{r\theta 1} = 0$, $\sigma_{r\eta 2} = 0$, $\sigma_{r\theta 2} = 0$,

при $r = R_k$ $u_{jk} = u_{jk+1}$, $\sigma_{rjk} = \sigma_{rjk+1}$, (10)

при $r = R_{N+1}$ $\sigma_{rjN+1} = P_j(\theta, \eta)$, $j = r, \theta, \eta$, $k = 2, 3, \ldots, N$;

- для жёсткого контакта оболочки с массивом

при $r = R_k$ $u_{jk} = u_{jk+1}$, $\sigma_{rjk} = \sigma_{rjk+1}$, (11)

при $r = R_{N+1}$ $\sigma_{rjN+1} = P_j(\theta, \eta)$, $j = r, \theta, \eta$, $k = 1, 2, \ldots, N$.

Здесь $P_j(\theta,\eta)$ – составляющие интенсивности подвижной нагрузки $P(\theta,\eta)$.

2. Решение задачи при дозвуковой скорости движения периодической нагрузки. Введём ограничение на величину скорости движения нагрузки, принимая её меньше скоростей распространения волн сдвига в массиве и слоях оболочки (дозвуковой случай). Рассмотрим действие на оболочку синусоидальной по η подвижной нагрузки с произвольной зависимостью от угловой координаты

$$P(\theta, \eta) = p(\theta) e^{i\xi\eta}, \quad p(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n e^{in\theta}, \tag{12}$$

$$P_j(\theta, \eta) = p_j(\theta) e^{i\xi\eta}, \quad p_j(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_{nj} e^{in\theta}, \quad j = r, \theta, \eta,$$

где константа ξ определяет период $T = 2\pi/\xi$ действующей нагрузки.

Потенциалы φ_{jk} также будем искать в виде периодических функций по η

$$\varphi_{jk}(r, \theta, \eta) = \Phi_{jk}(r, \theta) e^{i\xi\eta}. \tag{13}$$

Подставляя (13) в (4), получим

$$\nabla_2^2 \Phi_{jk} - m_{jk}^2 \xi^2 \Phi_{jk} = 0, \; j = 1, 2, 3, \; k = 1, 2, \ldots, N+1, \tag{14}$$

где ∇_2^2 – двумерный оператор Лапласа, $m_{jk}^2 = 1 - M_{jk}^2$, $m_{1k} \equiv m_{pk}$,

$$m_{2k} = m_{3k} \equiv m_{sk}.$$

В дозвуковом случае $M_{sk} < 1$ ($m_{2k} = m_{3k} = m_{sk} > 0$, $k = 1, 2, \ldots, N+1$), и решения уравнений (14) можно представить в виде [2]

$$\Phi_{jk} = \Phi_{jk}^{(1)} + \Phi_{jk}^{(2)}, \; j = 1, 2, 3, \; k = 1, 2, \ldots, N+1, \tag{15}$$

где:

- для массива ($k = 1$)

$$\Phi_{j1}^{(1)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj} K_n(k_{j1} r) e^{in\theta}, \; \Phi_{j1}^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} g_j(\xi, \zeta) \exp\left(iy\zeta + (x-h)\sqrt{\zeta^2 + k_{j1}^2}\right) d\zeta; \tag{16}$$

- для слоев оболочки ($k = 2, 3, \ldots, N+1$)

$$\Phi_{jk}^{(1)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj+3(2k-3)} K_n(k_{jk} r) e^{in\theta}, \; \Phi_{jk}^{(2)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj+6(k-1)} I_n(k_{jk} r)\, e^{in\theta}. \tag{17}$$

Здесь $I_n(kr), K_n(kr)$ – соответственно модифицированные функции Бесселя и функции Макдональда, $k_{j1} = |m_{j1}\xi|$, $k_{jk} = |m_{jk}\xi|$; $g_j(\xi,\zeta)$, $a_{n1}, \ldots, a_{n(6N+3)}$ – неизвестные функции и коэффициенты, подлежащие определению.

Как показано в [4], представление потенциалов для полупространства (массива) в форме (15) приводит к их следующим выражениям в декартовой системе координат:

$$\Phi_{j1} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{e^{-xf_j}}{2f_j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj}\Phi_{nj} + g_j(\xi,\zeta) e^{(x-h)f_j} \right] e^{iy\zeta} d\zeta, \tag{18}$$

где $f_j = \sqrt{\zeta^2 + k_{j1}^2}$, $\quad \Phi_{nj} = \left[\left(\zeta + f_j\right)/k_{j1}\right]^n$, $\quad j = 1, 2, 3$.

Воспользуемся граничными условиями (9), с учётом (8), (13), (18). Выделяя коэффициенты при $e^{iy\zeta}$ и приравнивая в силу произвольности y, их нулю, получим систему трёх уравнений, из которой выражаем функции $g_j(\xi,\zeta)$ через неизвестные коэффициенты a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}:

$$g_j(\xi,\zeta) = \frac{1}{\Delta_*} \sum_{l=1}^{3} \Delta_{jl}^* e^{-hf_l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nl}\Phi_{nl}, \tag{19}$$

где $\Delta_* = \left(2\rho_*^2 - \beta^2\right)^2 - 4\rho_*^2 \sqrt{\rho_*^2 - \alpha^2}\sqrt{\rho_*^2 - \beta^2}$,

$$\Delta_{11}^* = \frac{\Delta_*}{2\sqrt{\rho_*^2 - \alpha^2}} - \frac{\left(2\rho_*^2 - \beta^2\right)^2}{\sqrt{\rho_*^2 - \alpha^2}}, \Delta_{12}^* = -2\zeta\left(2\rho_*^2 - \beta^2\right), \Delta_{13}^* = 2\xi\left(2\rho_*^2 - \beta^2\right)\sqrt{\rho_*^2 - \beta^2},$$

$$\Delta_{21}^* = -\frac{M_{s1}^2}{m_{s1}^2}\Delta_{12}^*, \quad \Delta_{22}^* = -\frac{\Delta_{**}}{2\sqrt{\rho_*^2 - \beta^2}}, \quad \Delta_{23}^* = -4\xi\zeta\frac{M_{s1}^2}{m_{s1}^2}\sqrt{\rho_*^2 - \alpha^2}\sqrt{\rho_*^2 - \beta^2},$$

$$\Delta_{31}^* = -\frac{\Delta_{13}^*}{m_{s1}^2\xi^2}, \quad \Delta_{32}^* = \frac{\Delta_{21}^*}{\beta^2}, \quad \Delta_{33}^* = -\frac{\Delta_{**}}{2\sqrt{\rho_*^2 - \beta^2}} + \frac{\left(2\rho_*^2 - \beta^2\right)^2}{\sqrt{\rho_*^2 - \beta^2}},$$

$$\alpha = M_{p1}\xi, \quad \beta = M_{s1}\xi, \quad \rho_*^2 = \xi^2 + \zeta^2, \quad \Delta_{**} = \left(2\rho_*^2 - \beta^2\right)^2 - 4\rho_{**}^2\sqrt{\rho_*^2 - \alpha^2}\sqrt{\rho_*^2 - \beta^2},$$

$$\rho_{**}^2 = \xi^2 + \left(2/m_{s1}^2 - 1\right)\zeta^2.$$

Заметим, что $\Delta_*(\rho_*)$ – определитель Рэлея, который обращается в ноль при $\rho_{*R}^2 = \xi^2 M_R^2$, или в двух точках $\pm\zeta_R = \pm|\xi|\sqrt{M_R^2 - 1}$, где $M_R = c/c_R$ – число Маха, c_R – скорость поверхностных волн Рэлея [8], которую условимся называть рэлеевской скоростью. Из последнего следует, что $\Delta_*(\rho_*)$ не обращается в ноль на действительной оси, если $M_R < 1$, или $c < c_R$, то есть при дорэлеевских скоростях движения нагрузки. В этом случае потенциалы (18) можно представить в виде

$$\Phi_{j1} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{e^{-xf_j}}{2f_j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj}\Phi_{nj} + e^{(x-h)f_j} \sum_{l=1}^{3} \frac{\Delta_{jl}^*}{\Delta_*} e^{-hf_l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nl}\Phi_{nl} \right] e^{iy\zeta} d\zeta. \tag{20}$$

Следует отметить, что рэлеевская скорость для горных пород и грунтов c_R несколько ниже (на 5÷10%) скорости волн сдвига в массиве [4].

Используя известное при $x < h$ разложение [4]

$$\exp\left(iy\zeta + (x-h)\sqrt{\zeta^2 + k_j^2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(k_j r) e^{in\theta} \left[\left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 + k_j^2}\right)/k_j\right]^n e^{-h\sqrt{\zeta^2 + k_j^2}},$$

представим Φ_{j1} (15) в цилиндрической системе координат

$$\Phi_{j1}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(a_{nj}K_n(k_{j1}r)+I_n(k_{j1}r)\int_{-\infty}^{\infty}g_j(\xi,\zeta)\,\Phi_{nj}e^{-hf_j}d\zeta\right)e^{in\theta}.$$

Подставляя в последнее выражение из (19) $g_j(\xi,\zeta)$, для $c<c_R$ получим

$$\Phi_{j1}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(a_{nj}K_n(k_{j1}r)+b_{nj}I_n(k_{j1}r)\right)e^{in\theta}, \tag{21}$$

где $b_{nj}=\sum_{l=1}^{3}\sum_{m=-\infty}^{\infty}a_{ml}A_{nj}^{ml}$, $A_{nj}^{ml}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Delta_{jl}^{*}}{\Delta_{*}}\Phi_{ml}\Phi_{nj}e^{-h(f_l+f_j)}d\zeta$.

Подставляя (21) с учётом (13) в (5), (6) получаем формулы для вычислений компонент напряженно-деформированного состояния массива в цилиндрических координатах при $c<c_R$

$$u_{l1}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{j=1}^{3}\left[T_{lj1}^{(1)}\left(K_n(k_{j1}r)\right)a_{nj}+T_{lj1}^{(2)}\left(I_n(k_{j1}r)\right)b_{nj}\right]e^{i(\xi\eta+n\theta)}, \tag{22}$$

$$\frac{\sigma_{lm1}}{\mu_1}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{j=1}^{3}\left[S_{lmj1}^{(1)}\left(K_n(k_{j1}r)\right)a_{nj}+S_{lmj1}^{(2)}\left(I_n(k_{j1}r)\right)b_{nj}\right]e^{i(\xi\eta+n\theta)}.$$

Здесь $l=r,\theta,\eta,\quad m=r,\theta,\eta$;

$$T_{r11}^{(1)}=k_{11}K_n'(k_{11}r),\quad T_{r21}^{(1)}=-\frac{n}{r}K_n(k_{21}r),\quad T_{r31}^{(1)}=-\xi k_{31}K_n'(k_{31}r),$$

$$T_{\theta11}^{(1)}=\frac{n}{r}K_n(k_{11}r)i,\quad T_{\theta21}^{(1)}=-k_{21}K_n'(k_{21}r)i,\quad T_{\theta31}^{(1)}=-\frac{n}{r}\xi K_n(k_{31}r)i,$$

$$T_{\eta11}^{(1)}=\xi K_n(k_{11}r)i,\quad T_{\eta21}^{(1)}=0,\quad T_{\eta31}^{(1)}=-k_{31}^2K_n(k_{31}r)i,$$

$$S_{rr11}^{(1)}=2\left(k_{11}^2+\frac{n^2}{r^2}-\frac{\lambda_1M_{p1}^2\xi^2}{2\mu_1}\right)K_n(k_{11}r)-\frac{2k_{11}K_n'(k_{11}r)}{r},$$

$$S_{rr21}^{(1)}=\frac{2n}{r^2}K_n(k_{21}r)-\frac{2k_{21}K_n'(k_{21}r)}{r},$$

$$S_{rr31}^{(1)}=-2\xi\left(k_{31}^2+\frac{n^2}{r^2}\right)K_n(k_{31}r)+\frac{2\xi k_{31}K_n'(k_{31}r)}{r},$$

$$S_{\theta\theta11}^{(1)}=-2\left(\frac{n^2}{r^2}+\frac{\lambda_1M_{p1}^2\xi^2}{2\mu_1}\right)K_n(k_{11}r)+\frac{2k_{11}K_n'(k_{11}r)}{r},$$

$$S_{\theta\theta21}^{(1)}=-\frac{2nK_n(k_{21}r)}{r^2}+\frac{2nk_{21}K_n'(k_{21}r)}{r},$$

$$S_{\theta\theta31}^{(1)}=\frac{2\xi n^2K_n(k_{31}r)}{r^2}-\frac{2\xi k_{31}K_n'(k_{31}r)}{r},$$

$$S_{\eta\eta11}^{(1)}=-2\xi^2\left(\frac{1+\lambda_1M_{p1}^2}{2\mu_1}\right)K_n(k_{11}r),\quad S_{\eta\eta21}^{(1)}=0,\quad S_{\eta\eta31}^{(1)}=2m_{31}^2\xi^3K_n(k_{31}r),$$

$$S_{r\theta 11}^{(1)} = \left(-\frac{2nK_n(k_{11}r)}{r^2} + \frac{2nk_{11}K_n'(k_{11}r)}{r} \right) i,$$

$$S_{r\theta 21}^{(1)} = \left(-\left(k_{21}^2 + \frac{2n^2}{r^2} \right) K_n(k_{21}r) + \frac{2k_{21}K_n'(k_{21}r)}{r} \right) i,$$

$$S_{r\theta 31}^{(1)} = \left(\frac{2n\xi K_n(k_{31}r)}{r^2} - \frac{2n\xi k_{31}K_n'(k_{31}r)}{r} \right) i,$$

$$S_{\theta\eta 11}^{(1)} = -\frac{2n\xi K_n(k_{11}r)}{r}, \quad S_{\theta\eta 21}^{(1)} = \xi k_{21}K_n'(k_{21}r), \quad S_{\theta\eta 31}^{(1)} = \frac{n\xi^2 \left(1 + m_{31}^2\right) K_n(k_{31}r)}{r},$$

$$S_{r\eta 11}^{(1)} = 2\xi k_{11}K_n'(k_{11}r)i, \quad S_{r\eta 21}^{(1)} = -\frac{\xi nK_n(k_{21}r)i}{r}, \quad S_{r\eta 31}^{(1)} = -\xi^2 k_{31}\left(1 + m_{31}^2\right)K_n'(k_{31}r)i;$$

$$K_n'(k_{j1}r) = \frac{dK_n(k_{j1}r)}{d(k_{j1}r)};$$

$T_{lj1}^{(2)}$, $S_{lmj1}^{(2)}$ получаются из $T_{lj1}^{(1)}$, $S_{lmj1}^{(1)}$ заменой K_n на I_n.

Подставляя (15) при $k = 2, 3, \ldots, N+1$ с учётом (13) в (5), (6), получаем формулы для вычислений компонент напряженно-деформированного состояния слоев оболочки при $c < c_R$

$$u_{lk} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{3} \left[T_{ljk}^{(1)}\left(K_n(k_{jk}r)\right) a_{nj+3(2k-3)} + T_{ljk}^{(2)}\left(I_n(k_{jk}r)\right) a_{nj+6(k-1)} \right] e^{i(\xi\eta + n\theta)}, \tag{23}$$

$$\frac{\sigma_{lmk}}{\mu_k} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{3} \left[S_{lmjk}^{(1)}\left(K_n(k_{jk}r)\right) a_{nj+3(2k-3)} + S_{lmjk}^{(2)}\left(I_n(k_{jk}r)\right) a_{nj+6(k-1)} \right] e^{i(\xi\eta + n\theta)}.$$

Здесь $l = r, \theta, \eta, \quad m = r, \theta, \eta, \quad k = 2, 3, \ldots, N+1;$

$$T_{r1k}^{(1)} = k_{1k}K_n'(k_{1k}r), \quad T_{r2k}^{(1)} = -\frac{n}{r}K_n(k_{2k}r), \quad T_{r3k}^{(1)} = -\xi k_{3k}K_n'(k_{3k}r),$$

$$T_{\theta 1k}^{(1)} = \frac{n}{r}K_n(k_{1k}r)i, \quad T_{\theta 2k}^{(1)} = -k_{2k}K_n'(k_{2k}r)i, \quad T_{\theta 3k}^{(1)} = -\frac{n}{r}\xi K_n(k_{3k}r)i,$$

$$T_{\eta 1k}^{(1)} = \xi K_n(k_{1k}r)i, \quad T_{\eta 2k}^{(1)} = 0, \quad T_{\eta 3k}^{(1)} = -k_{3k}^2 K_n(k_{3k}r)i,$$

$$S_{rr1k}^{(1)} = 2\left(k_{1k}^2 + \frac{n^2}{r^2} - \frac{\lambda_k M_{pk}^2 \xi^2}{2\mu_k} \right) K_n(k_{1k}r) - \frac{2k_{1k}K_n'(k_{1k}r)}{r},$$

$$S_{rr2k}^{(1)} = \frac{2n}{r^2}K_n(k_{2k}r) - \frac{2k_{2k}K_n'(k_{2k}r)}{r},$$

$$S_{rr3k}^{(1)} = -2\xi\left(k_{3k}^2 + \frac{n^2}{r^2} \right) K_n(k_{3k}r) + \frac{2\xi k_{3k}K_n'(k_{3k}r)}{r},$$

$$S_{\theta\theta 1k}^{(1)} = -2\left(\frac{n^2}{r^2} + \frac{\lambda_k M_{pk}^2 \xi^2}{2\mu_k} \right) K_n(k_{1k}r) + \frac{2k_{1k}K_n'(k_{1k}r)}{r},$$

$$S^{(1)}_{\theta\theta 2k} = -\frac{2nK_n(k_{2k}r)}{r^2} + \frac{2nk_{2k}K'_n(k_{2k}r)}{r},$$

$$S^{(1)}_{\theta\theta 3k} = \frac{2\xi n^2 K_n(k_{3k}r)}{r^2} - \frac{2\xi k_{3k}K'_n(k_{3k}r)}{r},$$

$$S^{(1)}_{\eta\eta 1k} = -2\xi^2\left(\frac{1+\lambda_k M^2_{pk}}{2\mu_k}\right)K_n(k_{1k}r), \quad S^{(1)}_{\eta\eta 2k} = 0, \quad S^{(1)}_{\eta\eta 3k} = 2m^2_{3k}\xi^3 K_n(k_{3k}r),$$

$$S^{(1)}_{r\theta 1k} = \left(-\frac{2nK_n(k_{1k}r)}{r^2} + \frac{2nk_{1k}K'_n(k_{1k}r)}{r}\right)i,$$

$$S^{(1)}_{r\theta 2k} = \left(-\left(k^2_{2k} + \frac{2n^2}{r^2}\right)K_n(k_{2k}r) + \frac{2k_{2k}K'_n(k_{2k}r)}{r}\right)i,$$

$$S^{(1)}_{r\theta 3k} = \left(\frac{2n\xi K_n(k_{3k}r)}{r^2} - \frac{2n\xi k_{3k}K'_n(k_{3k}r)}{r}\right)i,$$

$$S^{(1)}_{\theta\eta 1k} = -\frac{2n\xi K_n(k_{1k}r)}{r}, \quad S^{(1)}_{\theta\eta 2k} = \xi k_{2k}K'_n(k_{2k}r), \quad S^{(1)}_{\theta\eta 3k} = \frac{n\xi^2(1+m^2_{3k})K_n(k_{3k}r)}{r},$$

$$S^{(1)}_{r\eta 1k} = 2\xi k_{1k}K'_n(k_{1k}r)i, \quad S^{(1)}_{r\eta 2k} = -\frac{\xi nK_n(k_{2k}r)i}{r}, \quad S^{(1)}_{r\eta 3k} = -\xi^2 k_{3k}(1+m^2_{3k})K'_n(k_{3k}r)i;$$

$$K'_n(k_{jk}r) = \frac{dK_n(k_{jk}r)}{d(k_{jk}r)};$$

$T^{(2)}_{ljk}$, $S^{(2)}_{lmjk}$ получаются из $T^{(1)}_{ljk}$, $S^{(1)}_{lmjk}$ заменой K_n на I_n.

Подставляя в (10) или (11) соответствующие выражения и приравнивая коэффициенты рядов при $e^{in\theta}$, получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов $a_{n1},\ldots,a_{n(6N+3)}$. При численной реализации задачи для решения системы уравнений удобно пользоваться методом последовательных отражений-преломлений [4-7], что позволяет на каждом шагу решать конечную систему алгебраических уравнений сначала для оболочки в цилиндрической системе координат, а затем на границе полупространства в декартовой системе координат. Количество последовательных отражений-преломлений зависит от глубины заложения оболочки и требуемой точности расчетов и определяется при численной реализации решения задачи.

После определения коэффициентов компоненты напряженно-деформированного состояния массива и слоев оболочки при действии подвижной синусоидальной нагрузки можно вычислить по формулам (22), (23).

Заключение. В случае произвольной периодической по η нагрузки, разлагая ее в ряд Фурье для каждой составляющей ряда, получим вышерассмотренную задачу.

Для апериодической транспортной нагрузки, используя преобразование Фурье по оси тоннеля, получим также рассмотренную здесь задачу.

Представленный здесь алгоритм построения аналитического решения задачи позволяет моделировать воздействие транспортных нагрузок в тоннелях и подземных сооружениях на состояние дневной поверхности и окружающего массива, что необходимо учитывать при строительстве подземных сооружений неглубокого заложения, например, линий метрополитена.

Он дает возможность определить напряженно-деформированное состояние самих оболочек, что необходимо при прочностных расчетах подобных конструкций при действии транспортных нагрузок с учетом их вида и скорости движения.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Пожуев В.И. Действие подвижной нагрузки на цилиндрическую оболочку в упругой среде // Строит. механика и расчет сооружений. – 1978. – № 1. – С. 44 – 48.

[2] Айталиев Ш.М., Алексеева Л.А., Украинец В.Н. Напряженное состояние двухслойной обделки тоннеля от внутренних движущихся нагрузок // Механика подземных сооружений: Сб. науч. тр. Тульского политехн. ин-та. – Тула, 1988. – С. 38 – 46.

[3] Алексеева Л.А., Украинец В.Н. Критическая скорость движущейся нагрузки в тоннеле, подкрепленном двухслойной оболочкой // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1987. – № 4. – С. 156 – 161.

[4] Ержанов Ж.С., Айталиев Ш.М., Алексеева Л.А. Динамика тоннелей и подземных трубопроводов. – Алма-Ата: Наука Каз. ССР, 1989. – 240 с.

[5] Айталиев Ш.М., Алексеева Л.А., Украинец В.Н. Влияние свободной поверхности на тоннель мелкого заложения при действии подвижных нагрузок // Изв. АН Каз.ССР. Сер. физ.-мат. – 1986. – № 5. – С. 75 – 80.

[6] Алексеева Л.А., Украинец В.Н. Динамика упругого полупространства с подкрепленной цилиндрической полостью при подвижных нагрузках //Прикладная механика. – 2009. – № 9. – С.75-85.

[7] Украинец В.Н. Динамика тоннелей и трубопроводов мелкого заложения под воздействием подвижных нагрузок. – Павлодар: НИЦ ПГУ им. С. Торайгырова, 2006. – 123 с.

[8] Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.

REFERENCES

[1] Pozhuev V.I. The action of a moving load on cylindrical shell in elastic media // Build. mechanics and calculation of structures. - 1978. - № 1. - p. 44 - 48. (in Russ.).

[2] Aytaliev Sh.M., Alekseeva L.A., Ukrainets V.N. Stress state of a two-layer tunnel lining of the internal moving loads // Mechanics of underground structures: Coll. scientific. w. Tula Polytechnic. Inst. - Tula, 1988. - p. 38 - 46. (in Russ.).

[3] Alekseeva L.A., Ukrainets V.N. The critical velocity of the moving load in the tunnel, supported by a two-layer shell // News of the USSR Academy of Sciences. Mechanics of Solids. - 1987. - № 4. - p. 156 - 161. (in Russ.).

[4] Erzhanov Zh.S., Aytaliev Sh.M., Alekseeva L.A. Dynamics of tunnels and underground pipelines. - Almaty: Kazakh Science. SSR, 1989. - 240 p. (in Russ.).

[5] Aytaliev Sh.M., Alekseeva L.A., Ukrainets V.N. The impact on the free surface of shallow tunnel under the action of moving loads // News of the Academy of Sciences of the Kazakh SSR. Ser. phys-math. - 1986 -№ 5. - p. 75 - 80. (in Russ.).

[6] Alekseeva L.A., Ukrainets V.N. Dynamics of elastic half-space with stiffened cylindrical cavity when moving loads // Applied Mechanics. - 2009. - № 9. - p.75-85. (in Russ.).

[7] Ukrainets V.N. Dynamics of tunnels and pipelines shallow under the influence of moving loads. - Pavlodar: PSU n/a S.Toraigyrov, 2006. - 123 p.

[8] Nowacki W. Theory of Elasticity. - M .: Mir, 1975. - 872 p. (in Russ.).

ҚОЗҒАЛМАЛЫ МЕРЗІМДІ ЖҮКТЕМЕНІҢ СЕРПІМДІ ЖАРТЫЛАЙ КЕҢІСТІКТЕГІ КӨП ҚАТПАРЛЫ ҚАБЫҚҚА ӘРЕКЕТІ ТУРАЛЫ МІНДЕТ

Л. А. Алексеева, В. Н. Украинец, С. Р. Гирнис

ҚР БҒМ Математика және математикалық үлгілеу институты, Алматы, Қазақстан,
С. Торайғыров атындағы Павлодар мемлекеттік университеті, Қазақстан

Тірек сөздер: серпімді жартылай кеңістік, көп қатпарлы қабық, көлік жүктемесі, кернеулік-деформациялық күй.

Аннотация. Серпімді жартылай кеңістікте орналасқан көп қатпарлы айналма цилиндрлік қабықпен нықталған жылжымалы мерзімді жүктеменің әрекеті туралы міндет сараптамалық түрде шешілген. Қабықша қабаттары мен серпімді жартылай кеңістік қозғалысы жылжымалы координаттар жүйесінде серпімдік теориясының динамикалық теңдеулерімен суреттелген. Қозғалыс жылдамдығы қабық ортасы мен қабаттарындағы серпімді толқындардың таралуы жылдамдығынан аз болған кездегі жүктеменің дыбысқа дейінгі жылдамдықтары кезіндегі массиві мен қабықтағы ауысулар мен кернеулерінің бөлшектері анықталған.

Поступила 03.11.2015 г.

Publication Ethics and Publication Malpractice
in the journals of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan

For information on Ethics in publishing and Ethical guidelines for journal publication see http://www.elsevier.com/publishingethics and http://www.elsevier.com/journal-authors/ethics.

Submission of an article to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan implies that the described work has not been published previously (except in the form of an abstract or as part of a published lecture or academic thesis or as an electronic preprint, see http://www.elsevier.com/postingpolicy), that it is not under consideration for publication elsewhere, that its publication is approved by all authors and tacitly or explicitly by the responsible authorities where the work was carried out, and that, if accepted, it will not be published elsewhere in the same form, in English or in any other language, including electronically without the written consent of the copyright-holder. In particular, translations into English of papers already published in another language are not accepted.

No other forms of scientific misconduct are allowed, such as plagiarism, falsification, fraudulent data, incorrect interpretation of other works, incorrect citations, etc. The National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan follows the Code of Conduct of the Committee on Publication Ethics (COPE), and follows the COPE Flowcharts for Resolving Cases of Suspected Misconduct (http://publicationethics.org/files/u2/New_Code.pdf). To verify originality, your article may be checked by the Cross Check originality detection service http://www.elsevier.com/editors/plagdetect.

The authors are obliged to participate in peer review process and be ready to provide corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. All authors of a paper should have significantly contributed to the research.

The reviewers should provide objective judgments and should point out relevant published works which are not yet cited. Reviewed articles should be treated confidentially. The reviewers will be chosen in such a way that there is no conflict of interests with respect to the research, the authors and/or the research funders.

The editors have complete responsibility and authority to reject or accept a paper, and they will only accept a paper when reasonably certain. They will preserve anonymity of reviewers and promote publication of corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. The acceptance of a paper automatically implies the copyright transfer to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.

The Editorial Board of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan will monitor and safeguard publishing ethics.

Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайте:

www:nauka-nanrk.kz

http://www.physics-mathematics.kz

Редактор *М. С. Ахметова*
Верстка на компьютере *Д. Н. Калкабековой*

Подписано в печать 10.11.2015.
Формат 60x881/8. Бумага офсетная. Печать – ризограф.
10,2 п.л. Тираж 300. Заказ 6.

Национальная академия наук РК
050010, Алматы, ул. Шевченко, 28, т. 272-13-18, 272-13-19