ISSN 1991-346X

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ

Х А Б А Р Л А Р Ы

ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

N E W S

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА
СЕРИЯСЫ

♦

СЕРИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

♦

PHYSICO-MATHEMATICAL
SERIES

1 (305)

ҚАНТАР – АҚПАН 2016 ж.
ЯНВАРЬ – ФЕВРАЛЬ 2016 г.
JANUARY – FEBRUARY 2016

1963 ЖЫЛДЫҢ ҚАҢТАР АЙЫНАН ШЫҒА БАСТАҒАН
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1963 ГОДА
PUBLISHED SINCE JANUARY 1963

ЖЫЛЫНА 6 РЕТ ШЫҒАДЫ
ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД
PUBLISHED 6 TIMES A YEAR

АЛМАТЫ, ҚР ҰҒА
АЛМАТЫ, НАН РК
ALMATY, NAS RK

«Известия НАН РК. Серия физико-математическая». ISSN 1991-346X
Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы)
Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации и архивов Министерства культуры и информации Республики Казахстан **№5543-Ж**, выданное 01.06.2006 г.

Периодичность: 6 раз в год.
Тираж: 300 экземпляров.

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, ком. 219, 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,
www:nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75.

News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physical-mathematical series.
ISSN 1991-346X
Owner: RPA "National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan" (Almaty)
The certificate of registration of a periodic printed publication in the Committee of information and archives of the Ministry of culture and information of the Republic of Kazakhstan N 5543-Ж, issued 01.06.2006

Periodicity: 6 times a year
Circulation: 300 copies

Editorial address: 28, Shevchenko str., of. 219, 220, Almaty, 050010, tel. 272-13-19, 272-13-18,
www:nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

Address of printing house: ST "Aruna", 75, Muratbayev str, Almaty

N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 1, Number 305 (2016), 166 – 177

THE FIRST SYSTEM OF CANONICAL ELEMENTS POINCARE IN THE SECOND HILL'S PROBLEM

S. S. Dairbekov, M. D. Shinibaev, A. Narimbetova, O. Utegenov, D. Tanabaeva

University of Syr-Daria, Zhetysai, Kazakhstan.
E-mail: shinibaev_maxsut@mail.ru

Key words: system of canonical elements Poincare intermediate orbit, the method of osculating elements, earth satellite, the decision in quadrature, binomial series.

Abstract. In 1905, Henri Poincare published the first volume of the textbook "Lectures on celestial mechanics", which is called the author of "The general theory of planetary perturbations". It Henri Poincare introduces two systems of canonical elements [1].

In accordance with [2] the first system of canonical elements was designed to study the perturbed motion of a celestial body on a nearly circular orbit that lies almost in the main plane. This means that the system of canonical elements suitable for study of the disturbed motion of the body only in very small tilt and eccentricity of the orbit.

The article presents a new method that allows the use of this system for the study of canonical elements of the perturbed motion in the cases, $e \le e_л$ when the eccentricity of the orbit is less than or equal to the limit of the Laplace $e_л$. By the same method extends the use of the elements and the case where the orbit inclination smaller than the critical angle. The study is valuable in the construction of new intermediate satellites perturbed motions.

УДК 531.1+629.195

ПЕРВАЯ СИСТЕМА КАОНОНИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ ПУАНКАРЕ ВО ВТОРОЙ ЗАДАЧЕ ХИЛЛА

С. С. Дайырбеков, М. Д. Шинибаев, А. Наримбетова, О. Утегенов, Д. Танабаева

Университет Сыр-Дария, Джетысай, Казахстан

Ключевые слова: система канонических элементов Пуанкаре, промежуточная орбита, метод оскулирующих элементов, спутник Земли, решение в квадратурах, биномиальный ряд.

Аннотация. В 1905 году Анри Пуанкаре издал первый том учебника «Лекции по небесной механике», который назван автором «Общая теория планетных возмущений». В нем Анри Пуанкаре вводит две системы канонических элементов [1]. В соответствие с [2] первая система канонических элементов была предназначена для изучения возмущенного движения небесного тела по почти круговой орбите, лежащей почти в основной плоскости. Это означает, что система канонических элементов пригодна для изучения возмущенного движения тела только при очень малых наклонах и эксцентриситетах орбит.

В статье дается новый метод, который позволяет использовать эту систему канонических элементов для изучения возмущенного движения в случаях $e \le e_л$, то есть когда эксцентриситет орбиты меньше предела Лапласа или равен $e_л$. К тому же метод расширяет возможности использования элементов и на случай, когда наклон орбиты меньше критического наклона. Исследование представляет ценность при построении новых промежуточных возмущенных движений ИСЗ.

Рассмотрим движение ИСЗ в поле тяготения центрального и внешнего тела [3]

$$U = \frac{\mu}{r} + \frac{1}{2}\nu r^2 - \frac{3}{2}\nu z^2, \tag{1}$$

где первый член правой части дает поле тяготения «шара» со сферическим распределением плотности, что приемлемо для далеких ИСЗ, остальные члены дают возмущения от внешнего тела, причем постоянная ν подбирается так, чтобы движения узла и перицентра орбиты ИСЗ совпадали с наблюдениями; μ – гравитационный параметр, r – модуль радиуса-вектора ИСЗ, z – ее аппликата.

В соответствие с (1) пертурбационная функция имеет вид

$$R = H_1 = \frac{1}{2} r^2 \nu (1 - \sin^2 u \sin^2 i). \tag{2}$$

Невозмущенному движению соответствуют следующие выражения [4]:

$$\left.\begin{aligned} x &= r(\cos u \cos\Omega - \sin u \sin\Omega \cos i), \\ y &= r(\cos u \sin\Omega + \sin u \cos\Omega \cos i), \\ z &= r \sin u \sin i, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos\upsilon}, \tag{4}$$

где a – большая полуось, e – эксцентриситет, i – наклон, υ – истинная аномалия, $u = \upsilon + \omega$, Ω – долгота восходящего узла, ω – угловое расстояние перицентра, u – аргумент широты.

Запишем функцию Гамильтона

$$H = T - U = \left(\frac{\mathrm{v}^2}{2} - \frac{\mu}{r}\right) - \frac{1}{2}\nu(r^2 - 3z^2), \tag{5}$$

где v – скорость в невозмущенном движении [5].

$$H_0 = \frac{\mathrm{v}^2}{2} - \frac{\mu}{r} = h = \frac{\mu}{2a} - const,$$

следовательно, (5) примет вид

$$H = \frac{\mu}{2a} - \frac{1}{2}\nu(r^2 - 3z^2) = \frac{\mu}{2a} + H_1, \quad H_1 = -\frac{1}{2}\nu(r^2 - 3z^2). \tag{6}$$

Выпишем первую систему канонических элементов Пуанкаре [6]:

$$\left.\begin{aligned} &L = \sqrt{\mu a}, \quad \lambda = \ell + \pi = nt + \varepsilon, \\ &\rho_1 = \sqrt{\mu a}\cdot(1 - \sqrt{1-e^2}), \ \ \omega_1 = -\pi, \\ &\rho_2 = \sqrt{\mu a}\cdot\sqrt{1-e^2}\cdot(1-\cos i), \ \omega_2 = -\Omega, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$\pi = \Omega + \omega$ – долгота перицентра.

В элементах (7) уравнения возмущенного движения ИСЗ имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dL}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \lambda}, \quad \frac{d\rho_1}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \omega_1}, \quad \frac{d\rho_2}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \omega_2}, \\ &\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial L}, \quad \frac{d\omega_1}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial \rho_1}, \quad \frac{d\omega_2}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial \rho_2}, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

где $F = \dfrac{\mu^2}{2L^2} + H_1$, причем $H_0 = \dfrac{\mu}{2a} = \dfrac{\mu^2}{2L^2}$ – гамильтониан невозмущенного движения, H_1 – пертурбационная функция.

В соответствие с [6] координаты *x*,*y*,z и канонические элементы первой системы связаны так:

$$\left.\begin{aligned}
x &= \frac{(L-\rho_1)^2}{\mu(1+e\cos\upsilon)}\left[\cos(\upsilon+\omega_2-\omega_1)\cos\omega_2+\sin(\upsilon+\omega_2-\omega_1)\sin\omega_2\cdot\frac{L-\rho_1-\rho_2}{L-\rho_1}\right],\\
y &= \frac{(L-\rho_1)^2}{\mu(1+e\cos\upsilon)}\left[-\cos(\upsilon+\omega_2-\omega_1)\sin\omega_2+\sin(\upsilon+\omega_2-\omega_1)\cos_2\cdot\frac{L-\rho_1-\rho_2}{L-\rho_1}\right],\\
z &= \frac{(L-\rho_1)}{\mu(1+e\cos\upsilon)}\cdot\sin(\upsilon+\omega_2-\omega_1)\cdot\sqrt{2\rho_2(L-\rho_1)-\rho_2^2},\\
e &= \sqrt{\frac{\rho_1}{L}\left(2-\frac{\rho_1}{L}\right)},\qquad \lambda+\omega_1=\left(1-\frac{\rho_1}{L}\right)^3\int_0^\upsilon\frac{d\upsilon}{(1+e\cos\upsilon)^2},\qquad r=\frac{(L-\rho_1)^2}{\mu(1+e\cos\upsilon)}.
\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

Выразим H_1 через канонические элементы первой системы

$$\left.\begin{aligned}
H_1 &= -\frac{\nu}{2}\left\{\frac{(L-\rho_1)^2}{\mu(1+e\cos\upsilon)}\left[1-3\sin(\upsilon+\omega_2-\omega_1)\cdot\frac{\sqrt{2\rho_2(L-\rho_1)-\rho_2^2}}{(L-\rho_1)}\right]\right\}^2,\\
F &= \frac{\mu^2}{2L^2}+H_1, H_1 \ll \frac{\mu^2}{2L^2},\quad \text{ïðè ëþáîì}\quad \upsilon,\ \nu\approx Î(10^{-7})\div Î(10^{-11}).
\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

Учитывая (10), перепишем (8)

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dL}{dt}=0,\quad \frac{d\rho_1}{dt}=\frac{\partial H_1}{\partial\omega_1},\quad \frac{d\rho_2}{dt}=\frac{\partial H_1}{\partial\omega_2},\\
&\frac{d\lambda}{dt}=\frac{\mu^2}{L^3}-\frac{\partial H_1}{\partial L},\quad \frac{d\omega_1}{dt}=-\frac{\partial H_1}{\partial\rho_1},\quad \frac{d\omega_2}{dt}=-\frac{\partial H_1}{\partial\rho_2}.
\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

Когда $\nu=0$, $H_1=0$, поэтому из (11) имеем:

$$L^0=\sqrt{\mu a_0},\ \rho_1=\rho_1^0=L^0(1-\sqrt{1-e_0^2}=\frac{1}{2}L^0e_0^2+O(e_0^4),$$

$$\rho_2=\rho_2^0=L^0\left(1-\cos i_0-\frac{1}{2}e_0^2+\frac{1}{2}e_0^2\cos i_0\right),\ \omega_1=-\Omega_0-\omega_0,\ \omega_2=-\Omega_0,$$

$$\lambda=\lambda^0=\ell_0+\pi_0=n(t_0-\tau)+\Omega_0+\omega_0,\ \text{если}\ t_0=\tau,\ \text{то}\ \lambda^0=\Omega_0+\omega_0.$$

При $\nu\neq 0$, $H_1\neq 0$, поэтому из (11) имеем

$$\rho_1=\rho_1(t),\ \rho_2=\rho_2(t),\ \omega_1=\omega_1(t),\ \omega_2=\omega_2(t),\ \lambda=\lambda(t),$$

здесь

$$L\left[\frac{ì^2}{ñ}\right],\ \rho_1\left[\frac{ì^2}{ñ}\right],\ \rho_2\left[\frac{ì^2}{ñ}\right],\ \omega_1[ðàä],\ \omega_2[ðàä],\ \lambda[ðàä],$$

отсюда в силу

$$H_1 \ll H_0,\ H_1\le a^2\nu e,\ e\ge e_{ё}$$

по крайней мере, на конечном интервале $\Delta t=t-\tau$ имеем

$$\Delta L=0,\ \Delta\rho_1\le a^2\nu e\cdot\Delta t,\ \Delta\rho_2\le a^2\nu e\cdot\Delta t,$$

поэтому наша теория должна удовлетворительно работать на следующем временном интервале

$$\Delta t = \frac{\rho^{\max}}{a^2 \nu e}, \tag{12}$$

где $\rho^{\max} = \max\{\rho_1, \rho_2\}$.

Рассмотрим второе уравнение из (11)

$$\frac{d\rho_1}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial \omega_1},$$

здесь

$$\frac{\partial H_1}{\partial \omega_1} = -\frac{\nu}{2} r^2 \cdot \frac{\partial}{\partial \omega_1}\left[1 - 3\sin(\upsilon + \omega_2 - \omega_1)\cdot \frac{\sqrt{2\rho_2(L-\rho_1)-\rho_2^2}}{(L-\rho_1)}\right]^2 = \tag{13}$$

$$= -\frac{\nu}{2} r^2 \cdot 2 \cdot \left[1 - 3\sin(\upsilon + \omega_2 - \omega_1)\cdot \frac{\sqrt{2\rho_2(L-\rho_1)-\rho_2^2}}{(L-\rho_1)}\right] \cdot 3\cos(\upsilon + \omega_2 - \omega_1)\cdot \frac{\sqrt{2\rho_2(L-\rho_1)-\rho_2^2}}{(L-\rho_1)}.$$

В (13) учтем следующие разложения в биномиальные ряды:

$$r^2 = \left[\frac{a(1-e^2)}{\mu(1+e\cos\upsilon)}\right]^2 = \frac{a^2}{\mu^2}\left(1 - 2e\cos\upsilon - \frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{2}e^2\cos 2\upsilon\right), \tag{14}$$

$$\frac{\sqrt{2\rho_2(L-\rho_1)-\rho_2^2}}{(L-\rho_1)} = \sin i, \tag{15}$$

тогда

$$\begin{aligned}\frac{d\rho_1}{dt} = \nu_{\rho_1}\{&a_0 e\cos(\omega_2-\omega_1) + a_{02}e^2\sin(2\omega_2-2\omega_1) + a_{02}e^2\sin(4\upsilon+2\omega_2-2\omega_1) + \\ &+ (a_{10}+a_{12}e^2)\cos(\upsilon+\omega_2-\omega_1) + a_0 e\cos(2\upsilon+\omega_2-\omega_1) + a_{22}e^2\cos(3\upsilon+\omega_2-\omega_1) + \\ &+ a_{22}e^2\cos(\upsilon-\omega_2+\omega_1) + (a_{30}+e^2 a_{32})\sin(2\upsilon+2\omega_2-2\omega_1) + \\ &+ a_{41}e\sin(\upsilon+2\omega_2-2\omega_1) + a_{41}e\sin(3\upsilon+2\omega_2-2\omega_1)\},\end{aligned} \tag{16}$$

где:

$$\nu_{\rho_1} = -\nu\frac{a^2}{\mu^2},\ a_0 = -3\sin i,\ a_{02} = -\frac{27}{8}\sin^2 i,\ a_{10} = 3\sin i,\ a_{12} = -\frac{3}{2}\sin i,$$

$$a_{22} = \frac{9}{4}\sin^2 i,\ a_{30} = -\frac{9}{2}\sin^2 i,\ a_{32} = \frac{9}{4}\sin^2 i,\ a_{41} = \frac{9}{2}\sin^2 i.$$

Рассмотрим третье уравнение из (11)

$$\frac{d\rho_2}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial \omega_2},$$

здесь

$$\frac{\partial H_1}{\partial \omega_2} = \nu r^2\left[1 - 3\sin(\upsilon + \omega_2 - \omega_1)\cdot \frac{\sqrt{2\rho_2(L-\rho_1)-\rho_2^2}}{(L-\rho_1)}\right] \cdot 3\cos(\upsilon + \omega_2 - \omega_1) \times$$

$$\times \frac{\sqrt{2\rho_2(L-\rho_1)-\rho_2^2}}{(L-\rho_1)}. \tag{17}$$

Сопоставляя (13) с (17), убеждаемся в том, что

$$\frac{dH_1}{d\omega_1} = -\frac{\partial H_1}{\partial \omega_2},$$

поэтому имеем из (16)

$$\frac{d\rho_2}{dt} = -\frac{\partial \rho_1}{\partial t}. \tag{18}$$

Рассмотрим четвертое уравнение из (11)

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{\mu^2}{L^3} - \frac{\partial H_1}{\partial L}, \tag{19}$$

здесь введем обозначения:

$$\left.\begin{aligned} &A = \frac{(L-\rho_1)^2}{\mu(1+e\cos\upsilon)} = \frac{C}{D}, \\ &B = 1 - 3\sin(\upsilon+\omega_2-\omega_1)\frac{\sqrt{2\rho_2(L-\rho_1)-\rho_2^2}}{(L-\rho_1)} = 1 - 3\sin(\upsilon+\omega_2-\omega_1)\frac{E}{N}, \\ &C = L^2(1-e^2), \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

тогда

$$-\frac{\partial H_1}{\partial L} = v(A\cdot B)[A'_L B + AB'_L],$$

где учитывая (14) и (15), имеем

$$\left.\begin{aligned} &A = \frac{a^2}{\mu^2}\left(1 - \frac{1}{2}e^2 - 2e\cos\upsilon + \frac{3}{2}e^2\cos 2\upsilon,\right), \\ &B = 1 - 3\sin(\upsilon+\omega_2-\omega_1)\sin i. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Вычислим A'_L и B'_L:

$$\left.\begin{aligned} &A'_L = \frac{L}{2\mu}(4 - 3e^2 - 3e\cos\upsilon + e^2\cos 2\upsilon), \\ &B'_L = K_{00}\left(1 + \frac{1}{2}e^2\right)\sin(\upsilon+\omega_2-\omega_1), \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

где

$$K_{00} = -\frac{3}{L}\operatorname{ctg} i\cdot(1-\cos i).$$

Подставляя (21) и (22) в (19), найдем

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda}{dt} = \frac{\mu^2}{L^3} + v\cdot\Big\{&(D_{00} + eD_{01} + e^2D_{02}) + (D_{11}e + D_{12}e^2)\cos\upsilon + D_{22}e^2\cos 2\upsilon + \\ &+ (D_{30} + D_{31}e + D_{32}e^2)\sin(\upsilon+\omega_2-\omega_1) + (D_{41}e + D_{42}e^2)\sin(2\upsilon+\omega_2-\omega_1) + \\ &+ D_{52}e^2\sin(\upsilon-\omega_2+\omega_1) + D_{62}e^2\sin(3\upsilon-\omega_2+\omega_1) + (D_{70} + D_{72}e^2)\times \\ &\times\cos(2\upsilon+2\omega_2-2\omega_1) + D_{71}e\cos(3\upsilon+2\omega_2-2\omega_1) + D_{82}e^2\cos(4\upsilon+2\omega_2-2\omega_1)\Big\}, \end{aligned} \tag{23}$$

где введены следующие обозначения:

$$D_{00} = c_{00} + \frac{1}{2}c_{30}d_{20}\,,\; D_{01} = c_{00}d_{01} + c_{01}d_{00} + \frac{1}{2}[c_{11}d_{20} + d_{11}c_{30}]\sin(\omega_2 - \omega_1)\,,$$

$$D_{02} = \frac{1}{2}[c_{11}d_{11} + c_{31}d_{21} + c_{30}d_{22} + c_{32}d_{20} - c_{42}d_{20}\cos(2\omega_2 - 2\omega_1)] +$$

$$+ c_{00}d_{02} + c_{01}d_{01} + c_{02}d_{00}\,,\; D_{11} = c_{00}d_{11} + c_{11}d_{00} + \frac{1}{2}(d_{21}c_{30} + c_{31}d_{20})\,,$$

$$D_{12} = c_{01}d_{11} + c_{11}d_{01}\,,\; D_{22} = c_{00}d_{12} + \frac{1}{2}c_{11}d_{11} + c_{22}d_{00} + c_{42}d_{20}\,,$$

$$D_{30} = d_{20}c_{00} + d_{00}c_{30}\,,\; D_{31} = d_{20}c_{01} + c_{30}d_{01}\,,$$

$$D_{32} = d_{20}c_{02} + c_{00}d_{22} + d_{00}c_{32} + d_{02}c_{30} + \frac{1}{2}(d_{21} + d_{11})c_{11}\,,$$

$$D_{41} = c_{00}d_{21} + c_{31}d_{00} + \frac{1}{2}(c_{11}d_{20} + d_{11}c_{30})\,,\; D_{42} = c_{01}d_{21} + d_{01}c_{31}\,,$$

$$D_{52} = c_{00}d_{32} - \frac{1}{2}d_{20}c_{22} - c_{42}d_{00}\,,\; D_{72} = -\frac{1}{2}(c_{30}d_{22} + c_{32}d_{20})\,,$$

$$D_{62} = -c_{00}d_{31} + \frac{1}{2}(d_{21}c_{11} + d_{20}c_{22} + c_{31}d_{11}) + c_{42}d_{00}\,,\; D_{70} = -\frac{1}{2}c_{30}d_{20}\,,$$

$$D_{71} = -\frac{1}{2}(c_{30}d_{21} + c_{31}d_{20})\,,\; D_{82} = -\frac{1}{2}(c_{31}d_{21} + c_{42}d_{20})\,;$$

$$d_{00} = \frac{2L}{\mu}\,,\; d_{01} = \sin(\omega_2 - \omega_1)\cdot\left(\frac{9L}{4\mu}\sin i - \frac{K_{00}a^2}{\mu^2}\right),\; d_{02} = -\frac{3L}{2\mu}\,,\; d_{11} = -\frac{3L}{\mu}\,,$$

$$d_{22} = \frac{9L}{2\mu}\sin i\,,\; d_{21} = \frac{1}{\mu}\cdot\left(\frac{9L}{4}\sin i - \frac{K_{00}a^2}{\mu}\right),\; d_{32} = \frac{3}{2\mu}\cdot\left(L\sin i - \frac{K_{00}a^2}{2\mu}\right),$$

$$d_{12} = \frac{L}{\mu}\,,\; d_{20} = \frac{1}{\mu}\cdot\left(-6L\sin i + \frac{K_{00}a^2}{\mu}\right),\; c_{00} = \frac{a^2}{\mu^2}\,,$$

$$c_{01} = \frac{3a^2}{\mu^2}\sin i\sin(\omega_2 - \omega_1)\,,\; c_{02} = -\frac{a^2}{2\mu^2}\,,\; c_{30} = -\frac{3a^2\sin i}{\mu^2}\,,\; c_{32} = \frac{3a^2\sin i}{2\mu^2}\,,$$

$$c_{31} = \frac{3a^2}{\mu^2}\sin i\,,\; c_{42} = -\frac{9}{4}\frac{a^2}{\mu^2}\sin i\,,\; c_{11} = -\frac{2a^2}{\mu^2}\,,\; c_{22} = \frac{3a^2}{2\mu^2}\,.$$

Рассмотрим предпоследнее уравнение из (11)

$$\frac{d\omega_1}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial\rho_1}\,.$$

Введем обозначения в (10)

$$H_1 = -\frac{\nu}{2}\{A\cdot B\}^2\text{, где } A = \frac{(L-\rho_1)^2}{\mu(1+e\cos\upsilon)}\,,\; e = \left(\frac{2\rho_1}{L} - \frac{\rho_1^2}{L^2}\right)^{1/2},$$

$$B = 1 - 3\sin(\upsilon + \omega_2 - \omega_1)\cdot\frac{\sqrt{2\rho_2(L-\rho_1) - \rho_2^2}}{(L-\rho_1)}\,,\; A = \frac{C}{D}\,,\; C = (L-\rho_1)^2\,,$$

$$D=\mu(1+e\cos\upsilon)\,,\ \frac{E}{N}=\frac{\sqrt{2\rho_2(L-\rho_1)-\rho_2^2}}{(L-\rho_1)}\,,\ B=1-3\sin(\upsilon+\omega_2-\omega_1)\cdot\frac{E}{N}\,,$$

тогда

$$\frac{\partial H_1}{\partial\rho_1}=\nu(A\cdot B)\cdot(A'_{\rho_1}\cdot B+A\cdot B'_{\rho_1})\,, \tag{24}$$

где:

$$A'_{\rho_1}=\frac{[(L-\rho_1)^2]'_{\rho_1}\mu(1+e\cos\upsilon)-(L-\rho_1)^2\mu[(1+e\cos\upsilon)]'_{\rho_1}}{[\mu(1+e\cos\upsilon)]^2}\,,$$

$$B'_{\rho_1}=-3\sin(\upsilon+\omega_2-\omega_1)\cdot\frac{E'_{\rho_1}N-EN'_{\rho_1}}{N^2}\,.$$

Вычислим частные производные:

$$[(L-\rho_1)^2]'_{\rho_1}=2(L-\rho_1)\cdot(-1)=-2(L-\rho_1)=-2L\left(1-\frac{1}{2}e^2\right),$$

$$[\mu(1+e\cos\upsilon)]^{-2}=\mu^{-2}\left(1-2e\cos\upsilon+\frac{3}{2}e^2+\frac{3}{2}e^2\cos 2\upsilon\right),$$

$$\mu(L-\rho_1)^2=\mu L^2(1-e^2)\,,\ [(1+e\cos\upsilon)]'_{\rho_1}=e'_{\rho_1}\cos\upsilon=\frac{1}{L}\left(\frac{1}{e}-\frac{1}{2}e\right)\cos\upsilon\,,$$

подставив в A'_{ρ_1}, найдем

$$A'_{\rho_1}=-\frac{L}{\mu e}\left[e+\left(1-\frac{5}{4}e^2\right)\cos\upsilon-e\cos 2\upsilon+\frac{3}{4}e^2\cos 3\upsilon\right].$$

Вычислим B'_{ρ_1}

$$B'_{\rho_1}=K\left(1+\frac{3}{2}e^2\right)\sin(\upsilon+\omega_2-\omega_1)\,,\quad K=-\frac{3}{L}\operatorname{ctg} i\cdot(1-\cos i)\,.$$

Подставив найденные A'_{ρ_1} и B'_{ρ_1} в (24), найдем:

$$\begin{aligned}\frac{d\omega_1}{dt}=\frac{\nu}{e}\Big\{&(B_{00}+eB_{01}+e^2B_{02})+(B_{10}+eB_{11}+e^2B_{12})\cos\upsilon+(eB_{21}+e^2B_{22})\cos 2\upsilon+\\&+e^2B_{32}\cos 3\upsilon+(eB_{41}+e^2B_{42})\sin(\upsilon+\omega_2-\omega_1)+(B_{50}+eB_{51}+e^2B_{52})\times\\&\times\sin(2\upsilon+\omega_2-\omega_1)+(B_{61}e+e^2B_{62})\sin(\upsilon-\omega_2+\omega_1)+(eB_{71}+e^2B_{72})\times\\&\times\sin(3\upsilon+\omega_2-\omega_1)+e^2B_{82}\sin(4\upsilon+\omega_2-\omega_1)+e^2B_{92}\sin(2\upsilon-\omega_2+\omega_1)+\\&+eB_{101}\cos 2(\upsilon+\omega_2-\omega_1)+(B_{100}+e^2B_{102})\cos(3\upsilon+2\omega_2-2\omega_1)+\\&+eB_{111}\cos(4\upsilon+2\omega_2-2\omega_1)+e^2B_{112}\cos(5\upsilon+2\omega_2-2\omega_1)+\\&+e^2B_{122}\cos(\upsilon-2\omega_2+2\omega_1)+e^2B_{132}\cos(\upsilon+2\omega_2-2\omega_1)\Big\},\end{aligned} \tag{25}$$

где:

$$B_{00}=A_0c_{00},\ B_{01}=A_{00}c_{00}+c_{01}A_0+\frac{1}{2}[c_{11}A_0+c_{30}A_{20}+c_{31}A_{40}+c_{30}A_5\times$$

$$\times\cos(2\omega_2-2\omega_1)],\ B_{10}=c_{00}A_0-\frac{1}{2}c_{30}A_{40},\ B_{02}=c_{00}(A_{01}+A_{00})+c_{02}A_0+$$

$$+\frac{1}{2}\sin(\omega_2-\omega_1)\cdot[c_{42}A_0+c_{11}A_{20}-c_{11}A_{50}-A_{00}c_{31}],$$

$$B_{12}=c_{00}A_{11}+A_0\left(c_{02}+\frac{1}{2}c_{22}\right)+\frac{1}{2}(c_{31}A_{60}+c_{11}A_{00}+c_{42}A_{40}-c_{30}A_{41}),$$

$$B_{21}=\frac{1}{2}c_{30}(A_{60}-A_{50})+\frac{1}{2}(c_{11}A_0-A_{00}c_{00}),\ B_{22}=c_{22}A_0-A_{00}c_{01},$$

$$B_{32}=c_{00}A_{21}+c_{30}A_{51}+\frac{1}{2}(c_{22}A_0-c_{11}A_{00}-c_{31}A_{50}+c_{42}A_{40}),$$

$$B_{41}=c_{00}A_{20}+\frac{1}{2}(c_{11}A_{40}+c_{31}A_0),\ B_{42}=c_{01}A_{20},\ B_{11}=A_0(c_{01}+c_{11})+\frac{1}{2}c_{31}A_{20},$$

$$B_{50}=c_{00}A_{40},\ B_{51}=c_{01}A_{40}+c_{31}A_0,\ B_{52}=A_{41}c_{00}+c_{02}A_{40}+\frac{1}{2}c_{11}(A_{60}+A_{20})+$$

$$+c_{31}A_{00}+\frac{1}{2}c_{42}A_0,\ B_{61}=A_{50}c_{00},\ B_{62}=c_{01}A_{50}-A_0c_{42},$$

$$B_{71}=c_{00}A_{60}+\frac{1}{2}(c_{11}A_{40}+c_{31}A_0),\ B_{72}=c_{01}A_{60}+c_{42}A_0,$$

$$B_{82}=c_{00}A_{31}+\frac{1}{2}(c_{11}A_{60}-c_{31}A_{00}+c_{42}A_0+c_{30}A_{21}),\ B_{100}=\frac{1}{2}c_{30}A_{40},$$

$$B_{92}=-c_{00}A_{51}+\frac{1}{2}(c_{11}A_{50}-A_{21}c_{30}-c_{42}A_0),\ B_{101}=-\frac{1}{2}c_{30}A_{20},$$

$$B_{102}=\frac{1}{2}(c_{30}A_{41}-c_{31}A_{20}+c_{32}A_{40}),\ B_{111}=-\frac{1}{2}(c_{30}A_{60}+c_{31}A_{40}),$$

$$B_{112}=-\frac{1}{2}(c_{30}A_{51}+c_{31}A_{60}+c_{42}A_{40}),\ B_{122}=-\frac{1}{2}c_{30}A_{51},$$

$$B_{132}=\frac{1}{2}(c_{31}A_{50}-c_{42}A_{40}),\ A_{00}=-\frac{L}{\mu},\ A_0=\frac{3L}{2\mu}\sin i\sin(\omega_2-\omega_1),$$

$$A_{11}=-\frac{5}{4}A_{00},\ A_{01}=-\left(K\frac{a^2}{\mu^2}+\frac{15L}{8\mu}\sin i\right)\sin(\omega_2-\omega_1),\ A_{21}=\frac{3}{4}A_{00},$$

$$A_{20}=\frac{3L}{\mu}\sin i+K\frac{a^2}{\mu^2},\ A_{22}=K\frac{a^2}{\mu^2},\ A_{40}=\frac{3L}{2\mu}\sin i,\ A_{41}=-\left(A_{22}+\frac{5}{2}A_{40}\right),$$

$$A_{50}=\frac{3L\sin i}{2\mu},\ A_{52}=-\frac{3}{4}A_{22},\ A_{60}=-\frac{L\sin i}{2\mu},\ A_{62}=-A_{52},\ A_{51}=\frac{1}{4}A_{50}.$$

Рассмотрим последнее уравнение из (11)

$$\frac{d\omega_2}{dt}=-\frac{\partial H_1}{\partial\rho_2}. \tag{26}$$

Здесь ρ_2 входит только во второй сомножитель H_1, поэтому

$$-\frac{\partial H_1}{\partial \rho_2} = \frac{\nu}{2} \cdot A^2 \frac{\partial}{\partial \rho_2}(B^2) = \nu A^2 B \cdot B'_{\rho_2}.$$

Найдем B'_{ρ_2}:

$$B'_{\rho_2} = -3\sin(\upsilon + \omega_2 - \omega_1) \cdot \frac{1}{(L-\rho_1)} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2\rho_2(L-\rho_1) - \rho_2^2}} \cdot [2(L-\rho_1) - 2\rho_2] =$$

$$= -3\sin(\upsilon + \omega_2 - \omega_1) \cdot \frac{1}{(L-\rho_1)} \cdot \frac{(L-\rho_1) - \rho_2}{\sqrt{2\rho_2(L-\rho_1) - \rho_2^2}},$$

здесь используем ранее выполненные разложения в биномиальные ряды, тогда (26) примет вид:

$$\frac{d\omega_2}{dt} = \nu\ell_0 \{(\ell_{00} + \ell_{01}e + \ell_{02}e^2) + (\ell_{11}e + \ell_{12}e^2)\cos\upsilon + \ell_{22}e^2\cos 2\upsilon +$$
$$+ (\ell_{30} + \ell_{31}e + \ell_{32}e^2)\sin(\upsilon + \omega_2 - \omega_1) + (\ell_{41}e + \ell_{42}e^2)\sin(2\upsilon + \omega_2 - \omega_1) +$$
$$+ \ell_{52}e^2\sin(3\upsilon + \omega_2 - \omega_1) + \ell_{62}e^2\sin(\upsilon - \omega_2 + \omega_1) + (\ell_{70} + \ell_{72}e^2) \times$$
$$\times \cos(2\upsilon + 2\omega_2 - 2\omega_1) + \ell_{71}e\cos(3\upsilon + 2\omega_2 - 2\omega_1) + \ell_{82}e^2\cos(4\upsilon + 2\omega_2 - 2\omega_1)\}, \quad (27)$$

где:

$$\ell_0 = R_{00}\frac{a^2}{\mu^2},\ \ell_{00} = \left(\frac{1}{2}c_{11} - c_{00}\right)\sin(\omega_2 - \omega_1),$$

$$\ell_{02} = \frac{1}{2}(c_{32} - c_{31}) - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}c_{30} + c_{42}\right)\cos(2\omega_2 - \omega_1),\ \ell_{11} = \frac{1}{2}(c_{31} - c_{30}),$$

$$\ell_{12} = -c_{11}\sin(\omega_2 - \omega_1),\ \ell_{22} = c_{42} + \frac{3}{4}c_{30},\ \ell_{30} = c_{00},\ \ell_{31} = c_{01} - c_{30}\sin(\omega_2 - \omega_1),$$

$$\ell_{32} = c_{02} - \frac{1}{2}c_{11},\ \ell_{41} = \frac{1}{2}c_{11} - c_{00},\ \ell_{42} = -c_{31}\sin(\omega_2 - \omega_1),$$

$$\ell_{52} = \frac{1}{2}\left(c_{22} - c_{11} + \frac{3}{2}c_{00}\right),\ \ell_{62} = -\frac{1}{2}\left(c_{22} + \frac{3}{2}c_{00}\right),\ \ell_{70} = -\frac{1}{2}c_{30},\ \ell_{72} = -c_{32},$$

$$\ell_{71} = \frac{1}{2}(c_{30} - c_{31}),\ \ell_{82} = \frac{1}{2}\left(-c_{42} + c_{31} - \frac{3}{4}c_{30}\right).$$

В (16), (18), (23), (25), (27) перейдем от t к υ, используя формулу перехода из [7], обозначая в ней любой канонический элемент через А имеем

$$\frac{dA}{d\upsilon} = \frac{1}{n\mu^2}\left(1 - 2e\cos\upsilon + \frac{3}{2}e^2\cos 2\upsilon\right)\frac{dA}{dt},$$

тогда получим с точностью вплоть до $O(\nu e^2)$ следующие дифференциальные уравнения:

$$\frac{d\rho_1}{d\upsilon} = \nu_1\{b_{01}e\cos(\omega_2 - \omega_1) + b_{02}e^2\sin(2\omega_2 - 2\omega_1) + (b_{10} + e^2 b_{12})\cos(\upsilon + \omega_2 - \omega_1) +$$
$$+ b_{01}e\cos(2\upsilon + \omega_2 - \omega_1) + b_{22}e^2\cos(\upsilon - \omega_2 + \omega_1) + (b_{30} + b_{32}e^2)\sin(2\upsilon + 2\omega_2 - 2\omega_1) +$$
$$+ b_{41}e\sin(\upsilon + 2\omega_2 - 2\omega_1) + b_{41}e\sin(3\upsilon + 2\omega_2 - 2\omega_1) + b_{52}e^2\sin(4\upsilon + 2\omega_2 - 2\omega_1) +$$
$$+ b_{62}e^2\cos(3\upsilon + \omega_2 - \omega_1)\}, \quad (28)$$

где:

$$v_1 = -\frac{3}{n} v \sqrt{\left(\frac{a}{\mu}\right)^3}\,,\ b_{01} = a_0 - a_{10}\,,\ b_{02} = a_{02} - a_{41} + \frac{3}{4} a_{30}\,,\ b_{10} = a_{10}\,,$$

$$b_{12} = a_{12} - 2a_0 - \frac{1}{2} a_{10}\,,\ b_{22} = a_{22} + \frac{3}{2} a_{10} - a_0\,,\ b_{30} = a_{30}\,,\ b_{32} = a_{32} - 2a_{41} - \frac{1}{2} a_{30}\,,$$

$$b_{41} = a_{41} - a_{30}\,,\ b_{52} = a_{52} - a_{41} + \frac{3}{4} a_{30}\,,\ b_{62} = -a_0 + \frac{3}{4} a_{10}\,.$$

В силу (18) имеем:

$$\begin{aligned}\frac{d\rho_2}{d\upsilon} = v_2 \{& b_{01} e \cos(\omega_2 - \omega_1) + b_{02} e^2 \sin(2\omega_2 - 2\omega_1) + (b_{10} + e^2 b_{12}) \cos(\upsilon + \omega_2 - \omega_1) + \\ &+ b_{01} e \cos(2\upsilon + \omega_2 - \omega_1) + b_{22} e^2 \cos(\upsilon - \omega_2 + \omega_1) + (b_{30} + b_{32} e^2) \sin(2\upsilon + 2\omega_2 - 2\omega_1) + \\ &+ b_{41} e \sin(\upsilon + 2\omega_2 - 2\omega_1) + b_{41} e \sin(3\upsilon + 2\omega_2 - 2\omega_1) + b_{52} e^2 \sin(4\upsilon + 2\omega_2 - 2\omega_1) + \\ &+ b_{62} e^2 \cos(3\upsilon + \omega_2 - \omega_1)\},\end{aligned} \tag{29}$$

где $v_2 = -v_1 = \frac{3}{n} v \sqrt{\left(\frac{a}{\mu}\right)^3}$.

$$\begin{aligned}\frac{d\lambda}{d\upsilon} = \frac{v}{n\mu^2} [& (n_{00} + n_{01} e + n_{02} e^2) + (n_{11} e + n_{12} e^2) \cos\upsilon + n_{22} e^2 \cos 2\upsilon + \\ &+ (n_{31} e + n_{32} e^2) \sin(2\upsilon + \omega_2 - \omega_1) + (n_{40} + n_{41} e + n_{42} e^2) \sin(\upsilon + \omega_2 - \omega_1) + \\ &+ (n_{51} e + n_{52} e^2) \sin(3\upsilon + \omega_2 - \omega_1) + n_{62} e^2 \sin(\upsilon - \omega_2 + \omega_1) + n_{71} e \cos(3\upsilon + 2\omega_2 - 2\omega_1) + \\ &+ n_{72} e^2 \cos(4\upsilon + 2\omega_2 - 2\omega_1) + n_{81} e \cos(\upsilon + 2\omega_2 - 2\omega_1)],\end{aligned} \tag{30}$$

где: $n_{00} = D_{00} + \frac{\mu^2}{vL^3}$, $n_{01} = D_{01} - D_{30} \sin(\omega_2 - \omega_1)$, $n_{11} = D_{11} - 2D_{00} - \frac{2\mu^2}{vL^3}$,

$$n_{02} = D_{02} - D_{11} - D_{31} \sin(\omega_2 - \omega_1) + \frac{3}{4} D_{70} \cos(\omega_2 - \omega_1)\,,\ n_{12} = D_{12} - 2D_{01}\,,$$

$$n_{22} = D_{22} - D_{11} + \frac{3}{2}\left(D_{00} + \frac{\mu^2}{vL^3}\right),\ n_{31} = -D_{30} + D_{41},\ n_{32} = D_{42} - D_{31}\,,$$

$$n_{40} = D_{30}\,,\ n_{41} = D_{31} - D_{41}\,,\ n_{42} = D_{32}\,,\ n_{51} = -D_{41}\,,\ n_{52} = \frac{3}{4} D_{30} + D_{62}\,,$$

$$n_{62} = D_{52} - \frac{3}{4} D_{30}\,,\ n_{71} = D_{71} - D_{70}\,,\ n_{72} = D_{82} - \frac{3}{4} D_{70} - D_{71}\,,\ n_{81} = -D_{70}\,.$$

$$\begin{aligned}\frac{d\omega_1}{d\upsilon} = v n_0 \{& (m_{00} + m_{01} e + m_{02} e^2) + (m_{10} + m_{11} e + m_{12} e^2) \cos\upsilon + \\ &+ (m_{21} e + m_{22} e^2) \cos 2\upsilon + m_{32} e^2 \cos 3\upsilon + (m_{41} e + m_{42} e^2) \sin(\upsilon - \omega_2 + \omega_1) + \\ &+ (m_{51} e + m_{52} e^2) \sin(\upsilon + \omega_2 - \omega_1) + (m_{60} + m_{61} e + m_{62} e^2) \sin(2\upsilon + \omega_2 - \omega_1) + \\ &+ (m_{71} e + m_{72} e^2) \sin(3\upsilon + \omega_2 - \omega_1) + m_{82} e^2 \sin(4\upsilon + \omega_2 - \omega_1) + \\ &+ m_{92} e^2 \sin(2\upsilon - \omega_2 + \omega_1) + m_{101} e \cos(2\upsilon + 2\omega_2 - 2\omega_1) + (m_{110} + m_{112} e^2) \times \\ &\times \cos(3\upsilon + 2\omega_2 - 2\omega_1) + m_{121} e \cos(4\upsilon + 2\omega_2 - 2\omega_1) + m_{132} e^2 \cos(5\upsilon + 2\omega_2 - 2\omega_1) + \\ &+ m_{142} e^2 \cos(\upsilon + 2\omega_2 - 2\omega_1) + m_{152} e^2 \cos(\upsilon - 2\omega_2 + 2\omega_1)\},\end{aligned} \tag{31}$$

где:

$$n_0 = \frac{1}{ne\mu^2},\ m_{00} = B_0,\ m_{01} = B_{01} - B_{10},$$

$$m_{02} = B_{02} - B_{11} - B_{21} + \left(\frac{3}{4}B_{50} - B_{41} + B_{61}\right)\sin(\omega_2 - \omega_1),\ m_{10} = B_{10},$$

$$m_{11} = B_{11} - 2B_{00},\ m_{12} = B_{12} - 2B_{01} + \frac{3}{4}B_{10},\ m_{21} = B_{21} - B_{10},$$

$$m_{22} = B_{22} - B_{11} + \frac{3}{2}B_{00} - B_{21},\ m_{32} = \frac{3}{4}B_{10} + B_{32},\ m_{41} = B_{61},\ m_{42} = B_{62},$$

$$m_{51} = B_{41} - B_{50},\ m_{52} = B_{42} - B_{51},\ m_{60} = B_{50},\ m_{61} = B_{51},$$

$$m_{62} = B_{52} - B_{41} - B_{71},\ m_{71} = B_{71} - B_{50},\ m_{72} = B_{72} - B_{51},$$

$$m_{82} = B_{82} + \frac{3}{4}B_{50} - B_{71},\ m_{92} = B_{92} - B_{61},\ m_{101} = B_{101} - B_{100},\ m_{110} = B_{100},$$

$$m_{112} = B_{102} - B_{111} - B_{101},\ m_{152} = B_{122},\ m_{121} = B_{111} - B_{100},$$

$$m_{132} = B_{112} + \frac{3}{4}B_{100} - B_{111},\ m_{142} = B_{132} - B_{101} + \frac{3}{4}B_{100}.$$

$$\begin{gathered}\frac{d\omega_2}{d\upsilon} = v\ell_1\{(e_{00} + e_{01}e + e_{02}e^2) + (e_{11} + e_{12}e^2)\cos\upsilon + e_{22}e^{22}\cos 2\upsilon + \\ + (e_{30} + e_{31}e + e_{32}e^2)\sin(\upsilon + \omega_2 - \omega_1) + (e_{41}e + e_{42}e^2)\sin(2\upsilon + \omega_2 - \omega_1) + \\ + e_{52}e^2\sin(3\upsilon + \omega_2 - \omega_1) + e_{62}e^2\sin(\upsilon - \omega_2 + \omega_1) + (e_{70} + e_{72}e^2)\times \\ \times\cos(2\upsilon + 2\omega_2 - 2\omega_1) + e_{81}e\cos(3\upsilon + 2\omega_2 - 2\omega_1) + e_{82}e^2\cos(4\upsilon + 2\omega_2 - 2\omega_1) + \\ + e_{91}e\cos(\upsilon + 2\omega_2 - 2\omega_1)\},\end{gathered} \tag{32}$$

где:

$$\ell_1 = \frac{\ell_0}{n\mu^2},\ e_{00} = \ell_{00},\ e_{01} = \ell_{01} - \ell_{30}\sin(\omega_2 - \omega_1),$$

$$e_{02} = \left[\ell_{02} - \ell_{11} - \ell_{31}\sin(\omega_2 - \omega_1) + \frac{3}{4}\ell_{70}\cos(2\omega_2 - 2\omega_1)\right],\ e_{11} = \ell_{11} - 2\ell_{00},$$

$$e_{12} = \ell_{12} - 2\ell_{01},\ e_{22} = \ell_{22} + \frac{3}{2}\ell_{00} - \ell_{11},\ e_{30} = \ell_{30},\ e_{31} = \ell_{31},\ e_{32} = \ell_{32} - \ell_{41},$$

$$e_{41} = \ell_{41} - \ell_{30},\ e_{42} = \ell_{42} - \ell_{31},\ e_{52} = \ell_{52} - \ell_{41} + \frac{3}{4}\ell_{30},\ e_{62} = \ell_{62} - \frac{3}{4}\ell_{30},$$

$$e_{70} = \ell_{70},\ e_{72} = \ell_{72} - \ell_{71},\ e_{81} = \ell_{71} - \ell_{70},\ e_{91} = -\ell_{70}.$$

В каждом из дифференциальных уравнений (28), (29), (30), (31), (32) (в случае $H_1 << H_0$) есть в правой части постоянные и чисто периодические члены. В случае интегрирования первые будут порождать вековые члены, а вторые периодические члены. Но этот недостаток можно избежать, используя классические методы [2]. Поэтому можно считать, что цель исследования достигнута, по крайней мере, на интервале (12).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Пуанкаре А. Лекции по небесной механике /Пер. с франц. Е.А. Гребеникова /Под ред. Г.Н.Дубошина.- М.: Наука, 1965.- 571 с.

[2] Дубошин Г.Н. Небесная механика. Методы теории движения искусственных небесных тел.- М.: Наука, 1983.- 351 с.

[3] Шинибаев М.Д. Метод промежуточных орбит в теории движения ИСЗ. Palmarium academic publishing. Saarbrücken.– Deutschland, 2015.- 132 с.

[4] Шинибаев М.Д. Поступательное движение пассивно гравитирующего тела в центральном и нецентральном поле тяготения.– Алматы: РИО ВАК РК, 2001.- 128 с.

[5] Штерн Т. Введение в небесную механику /Пер. с англ. А.Н.Гордеева и А.М. Микиши / Под ред. В.А.Сарычева.- М.: Мир, 1964.- 242 с.

[6] Абалакин В.К., Аксенов Е.П., Гребеников А., Демин В.Г., Рябов Ю.А. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике.- М.: Наука, 1976.- 864 с.

[7] Чеботарев Г.А. Аналитические и численные методы небесной механики.- М.-Л.: Наука, 1965.- 367 с.

REFERENCES

[1] Puankare A. Lekcii po nebesnoj mehanike /Per. s fran. E.A.Grebenikova /Pod red. G.N.Dubochina.-M.: Nauka, 1965.- 571 s. (in Russ).

[2] Dubochin G.N. Nebesnaya mehanika. Metodi teorii dvigenia iskusstvennih nebesnih tel.- M.: Nauka, 1983.- 352 s. (in Russ).

[3] Shinibaev M.D. Metod promegutochnih orbit v teorii dvigeniay ISZ. . Palmarium academic publishing. Saarbrücken.– Deutschland, 2015.- 132 s. (in Russ).

[4] Shinibaev M.D. Postupatelnoe dvigenie passivno gravitiruyoushego tela v zentralnom I nezentralnom pole tyagotenia.- Almaty: RIO VAK RK, 2001.– 128 s. (in Russ).

[5] Shtern T. Vvedenie v nebesnuy mehaniku /Per. s angl. A.N.Gordeeva I A.M.Mikichi /Pod red. V.A.Saricheva.- M.: Mir, 1964.- 242 s. (in Russ).

[6] Abalakin V.K., Aksenov E.P., Grebenikov E.A., Demin V.G., Raybov J.A. Spravoch-noe rukovodstvo po nebesnoi mehanike I astrodinamike.- M.: Nauka, 1976.- 864 s. (in Russ).

[7] Chebotarev G.A. Analiticheskie I chislennie metodiy nebesnoy mehaniki.- M.-L.: Nauka, 1965.- 367 s. (in Russ).

ПУАНКАРЕНІҢ БІРІНШІ КАНОНДЫҚ ЭЛЕМЕНТТЕР ЖҮЙЕСІН ХИЛЛДЫҢ ЕКІНШІ ЕСЕБІНДЕ ҚОЛДАНУ

С. С. Дайырбеков, М. Д. Шыныбаев, А. Нарымбетова, О. Өтегенов, Д. Танабаева

Сыр-Дария университеті, Жетысай, Қазақстан

Тірек сөздер: Пуанкаренің канондық элементтер жүйесі, орталық орбита, оскуляциялық элементтер әдісі, Жер серігі, квадратуралардағы шешім, биномдық қатар.

Аннотация. 1905 жылы Анри Пуанкаре «Аспан механика лекциялары» кітабының бірінші томын баспадан шығарды, оны ол «Планеталар ұйытқуынуының жалпы теориясы» деп атады. Онда ол екі канондық элементтер жүйесін берген [1]. Бірінші жүйе [2] бойынша негізгі жазықтықта орналасқан шеңбер тәрізді орбитадағы дененің ұйытқуын зерттеуге арналған. Демек жүйе аз мәнді эксцентриситеттермен көлбеуді қамтиды.

Мақалада бұл жүйенің барлық жақсы қасиеттерін сақтай отырып қолдану аясын кеңітетін әдіс берілген. Енді Лапластың шегін есепке алғанда $e_л = 0{,}67$, эксцентриситет *e* одан кіші болғанда, тең болғанда да, тіпті үлкен болған жағдайда да, тіпті қатерлік көлбеуге дейінгі жағдайларда да бірінші канондық жүйе қолданыста болатын жағдай орнатылды.

Зерттеу ЖЖС-нің ұйытқуының жаңа орталық орбиталарын құруға жол ашады.

Поступила 13.01.2016 г.

Publication Ethics and Publication Malpractice in the journals of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan

For information on Ethics in publishing and Ethical guidelines for journal publication see http://www.elsevier.com/publishingethics and http://www.elsevier.com/journal-authors/ethics.

Submission of an article to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan implies that the described work has not been published previously (except in the form of an abstract or as part of a published lecture or academic thesis or as an electronic preprint, see http://www.elsevier.com/postingpolicy), that it is not under consideration for publication elsewhere, that its publication is approved by all authors and tacitly or explicitly by the responsible authorities where the work was carried out, and that, if accepted, it will not be published elsewhere in the same form, in English or in any other language, including electronically without the written consent of the copyright-holder. In particular, translations into English of papers already published in another language are not accepted.

No other forms of scientific misconduct are allowed, such as plagiarism, falsification, fraudulent data, incorrect interpretation of other works, incorrect citations, etc. The National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan follows the Code of Conduct of the Committee on Publication Ethics (COPE), and follows the COPE Flowcharts for Resolving Cases of Suspected Misconduct (http://publicationethics.org/files/u2/New_Code.pdf). To verify originality, your article may be checked by the Cross Check originality detection service http://www.elsevier.com/editors/plagdetect.

The authors are obliged to participate in peer review process and be ready to provide corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. All authors of a paper should have significantly contributed to the research.

The reviewers should provide objective judgments and should point out relevant published works which are not yet cited. Reviewed articles should be treated confidentially. The reviewers will be chosen in such a way that there is no conflict of interests with respect to the research, the authors and/or the research funders.

The editors have complete responsibility and authority to reject or accept a paper, and they will only accept a paper when reasonably certain. They will preserve anonymity of reviewers and promote publication of corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. The acceptance of a paper automatically implies the copyright transfer to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.

The Editorial Board of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan will monitor and safeguard publishing ethics.

Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайте:

www:nauka-nanrk.kz

http://www.physics-mathematics.kz

Редактор *М. С. Ахметова*
Верстка на компьютере *Д. Н. Калкабековой*

Подписано в печать 27.01.2016.
Формат 60x881/8. Бумага офсетная. Печать – ризограф.
12,75 п.л. Тираж 300. Заказ 1.

Национальная академия наук РК
050010, Алматы, ул. Шевченко, 28, т. 272-13-18, 272-13-19