

ISSN 1991-346X

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ  
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ

# Х А Б А Р Л А Р Ы

---

---

## ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК  
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES  
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА  
СЕРИЯСЫ**



**СЕРИЯ**

**ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ**



**PHYSICO-MATHEMATICAL  
SERIES**

**1 (305)**

**ҚАҢТАР – АҚПАҢ 2016 ж.  
ЯНВАРЬ – ФЕВРАЛЬ 2016 г.  
JANUARY – FEBRUARY 2016**

1963 ЖЫЛДЫҢ ҚАҢТАР АЙЫНАН ШЫҒА БАСТАҒАН  
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1963 ГОДА  
PUBLISHED SINCE JANUARY 1963

ЖЫЛЫНА 6 РЕТ ШЫҒАДЫ  
ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД  
PUBLISHED 6 TIMES A YEAR

АЛМАТЫ, ҚР ҰҒА  
АЛМАТЫ, НАН РК  
ALMATY, NAS RK

Б а с р е д а к т о р

ҚР ҰҒА академигі,

**Мұтанов Г. М.**

Р е д а к ц и я а л қ а с ы:

физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Әшімов А.А.**; техн. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Байғұнчекөв Ж.Ж.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Жұмаділдаев А.С.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Қалменов Т.Ш.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Мұқашев Б.Н.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Өтелбаев М.О.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Тәкібаев Н.Ж.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Харин С.Н.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Әбішев М.Е.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Жантаев Ж.Ш.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Қалимолдаев М.Н.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Косов В.Н.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Мұсабаев Т.А.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Ойнаров Р.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Рамазанов Т.С.** (бас редактордың орынбасары); физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Темірбеков Н.М.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Өмірбаев У.У.**

Р е д а к ц и я к ең е с і:

Украинаның ҰҒА академигі **И.Н. Вишневский** (Украина); Украинаның ҰҒА академигі **А.М. Ковалев** (Украина); Беларусь Республикасының ҰҒА академигі **А.А. Михалевич** (Беларусь); Әзірбайжан ҰҒА академигі **А. Пашаев** (Әзірбайжан); Молдова Республикасының ҰҒА академигі **И. Тигиняну** (Молдова); мед. ғ. докторы, проф. **Иозеф Банас** (Польша)

Главный редактор

академик НАН РК

**Г. М. Мутанов**

Редакционная коллегия:

доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **А.А. Ашимов**; доктор техн. наук, проф., академик НАН РК **Ж.Ж. Байгунчеков**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **А.С. Джумадильдаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **Т.Ш. Кальменов**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **Б.Н. Мукашев**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **М.О. Отелбаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **Н.Ж. Такибаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **С.Н. Харин**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **М.Е. Абишев**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Ж.Ш. Жантаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **М.Н. Калимолдаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **В.Н. Косов**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Т.А. Мусабаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Р. Ойнаров**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Т.С. Рамазанов** (заместитель главного редактора); доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Н.М. Темирбеков**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **У.У. Умирбаев**

Редакционный совет:

академик НАН Украины **И.Н. Вишневский** (Украина); академик НАН Украины **А.М. Ковалев** (Украина); академик НАН Республики Беларусь **А.А. Михалевич** (Беларусь); академик НАН Азербайджанской Республики **А. Пашаев** (Азербайджан); академик НАН Республики Молдова **И. Тигиняну** (Молдова); д. мед. н., проф. **Иозеф Банас** (Польша)

«Известия НАН РК. Серия физико-математическая». ISSN 1991-346X

Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы)

Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации и архивов Министерства культуры и информации Республики Казахстан №5543-Ж, выданное 01.06.2006 г.

Периодичность: 6 раз в год.

Тираж: 300 экземпляров.

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, ком. 219, 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,

[www.nauka-nanrk.kz](http://www.nauka-nanrk.kz) / [physics-mathematics.kz](http://physics-mathematics.kz)

---

© Национальная академия наук Республики Казахстан, 2016

Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75.

Editor in chief

**G. M. Mutanov**,  
academician of NAS RK

Editorial board:

**A.A. Ashimov**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **Zh.Zh. Baigunchekov**, dr. eng. sc., prof., academician of NAS RK; **A.S. Dzhumadildayev**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **T.S. Kalmenov**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **B.N. Mukhashev**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **M.O. Otelbayev**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **N.Zh. Takibayev**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **S.N. Kharin**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **M.Ye. Abishev**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **Zh.Sh. Zhantayev**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **M.N. Kalimoldayev**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **V.N. Kosov**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **T.A. Mussabayev**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **R. Oinarov**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **T.S. Ramazanov**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK (deputy editor); **N.M. Temirbekov**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **U.U. Umirbayev**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK

Editorial staff:

**I.N. Vishnievski**, NAS Ukraine academician (Ukraine); **A.M. Kovalev**, NAS Ukraine academician (Ukraine); **A.A. Mikhalevich**, NAS Belarus academician (Belarus); **A. Pashayev**, NAS Azerbaijan academician (Azerbaijan); **I. Tighineanu**, NAS Moldova academician (Moldova); **Joseph Banas**, prof. (Poland).

**News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physical-mathematical series.**  
**ISSN 1991-346X**

Owner: RPA "National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan" (Almaty)

The certificate of registration of a periodic printed publication in the Committee of information and archives of the Ministry of culture and information of the Republic of Kazakhstan N 5543-Ж, issued 01.06.2006

Periodicity: 6 times a year

Circulation: 300 copies

Editorial address: 28, Shevchenko str., of. 219, 220, Almaty, 050010, tel. 272-13-19, 272-13-18,

[www.nauka-nanrk.kz](http://www.nauka-nanrk.kz) / [physics-mathematics.kz](http://physics-mathematics.kz)

---

© National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, 2016

Address of printing house: ST "Aruna", 75, Muratbayev str, Almaty

**N E W S**

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES**

ISSN 1991-346X

Volume 1, Number 305 (2016), 128 – 135

**ON SPECTRAL ZETA FUNCTIONS OF THE LAPLACE EQUATION  
WITH THE INTEGRAL BOUNDARY CONDITIONS  
OF THE POTENTIAL**

**T. Sh. Kal'menov, D. Suragan**

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan.

E-mail: suragan@list.ru

**Keywords:** boundary condition of the potential, Laplace equation, spectral zeta function.

**Abstract.** In the present paper we prove that a real valued spectral zeta function of the Laplace operator with a nonlocal boundary value integral condition is maximized in a ball among all domains of given measure in multidimensional Euclidean space with a dimension not less than three  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 3$ . By using the Feynmann-Kac formula and spherical rearrangement, Luttinger proved [10] that a ball is the maximizer of the partition function of the Dirichlet Laplacian among all domains of the same volume as the ball. The partition function and the zeta function can be related directly. Our result is an analogue of the Luttinger type inequality for the Laplace equation with the Dirichlet condition and extends our previous three dimensional result. The Newton potential can be related to the nonlocal boundary value problem of the Laplace operator, so we also prove an isoperimetric inequality for the Newton potential. The proof follows Kac's method of probabilistic potential theory.

## О СПЕКТРАЛЬНЫХ ДЗЕТА-ФУНКЦИЯХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА С ГРАНИЧНЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ПОТЕНЦИАЛА

Т. Ш. Кальменов, Д. Сураган

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

**Ключевые слова:** граничное условие потенциала, уравнение Лапласа, спектральная дзета-функция.

**Аннотация.** В этой статье мы доказываем, что вещественная спектральная дзета-функция нелокального оператора Лапласа максимизируется в шаре среди всех областей данной меры в многомерном евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 3$ . Используя формулу Фейнмана-Каца и сферическую перестановку, Люттингер доказал [10], что шар является максимайзером функции разбиения оператора Лапласа с граничным условиям Дирихле среди всех областей данной меры. Функция разбиения и дзета-функция связаны прямым соотношением. Наш результат является аналогом неравенства Люттенгера для уравнения Лапласа с краевым условием Дирихле и обобщает наш предыдущий результат для трехмерного случая. Доказательство следует из метода Каца о вероятностной потенциальной теории.

**1. Введение и основной результат.** Пусть  $\Omega$ -односвязная гладкая ограниченная область в  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 3$ . Рассмотрим спектральную задачу для оператора Лапласа

$$-\Delta u(x) = \lambda u(x), \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

с нелокальным граничным условием

$$-\frac{u(x)}{2} + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \varepsilon_d(x-y)}{\partial n_y} u(y) dy - \int_{\partial\Omega} \varepsilon_d(x-y) \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} dy = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (2)$$

где  $\frac{\partial}{\partial n_y}$  обозначает внешнюю нормальную производную на границе  $\partial\Omega$ ,

$$\varepsilon_d(x-y) = \frac{1}{(d-2)s_d} \frac{1}{|x-y|^{d-2}}, \quad d \geq 3,$$

это фундаментальное решение оператора Лапласа, а  $s_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$  - это площадь поверхности единичной сферы в  $\mathbb{R}^d$  и  $|x-y|$  это стандартное Евклидово расстояние между  $x$  и  $y$ .

Задача (1)-(2) эквивалентна спектральной задаче для интегрального оператора [1]-[2]

$$u(x) = \lambda \int_{\Omega} \varepsilon_d(x-y) u(y) dy, \quad x \in \Omega. \quad (3)$$

Краевая задача (1)-(2) может быть также обобщена для более высокой степени оператора Лапласа [6]. Дискретность спектра интегрального оператора (3) позволяет упорядочить собственные значения  $(0 <) \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \dots$  (нумерует их значения в порядке возрастания) повторяющиеся каждый раз в соответствии с кратностью. Спектральная задача (1)-(2) имеет различные интересные свойства и приложения (смотрите [1] и [8], для примера). В частности, при помощи явного вычисления (см. [7]), можно доказать, что в единичном шаре спектр Лапласиана (1)-(2) содержит спектр соответствующего Лапласиана Дирихле.

Кац [1] доказал:

$$\mathbf{1} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1+\lambda_j \delta} u_j(y) \int_{\Omega} u_j(x) dx, \quad y \in \Omega, \quad (4)$$

где  $\lambda_{j,j} = 1, 2, \dots$  и  $u_{j,j} = 1, 2, \dots$  являются собственными значениями и соответствуют нормирующим собственным функциям нелокальному Лапласиану (1)-(2). Аналитический факт (4) выражает то, что разложение 1 в ряд ортонормированных функций  $u_j$  суммируется к 1 для каждого  $y \in \Omega$ .

Следует также отметить, что неравенства типа Березин-Ли-Яу действительны (см.[9]) для собственных значений краевой спектральной задачи (1)-(2). В [4] Кац представляет основные

асимптотические формулы для собственных значений (3) в  $R^d$ ,  $d \geq 3$ . В этой статье мы заинтересованы в применении его вероятностных методов [1]–[4] для спектральных геометрических задач (3).

Функция

$$\zeta_{\Omega}(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{[\lambda_j(\Omega)]^z},$$

называется спектрально дзета-функцией, где  $\lambda_{j,j} = 1, 2, \dots$  - это собственные значения соответствующей спектральной задачи.

Используя формулу Фейнмана-Каца и сферическую перестановку, Люттингер доказал, что шар  $\Omega^*$  является максимайзером функции разбиения Лапласиана Дирихле среди всех областей, таких как  $\Omega^*$ , для всех положительных значений времени [10], т.е.

$$Z_{\Omega}^D(t) := \sum_{j=1}^{\infty} \exp(-t\lambda_j^D(\Omega)) \leq Z_{\Omega^*}^D(t) := \sum_{j=1}^{\infty} \exp(-t\lambda_j^D(\Omega^*)), \quad |\Omega| = |\Omega^*|, \forall t > 0,$$

где  $\lambda_i^D, i = 1, 2, \dots$  есть собственные значения Лапласиана Дирихле.

Функция разбиения и дзета-функция связаны соотношением:

$$\zeta_{\Omega}^D(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{\infty} t^{z-1} Z_{\Omega}^D(t) dt,$$

где  $\Gamma$  это гамма-функция. Следовательно, из этого следует

$$\zeta_{\Omega}^D(z) \leq \zeta_{\Omega^*}^D(z), \quad |\Omega| = |\Omega^*|, \quad (5)$$

где  $z > d/2, \Omega \subset R^d$ . Правая часть неравенства дает точную верхнюю грань спектральной дзета-функции. И может быть точно подсчитана, когда  $z$  натуральное число.

Пример 1. Пусть  $U$  - единичная пластина, тогда

$$\zeta_U^D(2) = 0.0493 \dots$$

Следовательно, из (5) мы имеем

$$\zeta_{\Omega}^D(2) \leq 0.0493 \dots, \quad |\Omega| = |U|.$$

Это неравенство лучше, чем неравенство, представленное в [11]

$$\zeta_U^D(z) \leq \frac{\Gamma\left(\frac{z-d}{2}\right) \pi^{d/2} |\Omega|^{z/2}}{\Gamma(z) (4\pi)^{d/2}}, \quad z > \frac{d}{2}, \quad (6)$$

Из которого следует

$$\zeta_{\Omega}^D(2) \leq 0.7853 \dots,$$

когда  $|\Omega| = |U|$ . Однако, важно отметить, что в (6)  $z$  - это произвольное действительное число, большее чем  $\frac{d}{2}$ .

Условие  $z > \frac{d}{2}$  в (5) необходимо для абсолютной сходимости рядов [12], но в случае  $z \leq \frac{d}{2}$  можно использовать процесс регуляризации, чтобы получить абсолютную сходимость рядов.

Пример 2. В  $\Omega \subset R^2$ , сумма

$$\zeta_{\Omega}^D(1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^D(\Omega)} = \infty, \quad \Omega \subset R^2.$$

Однако, используя следующую регуляризацию, мы находим, что  $U \equiv \Omega \subset R^2$  - это единичная пластина, тогда

$$\zeta_{\Omega}^D(1) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\lambda_k^D(U)} - \frac{1}{4k} \right) = -0.3557 \dots,$$

- урегуляризованная  $\zeta_{\Omega}^D(1)$ .

В [7] мы точно вычислили собственные значения спектральной задачи (1)-(2) в шаре. Итак, мы получили аналогию неравенства (5) для нелокального оператора Лапласа (1)-(2), т.е. основной результат этого раздела это

**Теорема 1.1.** Пусть  $\Omega \subset R^d, d \geq 3$  есть открытая ограниченная область. Для любого  $\rho \in R, \rho > \frac{d}{2}$

$$\zeta_{\Omega}(\rho) \leq \zeta_{\Omega^*}(\rho), \tag{7}$$

где  $\zeta_{\Omega}$  - это спектральная дзета-функция нелокального оператора Лапласа (1.1)-(1.2) и  $\Omega^*$  - это такой шар, что  $|\Omega^*| = |\Omega|$ .

**2. Предварительные замечания.** Пусть  $\Omega$  ограниченное измеримое множество в  $R^d$ . Его симметрическая перестановка  $\Omega^*$  - открытый шар с центром в нуле и мерой, равной мере  $\Omega$ , т.е.  $|\Omega^*| = |\Omega|$ . Пусть  $u$  неотрицательная измеримая функция, стремящаяся к бесконечности, в том смысле, что все ее подмножества, состоящие из положительных значений, имеют конечную меру.

В определении симметрической убывающей перестановки  $u$  может быть использовано разложение layer-cake [13], которое выражает неотрицательную функцию  $u$

$$u(x) = \int_0^{\infty} X\{u(x) > t\} dt, \tag{8}$$

где  $X$  - характеристическая функция соответствующей области.

Определение 2.1. Функция

$$u^*(x) = \int_0^{\infty} X\{u(x) > t\}^* dt$$

называется symmetric decreasing rearrangement неотрицательной измеримой функции  $u$ .

Лемма 2.2. [13] Для каждой неотрицательной измеримой функции  $u \in L^2(\Omega)$  имеем

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \|u^*\|_{L^2(\Omega)}$$

Пусть  $x(t) = (\omega_1(t), \omega_2(t), \dots, \omega_d(t))$  - d-мерное Броуновское движение, т.е.  $\omega_1(t), \omega_2(t), \dots, \omega_d(t)$  - независимый Виенровский процесс (смотрите [5] или более позднюю книгу [15]). По определению

$$Prob\{y + x(\tau) \in \Omega\} = \int_{\Omega} (2\pi\tau)^{-d/2} \exp(-\frac{1}{2} \tau^{-1} |x - y|^2) dx \tag{9}$$

где  $Prob\{y + x(\tau) \in \Omega\}$  означает вероятность нахождения  $y + x(\tau)$  в  $\Omega \in R^d$  во время  $\tau$ .

Лемма 2.3. Пусть  $\Omega$  - ограниченное измеримое множество в  $R^d, d \geq 3$  и  $\Omega^*$  - его симметрическая перестановка. Для любого  $\tau > 0$

$$\int_{\Omega} Prob\{y + x(\tau) \in \Omega\} dy \leq \int_{\Omega^*} Prob\{y + x(\tau) \in \Omega^*\} dy$$

Геометрически, это означает, что Броуновские частицы, выходящие из  $\Omega$ , чаще покидают  $\Omega$ , чем те, которые выходят из шара  $\Omega^*$  с таким же объемом, как у  $\Omega$ .

*Доказательство.* Вернемся к неравенству Рица [13]

$$\int_{R^d} \int_{R^d} f(y) g(x - y) h(y) dy dx \leq \int_{R^d} \int_{R^d} f^*(y) g^*(x - y) h^*(y) dy dx \tag{10}$$

Где  $f^*, g^*, h^*$  симметрические убывающие перестановки положительно измеримых функций  $f, g, h$  соответственно. Теперь обратим внимание, что для  $\tau > 0$  функция  $\exp(-\frac{1}{2} \tau^{-1} |x|^2)$  симметрическая строго-убывающая функция, т.е. не меняет свою формулу при перестановке, получим



$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \text{Prob}\{y + x(\tau) \in \Omega\} dy &= \int_{\Omega} \int_{\Omega} (2\pi\tau)^{-\frac{d}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\tau^{-1}|x-y|^2\right) dx dy \\
 &= \int_{R^d} \int_{R^d} X_{\Omega}(x)(2\pi\tau)^{-\frac{d}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\tau^{-1}|x-y|^2\right) X_{\Omega}(y) dx dy \\
 &\leq \int_{R^d} \int_{R^d} X_{\Omega^c}(x)(2\pi\tau)^{-\frac{d}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\tau^{-1}|x-y|^2\right) X_{\Omega^c}(y) dx dy \\
 &= \int_{\Omega^c} \int_{\Omega^c} (2\pi\tau)^{-\frac{d}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\tau^{-1}|x-y|^2\right) dx dy = \\
 &= \int_{\Omega^c} \text{Prob}\{y + x(\tau) \in \Omega^c\} dy
 \end{aligned}$$

где  $X_{\Omega}(x)$  – характеристическая функция  $\Omega$ , т.е.  $X_{\Omega}(x) = 1$  если  $x \in \Omega$ ,  $X_{\Omega}(x) = 0$  если  $x \in R^d \setminus \Omega$ .

Вычислим математическое ожидание (Винеровский интеграл) для  $A \subset \Omega \subset R^d, d \geq 3$

$$\begin{aligned}
 E\left\{\int_0^{\infty} X_A(y + x(\tau)) d\tau\right\} &= \int_0^{\infty} E\{X_A(y + x(\tau))\} d\tau \\
 &= \int_0^{\infty} P\{y + x(\tau) \in A\} d\tau = \int_0^{\infty} \int_A \frac{1}{(2\pi\tau)^{\frac{d}{2}}} \exp\left\{-\frac{|x-y|^2}{2\tau}\right\} dx d\tau \\
 &= \int_A \int_0^{\infty} \frac{1}{(2\pi\tau)^{\frac{d}{2}}} \exp\left\{-\frac{|x-y|^2}{2\tau}\right\} d\tau dx = \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}-1\right)}{2\pi^{\frac{d}{2}}} \int_A \frac{1}{|y-x|^{d-2}} dx \\
 &= \int_A \bar{\varepsilon}_d(y-x) dx = \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\lambda}_j \int_A u_j(x) dx u_j(y)
 \end{aligned}$$

где  $\bar{\varepsilon}_d = 2\varepsilon_d$ ,  $\bar{\lambda}_j, j = 1, 2, \dots$  – собственные значения (3) и  $u_j, j = 1, 2, \dots$  – соответствующие нормализующие собственные функции. Таким же образом вычисляем

$$\begin{aligned}
 E\left\{\int_0^{\infty} \int_0^t X_{\Omega}(y + x(\tau)) d\tau X_A(y + x(t)) dt\right\} \\
 &= \int_0^{\infty} \int_0^t E\{X_{\Omega}(y + x(\tau)) X_A(y + x(t))\} d\tau dt = \int \int_{0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 < \infty} E\{X_{\Omega}(y + x(\tau_1)) X_A(y + x(\tau_2))\} d\tau_1 d\tau_2 \\
 &= \int \int_{0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 < \infty} \int_A \int_{\Omega} P(y|x_1; \tau_1) P(x_1|x_2; \tau_2 - \tau_1) dx_1 dx_2 d\tau_1 d\tau_2 \\
 &= \int_A \int_{\Omega} \bar{\varepsilon}_d(x_1 - y) \bar{\varepsilon}_d(x_2 - x_1) dx_1 dx_2 = \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\lambda}_j^2 \int_A u_j(x) dx u_j(y).
 \end{aligned}$$

Также для каждого неотрицательного целого  $k$  и любого  $y \in \Omega$  имеем

$$E\left\{\int_0^{\infty} \left(\int_0^t X_{\Omega}(y + x(\tau)) d\tau\right)^k X_A(y + x(t)) dt\right\} = \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\lambda}_j^{k+1} k! \int_A u_j(x) dx u_j(y). \quad (11)$$

Отсюда следует, что

Лемма 2.4. Пусть  $A \subset \Omega \subset R^d, d \geq 3$ . Для любого  $y \in \Omega$  и достаточно маленького  $\mu > 0$  имеем

$$\int_0^{\infty} E\left\{\exp\left(-\mu \int_0^t X_{\Omega}(y + x(\tau)) d\tau\right) X_A(y + x(t))\right\} dt = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\bar{\lambda}_j}{1 + \mu \bar{\lambda}_j} \int_A u_j(x) dx u_j(y) \quad (12)$$

*Доказательство.* Разлагая обе части (12) в ряд Тейлора относительно  $\mu \ll 1$  и используя (11), мы легко увидим, что (12) выполняется.

Лемма 2.5. Для любого  $\beta > 0$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\beta}{\lambda_j}\right) \bar{\lambda}_j = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\Omega} \int_0^{\infty} \frac{1}{t^{\frac{d}{2}}} \text{Prob}\left\{\int_0^t X_{\Omega}(y+x(\beta\eta)) d\eta > 1 | x(t) = 0\right\} dt dy \quad (13)$$

*Доказательство.* Инвертируя (12) относительно  $\mu$ , получаем

$$\int_0^{\infty} \text{Prob}\left\{\int_0^t X_{\Omega}(y+x(\tau)) d\tau > \beta; y+x(\tau) \in A\right\} dt = \sum_{j=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\beta}{\lambda_j}\right) \bar{\lambda}_j \int_A u_j(x) dx u_j(y), y \in \Omega$$

Пусть теперь  $A$  –  $d$ -шар, радиуса  $r$  и с центром в  $y$ : разделим обе части на объем  $A$  при  $r \rightarrow 0$ , получаем

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_0^{\infty} \frac{1}{t^{\frac{d}{2}}} \text{Prob}\left\{\int_0^t X_{\Omega}(y+x(\tau)) d\tau > \beta | x(t) = 0\right\} dt = \sum_{j=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\beta}{\lambda_j}\right) \bar{\lambda}_j u_j^2(y) \quad (14)$$

Здесь мы воспользовались

$$\text{Prob}\left\{\int_0^t X_{\Omega}(y+x(\tau)) d\tau > \beta | x(t) = 0\right\} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\text{Prob}\left\{\int_0^t X_{\Omega}(y+x(\tau)) d\tau > \beta | y+x(t) \in A\right\}}{\text{Prob}\{y+x(t) \in A\}}$$

И

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\text{Prob}\{y+x(t) \in A\}}{|A|} = \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{d}{2}}}$$

Интегрируя (14) по  $\Omega$  в соответствии с  $y$ , мы получаем

$$\sum_{j=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\beta}{\lambda_j}\right) \bar{\lambda}_j = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\Omega} \int_0^{\infty} \frac{1}{t^{\frac{d}{2}}} \text{Prob}\left\{\int_0^t X_{\Omega}(y+x(\tau)) d\tau > \beta | x(t) = 0\right\} dt dy$$

Если мы сейчас положим  $\tau = \beta\eta$ , то мы получим (13).

**3. Доказательство Теоремы 1.1.** Перепишем (13) в эквивалентную форму

$$\frac{1}{2(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\Omega} \int_0^{\infty} \frac{1}{t^{\frac{d}{2}}} \text{Prob}\left(\int_0^t \chi_{\Omega}(y+x(2\beta\eta)) d\eta > 1 | x(t) = 0\right) dt dy = \sum_{j=1}^{\infty} \exp\left(-\beta\lambda_j(\Omega)\right) \frac{1}{\lambda_j(\Omega)}, \forall \beta > 0, \forall y \in \Omega, \quad (15)$$

где  $\lambda_j(\Omega), j = 1, 2, \dots$  и  $u_j, j = 1, 2, \dots$  являются собственными значениями и соответствующими нормирующими собственными функциями нелокального оператора Лапласа (1)-(2) в  $\Omega$  и  $\chi_{\Omega}(x)$  это характеристическая функция  $\Omega$ , т.е.  $\chi_{\Omega}(x) = 1$  при  $x \in \Omega, \chi_{\Omega}(x) = 0$  при  $x \in R^d \setminus \Omega$ .

По Лемме 2.3 (см. [1]) мы имеем

$$\int_{\Omega} \text{Prob}\left(\int_0^t \chi_{\Omega}(y+x(2\beta\eta)) d\eta > 1 | x(t) = 0\right) dy \leq \int_{\Omega^*} \text{Prob}\left(\int_0^t \chi_{\Omega^*}(y+x(2\beta\eta)) d\eta > 1 | x(t) = 0\right) dy$$

для любого  $\beta > 0$ .

Поэтому из (15) получаем

$$\sum_{j=1}^{\infty} \exp\left(-\beta\lambda_j(\Omega)\right) \frac{1}{\lambda_j(\Omega)} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \exp\left(-\beta\lambda_j(\Omega^*)\right) \frac{1}{\lambda_j(\Omega^*)} \quad (16)$$

для любого  $\beta > 0$ .

Применяя преобразования Меллина

$$\frac{1}{\lambda^i} = \frac{1}{\Gamma(i)} \int_0^{\infty} \exp(-\beta\lambda) \beta^{i-1} d\beta$$

к неравенству (16), получаем

$$\zeta_{\Omega}(\rho) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^{\rho}(\Omega)} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^{\rho}(\Omega^*)} = \zeta_{\Omega^*}(\rho) \quad (17)$$

для любого  $\rho > d/2$ . Это завершает Теорему 1.1.

Замечание 3.1. Доказательство Теоремы 1.1. гораздо проще, когда  $p$  – натуральное число.

Действительно,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^{\rho}(\Omega)} = \int_{\Omega} \dots \int_{\Omega} \varepsilon_d(y_1 - y_2) \dots \varepsilon_d(y_p - y_1) dy_1 \dots y_p, \quad (18)$$

$p \in \mathbb{N}$ ,  $p > \frac{d}{2}$ .

Из неравенства Браскампа-Либа-Люттингера следует, что

$$\int_{\Omega} \dots \int_{\Omega} \varepsilon_d(y_1 - y_2) \dots \varepsilon_d(y_p - y_1) dy_1 \dots y_p \leq \int_{\Omega^*} \dots \int_{\Omega^*} \varepsilon_d(y_1 - y_2) \dots \varepsilon_d(y_p - y_1) dy_1 \dots y_p, \quad (19)$$

что доказывает

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^{\rho}(\Omega)} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^{\rho}(\Omega^*)}, \quad p \in \mathbb{N}, \quad p > \frac{d}{2}, \quad (20)$$

где  $\Omega^*$  - шар и  $|\Omega^*| = |\Omega|$ .

**Благодарности.** Авторы выражают благодарность профессору А. Лаптеву, факультет математики, Имперский колледж Лондона, за его полезные советы.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Кас М. On some connections between probability theory and differential and integral equations // Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1950, University of California Press, Berkeley and Los Angeles, – 1951, – P. 189-215.
- [2] Кас М. An application of probability theory to the study of Laplaces equation // Ann. Soc. Polon. Math., – 1953, – N 25, – P. 122-130.
- [3] Кас М. Integration in function spaces and some of its applications. – 1980. – PISA.
- [4] Кас М. Distribution of eigenvalues of certain integral operators // Mich. Math. J., – 1955, – N 3, – P. 141-148.
- [5] Kalmenov T. Sh., Suragan D. On spectral zeta functions for a nonlocal boundary value problem of the Laplacian // AIP Conference Proceedings, – 2013, – Vol. 1611, – P. 19-24.
- [6] Kalmenov T. Sh., Suragan D. Boundary conditions for the volume potential for the polyharmonic equation // Differential Equations, – 2012. – N 48, – P. 604-608.
- [7] Kalmenov T. Sh., Suragan D. To spectral problems for the volume potential // Doklady Mathematics, – 2009. – N 80, – P. 646-649.
- [8] Saito N. Data analysis and representation on a general domain using eigenfunctions of Laplacian // Appl. Comput. Harmon. Anal., – 2008, –N 25, – P. 68-97.
- [9] Laptev A. Dirichlet and Neumann eigenvalue problems on domains in Euclidean spaces // Journal of Functional Analysis, – 1997,–No 151, – P. 531-545.
- [10] Luttinger J. M. Generalized isoperimetric inequalities // J. Math. Phys., – 1973,–N 14, – P. 586-593.
- [11] Harrell E. M., Hermib L. Differential inequalities for Riesz means and Weyl-type bounds for eigenvalues // Journal of Functional Analysis, – 2008, –N 254, – P. 3173-3191.
- [12] Eskin G. Lectures on Linear Partial Differential Equations. – 2011. – Amer. Math. Soc.
- [13] Lieb E., Loss M. Analysis, 2nd ed. – 2001. – Amer. Math. Soc.
- [14] Henrot A. Extremum problems for eigenvalues of elliptic operators. – 2006. – Birkhauser, Basel.
- [15] Vladimirov V. S. Equations of mathematical physics, 2nd ed. – 1983. – Mir Publishers, Moscow.

#### REFERENCES

- [1] Кас М. *On some connections between probability theory and differential and integral equations*, Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1950, University of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1951, 189-215.
- [2] Кас М. *An application of probability theory to the study of Laplaces equation*, Ann. Soc. Polon. Math., – 1953, 25, 122-130.
- [3] Кас М. *Integration in function spaces and some of its applications*. 1980. PISA.
- [4] Кас М. *Distribution of eigenvalues of certain integral operators*, Mich. Math. J., 1955, 3, 141-148.
- [5] Kalmenov T. Sh., Suragan D. *On spectral zeta functions for a nonlocal boundary value problem of the Laplacian*, AIP Conference Proceedings, 2013, 1611, 19-24.

- [6] Kalmenov T. Sh., Suragan D. *Boundary conditions for the volume potential for the polyharmonic equation*, Differential Equations, – 2012. 48, 604-608.
- [7] Kalmenov T. Sh., Suragan D. *To spectral problems for the volume potential*, Doklady Mathematics, 2009. 80, 646-649.
- [8] Saito N. *Data analysis and representation on a general domain using eigenfunctions of Laplacian*, Appl. Comput. Harmon. Anal. 2008, 25, 68-97.
- [9] Laptev A. *Dirichlet and Neumann eigenvalue problems on domains in Euclidean spaces*, Journal of Functional Analysis, 1997, 151, 531-545.
- [10] Luttinger J. M. *Generalized isoperimetric inequalities*, J. Math. Phys., 1973, 14, 586-593.
- [11] Harrell E. M., Hermib L. *Differential inequalities for Riesz means and Weyl-type bounds for eigenvalues*, Journal of Functional Analysis, 2008, 254, 3173-3191.
- [12] Eskin G. *Lectures on Linear Partial Differential Equations*. 2011. Amer. Math. Soc.
- [13] Lieb E., Loss M. *Analysis*, 2nd ed., 2001. Amer. Math. Soc.
- [14] Henrot A. *Extremum problems for eigenvalues of elliptic operators*. 2006. Birkhauser, Basel.
- [15] Vladimirov V. S. *Equations of mathematical physics*, 2nd ed., 1983. Mir Publishers, Moscow.

## ПОТЕНЦИАЛДЫҢ ИНТЕГРАЛДЫҚ ШЕКАРАЛЫҚ ШАРТТЫ ЛАПЛАС ТЕНДЕУІ ҮШІН СПЕКТРАЛДЫҚ ЗЕТА ФУНКЦИЯЛАР ЖАЙЫНДА

Т. Ш. Кәлменов, Д. Сұраған

ҚР БҒМ Математика және математикалық моделдеу институты, Алматы, Қазақстан

**Тірек сөздер:** потенциалдың шекаралық шарты, Лаплас теңдеуі, спектралдық зета функциясы.

**Аннотация.** Жұмыста локалды емес Лаплас операторы үшін нақты мәнді спектралдық зета функциясын көп өлшемді евклидтік  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 3$  кеңістігіндегі өлшемі бірдей обьлыстардың ішінде шар максималдайтындығын дәлелдейміз. Бұл нәтиже негізінде Дирихле шекаралық шартымен Лаплас теңдеуіне арналған Люттингер теңсіздігінің баламасы болып табылады және де біздің бұрынғы үш өлшемді жағдайда алынған нәтижемізді жалпылайды. Дәлелдеу Кацдың потенциалдық ықтималдық теориясынан туындайды.

Поступила 13.01.2016 г.

---

**Publication Ethics and Publication Malpractice  
in the journals of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan**

---

For information on Ethics in publishing and Ethical guidelines for journal publication see <http://www.elsevier.com/publishingethics> and <http://www.elsevier.com/journal-authors/ethics>.

Submission of an article to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan implies that the described work has not been published previously (except in the form of an abstract or as part of a published lecture or academic thesis or as an electronic preprint, see <http://www.elsevier.com/postingpolicy>), that it is not under consideration for publication elsewhere, that its publication is approved by all authors and tacitly or explicitly by the responsible authorities where the work was carried out, and that, if accepted, it will not be published elsewhere in the same form, in English or in any other language, including electronically without the written consent of the copyright-holder. In particular, translations into English of papers already published in another language are not accepted.

No other forms of scientific misconduct are allowed, such as plagiarism, falsification, fraudulent data, incorrect interpretation of other works, incorrect citations, etc. The National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan follows the Code of Conduct of the Committee on Publication Ethics (COPE), and follows the COPE Flowcharts for Resolving Cases of Suspected Misconduct ([http://publicationethics.org/files/u2/New\\_Code.pdf](http://publicationethics.org/files/u2/New_Code.pdf)). To verify originality, your article may be checked by the Cross Check originality detection service <http://www.elsevier.com/editors/plagdetect>.

The authors are obliged to participate in peer review process and be ready to provide corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. All authors of a paper should have significantly contributed to the research.

The reviewers should provide objective judgments and should point out relevant published works which are not yet cited. Reviewed articles should be treated confidentially. The reviewers will be chosen in such a way that there is no conflict of interests with respect to the research, the authors and/or the research funders.

The editors have complete responsibility and authority to reject or accept a paper, and they will only accept a paper when reasonably certain. They will preserve anonymity of reviewers and promote publication of corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. The acceptance of a paper automatically implies the copyright transfer to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.

The Editorial Board of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan will monitor and safeguard publishing ethics.

Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайте:

[www:nauka-nanrk.kz](http://www.nauka-nanrk.kz)

<http://www.physics-mathematics.kz>

Редактор *М. С. Ахметова*  
Верстка на компьютере *Д. Н. Калкабековой*

Подписано в печать 16.01.2016.  
Формат 60x881/8. Бумага офсетная. Печать – ризограф.  
10,7 п.л. Тираж 300. Заказ 1.