ISSN 1991-346X

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ

Х А Б А Р Л А Р Ы

ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

N E W S

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА СЕРИЯСЫ

♦

СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

♦

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

1 (305)

ҚАНТАР – АҚПАН 2016 ж.
ЯНВАРЬ – ФЕВРАЛЬ 2016 г.
JANUARY – FEBRUARY 2016

1963 ЖЫЛДЫҢ ҚАҢТАР АЙЫНАН ШЫҒА БАСТАҒАН
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1963 ГОДА
PUBLISHED SINCE JANUARY 1963

ЖЫЛЫНА 6 РЕТ ШЫҒАДЫ
ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД
PUBLISHED 6 TIMES A YEAR

АЛМАТЫ, ҚР ҰҒА
АЛМАТЫ, НАН РК
ALMATY, NAS RK

«Известия НАН РК. Серия физико-математическая». ISSN 1991-346X
Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы)
Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации и архивов Министерства культуры и информации Республики Казахстан **№5543-Ж**, выданное 01.06.2006 г.

Периодичность: 6 раз в год.
Тираж: 300 экземпляров.

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, ком. 219, 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,
www:nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75.

News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physical-mathematical series.
ISSN 1991-346X
Owner: RPA "National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan" (Almaty)
The certificate of registration of a periodic printed publication in the Committee of information and archives of the Ministry of culture and information of the Republic of Kazakhstan N 5543-Ж, issued 01.06.2006

Periodicity: 6 times a year
Circulation: 300 copies

Editorial address: 28, Shevchenko str., of. 219, 220, Almaty, 050010, tel. 272-13-19, 272-13-18,
www:nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

Address of printing house: ST "Aruna", 75, Muratbayev str, Almaty

N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 1, Number 305 (2016), 178 – 189

ON A SOLVABILITY OF LINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH MULTIPOINT INTEGRAL CONDITION FOR THE LOADED DIFFERENTIAL EQUATIONS UNDER IMPULSE EFFECT

Zh. M. Kadirbayeva, S. S. Kabdrakhova

Institute of mathematics and mathematical modeling MES RK, Almaty, Kazakhstan.
E-mail: anarasanova@list.ru, apelman86pm@mail.ru

Key words: equation, impulse, load, solvability, algorithm.

Abstract. A linear boundary value problem with multipoint integral condition for the system loaded differential equations under impulse effect is considered. The method of parameterization is used for solving the considering problem. The linear boundary value problem with multipoint integral condition for the system loaded differential equations under impulse effect by introducing additional parameters at the loading points is reduced to an equivalent boundary value problem with parameters. The equivalent boundary value problem with parameters consist of the Cauchy problem for the system of ordinary differential equations with parameters, multipoint integral condition and condition of impulse effects. The solution of the Cauchy problem for the system of ordinary differential equations with parameters is constructed using the fundamental matrix of the differential equation. The system of a linear algebraic equations with respect to the parameters are composed by substituting the values of the corresponding points in the built solutions to the multipoint integral condition and the condition of impulse effect. The lemma on the relationship between solution of the linear algebraic equations with respect to the parameters and the solution of the linear boundary value problem with multipoint integral condition for the system loaded differential equations under impulse effect is proved. A criterion of the unique solvability of the linear boundary value problem with multipoint integral condition for the system loaded differential equations under impulse effect in terms of the matrix of system of the linear algebraic equations with respect to the parameters. A necessary and sufficient condition of the solvability of the linear boundary value problem with multipoint integral condition for the system loaded differential equations under impulse effect is proved by orthogonality right-hand side of the system of linear algebraic equations with respect to the parameters to the kernel of transposed matrix of coefficient. An algorithm for finding the solution of the linear boundary value problem with multipoint integral condition for the system loaded differential equations under impulse effect based on the parameterization method is offered. The algorithm is illustrated by an example for finding the solution of the linear boundary value problem with multipoint integral condition for the system loaded differential equations under impulse effect.

УДК 517.956.3, 517.75

О РАЗРЕШИМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С МНОГОТОЧЕЧНЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ НАГРУЖЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ ИМПУЛЬСНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Ж. М. Кадирбаева, С. С. Кабдрахова

Институт математики и математического моделирования МОН РК, Алматы, Казахстан

Ключевые слова: уравнение, импульс, нагрузка, разрешимость, алгоритм.

Аннотация. Рассматривается линейная краевая задача с многоточечным интегральным условием для системы нагруженных дифференциальных уравнений при импульсном воздействии. Для решения рассматриваемой задачи применяется метод параметризации. Линейная краевая задача с многоточечным интегральным условием для систем нагруженных дифференциальных уравнений при импульсном воздействии путем введения дополнительных параметров в точках нагружения сводится к эквивалентной краевой задаче с параметрами. Эквивалентная краевая задача с параметрами состоит из задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с параметрами, многоточечного интегрального условия и условия импульсного воздействия. Решение задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с параметрами строится с помощью фундаментальной матрицы дифференциального уравнения. Подставляя значения в соответствующих точках построенного решения в многоточечное интегральное условие и условие импульсного воздействия, составляется система линейных алгебраических уравнений относительно параметров. Доказывается лемма о взаимосвязи решения системы линейных алгебраических уравнений относительно параметров и решения линейной краевой задачи с многоточечным интегральным условием для систем нагруженных дифференциальных уравнений при импульсном воздействии. Установлен критерий однозначной разрешимости линейной краевой задачи с многоточечным интегральным условием для систем нагруженных дифференциальных уравнений при импульсном воздействии в терминах матрицы системы линейных алгебраических уравнений относительно параметров. Доказано необходимое и достаточное условие разрешимости линейной краевой задачи с многоточечным интегральным условием для систем нагруженных дифференциальных уравнений при импульсном воздействии через ортогональность правой части системы линейных алгебраических уравнений относительно параметров к ядру транспонированной матрицы коэффициентов. Предложен алгоритм нахождения решения линейной краевой задачи с многоточечным интегральным условием для систем нагруженных дифференциальных уравнений при импульсном воздействии, основанный на методе параметризации. Алгоритм иллюстрируется примером для нахождения решения линейной краевой задачи с многоточечным интегральным условием для двумерного нагруженного дифференциального уравнения при импульсном воздействии.

В последние годы наблюдается интенсивное исследование нагруженных дифференциальных уравнений, связанное, с различными приложениями задач, ассоциированных с нагруженными уравнениями.

К задачам приложения, описываемых этими уравнениями, относятся задача долгосрочного прогнозирования и регулирования уровня грунтовых вод и почвенной влаги [1, 2, 4], моделирования процессов переноса частиц, некоторые задачи оптимального управления [3, 5].

Отметим, что нагруженные дифференциальные уравнения описывают процессы с последействием, в которых состояние процесса в какой-либо точке и в какой-либо момент может оказывать влияние на весь процесс в целом [4].

Нагруженные обыкновенные дифференциальные уравнения и краевые задачи для таких уравнений рассмотрены в [1–10] и установлены условия их разрешимости различными методами. В работах [4, 10] исследовались вопросы разрешимости нагруженных дифференциальных уравнений в частных производных.

Как известно, внимание исследователей привлекают нелокальные задачи для дифференциальных уравнений различных классов. Возросший интерес к задачам с нелокальными условиями связан с бурным развитием вычислительной и измерительной техники, которое позволило изучать наиболее адекватные математические модели рассматриваемых процессов естествознания.

Нелокальность условий обусловлена практической невозможностью производить замеры или воздействовать на процессы в отдельно взятой точке распределенных в пространстве объекта или мгновенно во времени. Например, периодические краевые задачи описывают волновые процессы. Одним из важных классов нелокальных задач для дифференциальных уравнений являются задачи с интегральными условиями. Интегральные условия возникают в тех случаях, когда невозможно непосредственное измерение каких-либо физических величин, но известно их усредненное значение. Подобные ситуации имеют место при изучении явлений, происходящих в плазме, процессов распространения тепла, некоторых технологических процессов, процессов влагопереноса в пористых средах, обратных задачах, а также в задачах математической биологии и демографии [3, 11-14, 16, 17].

В работах [5, 14-16] предложен численный метод решения систем линейных неавтономных обыкновенных нагруженных дифференциальных уравнений с неразделенными многоточечными и интегральными условиями. Метод основан на операции свертывания интегральных условий в локальные, что позволяет свести решение исходной задачи к решению задачи Коши относительно систем обыкновенных дифференциальных уравнений и линейных алгебраических уравнений. При использовании метода линеаризации предлагаемый подход применен для решения систем нелинейных нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений с нелокальными условиями.

Математическое моделирование эволюции реальных процессов с кратковременными возмущениями, длительностью которых можно пренебречь, приводит к необходимости исследования дифференциальных уравнений с импульсным воздействием [18]. Различные задачи для таких уравнений, методы их решения и другие вопросы теории импульсных систем рассмотрены многими авторами, обзор и библиографию можно посмотреть в [19]. Как было отмечено в [20], наличие импульса существенно влияет на свойства решений обыкновенных дифференциальных уравнений.

В настоящей работе рассматривается краевая задача для нагруженных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A_0(t)x + \sum_{j=1}^{m} A_j(t) \lim_{t \to \theta_j + 0} x(t) + f(t), \quad t \in (0,T) \setminus \{\theta_1, \theta_2, ..., \theta_m\}, \tag{1}$$

$$B_0 x(0) + D_0 x(\theta_1) + C_0 x(T) + \int_0^T M(t)x(t)dt = d, \quad d \in R^n, \quad x \in R^n, \tag{2}$$

$$B_i \lim_{t \to \theta_i - 0} x(t) - C_i \lim_{t \to \theta_i + 0} x(t) = \varphi_i, \quad \varphi_i \in R^n, \quad i = \overline{1,m}, \tag{3}$$

где $(n \times n)$-матрицы $A_j(t), M(t)$, $j = \overline{0,m}$ и n–вектор-функция $f(t)$ кусочно-непрерывны на $[0,T]$, с возможными разрывами первого рода в точках $t = \theta_i$, $i = \overline{1,m}$. D_0, B_j и C_j, $j = \overline{0,m}$ – постоянные матрицы размерности $(n \times n)$, $0 = \theta_0 < \theta_1 < \ldots < \theta_m < \theta_{m+1} = T$.

Решением задачи (1)-(3) является кусочно-непрерывно дифференцируемая на $[0,T]$ вектор-функция $x(t)$, которая удовлетворяет нагруженному дифференциальному уравнению (1) на $[0,T]$, кроме точек $t = \theta_i$, $i = \overline{1,m}$, интегральному краевому условию (2) и условиям импульсных воздействий в фиксированные моменты времени (3).

Ранее в работах [6–9] линейная двухточечная краевая задача для нагруженных дифференциальных уравнений решалась методом параметризации [21]. На его основе были установлены необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости указанной задачи. Краевая задача с многоточечными условиями для систем обыкновенных дифференциальных уравнений изучалась в [22] также методом параметризации. Были получены необходимые и достаточные условия однозначной и корректной разрешимости многоточечных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

В данной работе исследуются вопросы разрешимости линейной краевой задачи с многоточечным интегральным условием (2) для систем нагруженных дифференциальных уравнений (1) при импульсном воздействии (3).

Определение. Задача (1)-(3) называется однозначно разрешимой, если для любой функции $f(t) \in C([0,T], R^n)$, для любых векторов $d \in R^n$, $\varphi_i \in R^n$, $i = \overline{1,m}$, она имеет единственное решение.

Для решения задачи (1)-(3) применяется метод параметризации. Интервал $[0,T]$ разбиваем на части точками нагружения: $[0,T) = \bigcup_{r=1}^{m+1} [\theta_{r-1}, \theta_r)$.

Введем пространство $C([0,T], \theta_r, R^{n(m+1)})$ систем функций $x[t] = (x_1(t), x_2(t), ..., x_{m+1}(t))$, где функции $x_r(t)$, $r = \overline{1,m+1}$, непрерывны на $[\theta_{r-1}, \theta_r)$ и имеют конечный левосторонний предел $\lim_{t \to \theta_r - 0} x_r(t)$, $r = \overline{1,m+1}$, с нормой $\|x[\cdot]\|_2 = \max_{r=\overline{1,m+1}} \sup_{t \in [\theta_{r-1}, \theta_r)} \|x_r(t)\|$.

Сужение вектор-функции $x(t)$ на r-ый интервал $[\theta_{r-1},\theta_r)$ обозначим через $x_r(t)$, т.е. $x_r(t)=x(t)$ при $t\in[\theta_{r-1},\theta_r)$, $r=\overline{1,m+1}$.

Введем дополнительные параметры $\lambda_r=x_r(\theta_{r-1})$, $r=\overline{1,m+1}$, и на каждом интервале $[\theta_{r-1},\theta_r)$ производим замену $u_r(t)=x_r(t)-\lambda_r$, $r=\overline{1,m+1}$. Тогда исходная задача (1)-(3) перейдет к эквивалентной краевой задаче с параметрами

$$\frac{du_r}{dt}=A_0(t)(u_r+\lambda_r)+\sum_{j=1}^{m}A_j(t)\lambda_{j+1}+f(t),\quad t\in[\theta_{r-1},\theta_r), \tag{4}$$

$$u_r(\theta_{r-1})=0,\quad r=\overline{1,m+1}, \tag{5}$$

$$B_0\lambda_1+D_0\lambda_2+C_0\lambda_{m+1}+C_0\lim_{t\to T-0}u_{m+1}(t)+\sum_{j=1}^{m+1}\int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j}M(t)[u_j(t)+\lambda_j]dt=d, \tag{6}$$

$$B_i\lim_{t\to\theta_i-0}u_i(t)+B_i\lambda_i-C_i\lambda_{i+1}=\varphi_i,\quad i=\overline{1,m}. \tag{7}$$

Решением задачи (4)-(7) является пара $(\lambda, u[t])$ с элементами $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_{m+1})\in R^{n(m+1)}$, $u[t]=(u_1(t), u_2(t),...,u_{m+1}(t))\in C([0,T],\theta_r,R^{n(m+1)})$, где функции $u_r(t)$ непрерывно дифференцируемы на $[\theta_{r-1},\theta_r)$, $r=\overline{1,m+1}$ и при $\lambda_r=\lambda_r^*$ удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений (4) и условиям (5)-(7).

Задачи (1)-(3) и (4)-(7) эквивалентны в следующем смысле. Если пара $(\tilde{\lambda}, \tilde{u}[t])$ где $\tilde{\lambda}=(\tilde{\lambda}_1,\tilde{\lambda}_2,...,\tilde{\lambda}_{m+1})\in R^{n(m+1)}$, $\tilde{u}[t]=(\tilde{u}_1(t), \tilde{u}_2(t),...,\tilde{u}_{m+1}(t))\in C([0,T],\theta_r,R^{n(m+1)})$ – решение задачи (4)-(7), то функция $\tilde{x}(t)$ определяемая равенствами $\tilde{x}(t)=\tilde{\lambda}_r+\tilde{u}_r(t)$, $t\in[\theta_{r-1},\theta_r)$, $r=\overline{1,m+1}$, $\tilde{x}(T)=\tilde{\lambda}_{m+1}+\lim_{t\to T-0}\tilde{u}_{m+1}(t)$ будет решением исходной задачи (1)-(3). И наоборот, если функция $x(t)$ является решением задачи (4)-(7), то пара $(\lambda, u[t])$ где $\lambda=(x(\theta_0),x(\theta_1),...,x(\theta_{m+1}))$, $u[t]=(x(t)-x(\theta_0), x(t)-x(\theta_1),...,x(t)-x(\theta_{m+1}))$, будет решением задачи (4)-(7).

Введение дополнительных параметров позволяет получить начальные данные (5). При фиксированных значениях параметров $\lambda\in R^{n(m+1)}$ систему функций $u[t]$ можно определить решая задачи Коши (4), (5).

Используя $X(t)$ – фундаментальную матрицу дифференциального уравнения $\frac{dx}{dt}=A(t)x$, решение задачи Коши (4), (5) запишем в виде

$$u_r(t)=X(t)\int_{\theta_{r-1}}^{t}X^{-1}(\tau)\left[A_0(\tau)\lambda_r+\sum_{j=1}^{m}A_j(\tau)\lambda_{j+1}+f(\tau)\right]d\tau,\ t\in[\theta_{r-1},\theta_r),$$

$$r=\overline{1,m+1}. \tag{8}$$

В интегральное условие (6) и условия импульса (7) подставляя правую часть (8), получим следующую систему алгебраических уравнений относительно параметров:

$$B_0\lambda_1 + D_0\lambda_2 + C_0\lambda_{m+1} + C_0X(T)\int_{\theta_m}^{T} X^{-1}(\tau)\left[A_0(\tau)\lambda_{m+1} + \sum_{j=1}^{m} A_j(\tau)\lambda_{j+1}\right]d\tau +$$

$$+\sum_{j=1}^{m+1}\int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} M(t)\left\{X(t)\int_{\theta_{j-1}}^{t} X^{-1}(\tau)\left[A_0(\tau)\lambda_j + \sum_{j=1}^{m} A_j(\tau)\lambda_{j+1}\right]d\tau + \lambda_j\right\}dt = \quad (9)$$

$$= d - C_0X(T)\int_{\theta_m}^{T} X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau - \sum_{j=1}^{m+1}\int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} M(t)X(t)\int_{\theta_{j-1}}^{t} X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau dt,$$

$$B_iX(\theta_i)\int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} X^{-1}(\tau)\left[A_0(\tau)\lambda_i + \sum_{j=1}^{m} A_j(\tau)\lambda_{j+1}\right]d\tau + B_i\lambda_i - C_i\lambda_{i+1} =$$

$$= \varphi_i - B_iX(\theta_i)\int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau,\ i = \overline{1,m}. \quad (10)$$

Матрицу, соответствующую левой части системы уравнений (9), (10), обозначим через $Q(\theta)$ и систему запишем в виде

$$Q(\theta)\lambda = F(\theta),\ \ \lambda \in R^{n(m+1)}, \quad (11)$$

где

$$F(\theta) = \begin{pmatrix} d - C_0X(T)\int_{\theta_m}^{T} X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau - \sum_{j=1}^{m+1}\int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} M(t)X(t)\int_{\theta_{j-1}}^{t} X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau dt \\ \varphi_1 - B_1X(\theta_1)\int_{\theta_0}^{\theta_1} X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau \\ \dots\dots\dots\dots \\ \varphi_m - B_mX(\theta_m)\int_{\theta_{m-1}}^{\theta_m} X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau \end{pmatrix}.$$

Следующие утверждения являются аналогами соответствующей леммы и теоремы, которые были доказаны в работе [23] для интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма.

Лемма 1. *Справедливы следующие утверждения:*

а) вектор $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, ..., \lambda_{m+1}^*) \in R^{n(m+1)}$, *составленный из значений решения* $x^*(t)$ *задачи (1)-(3) в точках разбиения* $\lambda_r^* = x^*(\theta_{r-1}),\quad r = \overline{1, m+1}$, *удовлетворяет системе (11);*

б) если $\widetilde{\lambda} = (\widetilde{\lambda}_1, \widetilde{\lambda}_2, ..., \widetilde{\lambda}_{m+1}) \in R^{n(m+1)}$ *является решением системы уравнений (11), а система функций* $\widetilde{u}[t] = (\widetilde{u}_1(t), \widetilde{u}_2(t), ..., \widetilde{u}_{m+1}(t))$ *решением задачи Коши (4), (5) при* $\lambda_r = \widetilde{\lambda}_r,\quad r = \overline{1, m+1}$, *то функция* $\widetilde{x}(t)$, *определяемая равенствами* $\widetilde{x}(t) = \widetilde{\lambda}_r + \widetilde{u}_r(t),\ t \in [\theta_{r-1}, \theta_r),\quad r = \overline{1, m+1}$, $\widetilde{x}(T) = \widetilde{\lambda}_{m+1} + \lim_{t \to T-0} \widetilde{u}_{m+1}(t)$, *является решением задачи (1)-(3).*

Доказательство. а) Пусть $x^*(t)$ – решение задачи (1)-(3). Тогда пара $((\lambda_1^*, \lambda_2^*, ..., \lambda_{m+1}^*), (u_1^*(t), u_2^*(t), ..., u_{m+1}^*(t)))$ с элементами $\lambda_r^* = x^*(\theta_{r-1}),\quad u_r^*(t) = x^*(t) - x^*(\theta_{r-1})$, $t \in [\theta_{r-1}, \theta_r)$, $r = \overline{1, m+1}$, будет решением эквивалентной краевой задачи с параметрами (4)-(7). Записав решение задачи Коши (4), (5) через фундаментальную матрицу, получим соотношение (8) для $u_r^*(t)$, $r = \overline{1, m+1}$, при значения $\lambda_r = \lambda_r^*,\quad r = \overline{1, m+1}$. Затем, подставляя ее в условия (6),

(7) приходим к уравнению (11). Отсюда, убеждаемся, что $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, ..., \lambda_{m+1}^*) \in R^{n(m+1)}$ удовлетворяет системе уравнений (11).

б) Пусть $\widetilde{\lambda} = (\widetilde{\lambda}_1, \widetilde{\lambda}_2, ..., \widetilde{\lambda}_{m+1}) \in R^{n(m+1)}$ – решение системы (11). Задача Коши (4), (5) имеет единственное решение при любых $\lambda \in R^{n(m+1)}$ и $f(t) \in C([0,T], R^n)$. Ее решение при $\lambda = \widetilde{\lambda} = (\widetilde{\lambda}_1, \widetilde{\lambda}_2, ..., \widetilde{\lambda}_{m+1})$ обозначим через $\widetilde{u}[t] = (\widetilde{u}_1(t), \widetilde{u}_2(t), ..., \widetilde{u}_{m+1}(t))$. Покажем, что пара $(\widetilde{\lambda}, \widetilde{u}[t])$ является решением задачи (4)-(7). В силу выбора $\widetilde{u}[t]$ по $\widetilde{\lambda}$ выполняются (4), (5). Если $\widetilde{\lambda} \in R^{n(m+1)}$ удовлетворяют (11), то справедливо соотношение

$$B_0\widetilde{\lambda}_1 + D_0\widetilde{\lambda}_2 + C_0\widetilde{\lambda}_{m+1} + C_0\left\{X(T)\int_{\theta_m}^{T} X^{-1}(\tau)\left(A_0(\tau)\widetilde{\lambda}_{m+1} + \sum_{j=1}^{m} A_j(\tau)\widetilde{\lambda}_{j+1} + f(\tau)\right)d\tau\right\} +$$

$$+\sum_{j=1}^{m+1}\int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} M(t)\left[X(t)\int_{\theta_{j-1}}^{t} X^{-1}(\tau)\left(A_0(\tau)\widetilde{\lambda}_j + \sum_{j=1}^{m} A_j(\tau)\widetilde{\lambda}_{j+1} + f(\tau)\right)d\tau\right]dt + \sum_{j=1}^{m+1}\int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} M(t)\widetilde{\lambda}_j dt = d.$$

Теперь, учитывая представление (8), справедливое для пары $(\widetilde{\lambda}, \widetilde{u}[t])$ убеждаемся, что

$$X(T)\int_{\theta_m}^{T} X^{-1}(\tau)\left(A_0(\tau)\widetilde{\lambda}_{m+1} + \sum_{j=1}^{m} A_j(\tau)\widetilde{\lambda}_{j+1} + f(\tau)\right)d\tau = \lim_{t\to T-0}\widetilde{u}_{m+1}(t),$$

$$X(t)\int_{\theta_{j-1}}^{t} X^{-1}(\tau)\left(A_0(\tau)\widetilde{\lambda}_j + \sum_{j=1}^{m} A_j(\tau)\widetilde{\lambda}_{j+1} + f(\tau)\right)d\tau = \widetilde{u}_j(t)$$

и выполняется краевое условие (6). Для $\widetilde{\lambda} \in R^{n(m+1)}$ справедливы также следующие равенства:

$$B_i X(\theta_i)\int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} X^{-1}(\tau)\left[A_0(\tau)\lambda_i + \sum_{j=1}^{m} A_j(\tau)\lambda_{j+1} + f(\tau)\right]d\tau + B_i\lambda_i - C_i\lambda_{i+1} = \varphi_i,\ i = \overline{1,m},$$

отсюда на основе (8) следует выполнение условий (7). В силу эквивалентности задач (1)-(3) и (4)-(7) функция $\widetilde{x}(t)$, построенная с помощью пары $(\widetilde{\lambda}, \widetilde{u}[t])$, будет решением задачи (1)-(3). Лемма 1 доказана.

Теорема 1. *Для однозначной разрешимости задачи (1)-(3) необходимо и достаточно, чтобы матрица* $Q(\theta): R^{n(m+1)} \to R^{n(m+1)}$ *была обратимой.*

Доказательство. *Необходимость.* Построим $(n(m+1)\times n(m+1))$ – матрицу $Q(\theta)$. Предположим обратное, пусть матрица $Q(\theta)$ не имеет обратную. Тогда однородная система уравнений

$$Q(\theta)\lambda = 0 \tag{12}$$

имеет ненулевое решение $\widetilde{\lambda} = (\widetilde{\lambda}_1, \widetilde{\lambda}_2, ..., \widetilde{\lambda}_{m+1}) \in R^{n(m+1)}$.

Как видно из (9), (10), для однородной краевой задачи

$$\frac{dx}{dt} = A_0(t)x + \sum_{j=1}^{m} A_j(t)\lim_{t\to\theta_j+0} x(t), \tag{13}$$

$$B_0x(0) + D_0x(\theta_1) + C_0x(T) + \int_0^T M(t)x(t)dt = 0, \tag{14}$$

$$B_i\lim_{t\to\theta_i-0} x(t) - C_i\lim_{t\to\theta_i+0} x(t) = 0,\quad i = \overline{1,m}, \tag{15}$$

правая часть (11) – вектор $F(\theta) = 0$ и система (11) имеет вид (12). Поэтому, согласно лемме 1, функция $\widetilde{x}(t)$, определяемая равенствами

$$\tilde{x}(t)=\tilde{\lambda}_r+\tilde{u}_r(t),\ \ t\in[\theta_{r-1},\theta_r),\ \ r=\overline{1,m+1},\ \tilde{x}(T)=\tilde{\lambda}_{m+1}+\lim_{t\to T-0}\tilde{u}_{m+1}(t),$$

где система функций $\tilde{u}[t]=(\tilde{u}_1(t),\tilde{u}_2(t),...,\tilde{u}_{m+1}(t))$ – решение задачи Коши (4), (5) при $\lambda_r=\tilde{\lambda}_r$, $r=\overline{1,m+1}$, $f(t)=0$, будет ненулевым решением краевой задачи (13)-(15). Это противоречит однозначной разрешимости задачи (1)-(3), так как задача (13)-(15) кроме построенного ненулевого решения $\tilde{x}(t)$ имеет также и решение $x(t)=0$.

Достаточность. Использовав обратимость $(n(m+1)\times n(m+1))$–матрицы $Q(\theta)$, найдем ее единственное решение $\lambda^*=-[Q(\theta)]^{-1}F(\theta)$, $\lambda^*=(\lambda_1^*,\lambda_2^*,...,\lambda_{m+1}^*)\in R^{n(m+1)}$.

Решая задачу Коши (4), (5) при $\lambda_r=\lambda_r^*$, $r=\overline{1,m+1}$, получаем систему функций $\tilde{u}[t]=(\tilde{u}_1(t),\tilde{u}_2(t),...,\tilde{u}_{m+1}(t))$. Согласно лемме 1 функция $x^*(t)$, определяемая равенствами $x^*(t)=\lambda_r^*+u_r^*(t)$, $t\in[\theta_{r-1},\theta_r)$, $r=\overline{1,m+1}$, $x^*(T)=\lambda_{m+1}^*+\lim\limits_{t\to T-0}u_{m+1}^*(t)$, будет решением задачи (1)-(3).

Установим единственность решения. Пусть задача (1)-(3) кроме $x^*(t)$ имеет некоторое другое решение $\tilde{x}(t)$. Тогда пара $(\tilde{\lambda},\tilde{u}[t])$, составленная по функции $\tilde{x}(t)$, также является решением краевой задачи с параметром (4)-(7). По лемме 1 как λ^*, так и $\tilde{\lambda}$ удовлетворяют системе уравнений (11):

$$Q(\theta)\lambda^*=F(\theta),\qquad\qquad Q(\theta)\tilde{\lambda}=F(\theta).$$

Отсюда вследствие обратимости матрицы $Q(\theta)$ следует равенство $\lambda^*=\tilde{\lambda}$. Единственность решения задачи Коши (4), (5) обеспечивает выполнение равенств $u_r^*(t)=\tilde{u}_r(t)$, $t\in[\theta_{r-1},\theta_r)$, $r=\overline{1,m+1}$, $\lim\limits_{t\to T-0}u_{m+1}^*(t)=\lim\limits_{t\to T-0}\tilde{u}_{m+1}(t)$. Поэтому $x^*(t)=\tilde{x}(t)$ для всех $t\in[0,T]$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Задача (1)-(3) разрешима тогда и только тогда, когда вектор $F(\theta)\in R^{n(m+1)}$, составленный из заданной функции $f(t)\in C([0,T],R^n)$ и векторов $d\in R^n$, $\varphi_i\in R^n$, $i=\overline{1,m}$, ортогонален к ядру транспонированной матрицы $(Q(\theta))'$, т.е. для $\forall\ \xi\in Ker\ (Q(\theta))'$ справедливо равенство $(F(\theta),\xi)=0$, где $(\ \cdot,\cdot\ )$ – скалярное произведение в $R^{n(m+1)}$.*

Доказательство. *Достаточность.* Предположим, что задача (1)-(3) имеет решение. Тогда по лемме 1 система линейных уравнений (11) имеет решение. Это возможно, если только вектор $F(\theta)$, составленный по $f(t)$, d, φ_i, $i=\overline{1,m}$, ортогонален к ядру транспонированной матрицы $(Q(\theta))'$.

Необходимость. Пусть $F(\theta)\perp Ker\ (Q(\theta))'$. Тогда система линейных уравнений относительно параметров (11) разрешима и ее решение имеет вид $\hat{\lambda}=[Q(\theta)]^{-1}F(\theta)$. А задача Коши (4), (5) при $\lambda_r=\hat{\lambda}_r$, $r=\overline{1,m+1}$ имеет единственное решение $u_r(t)=\hat{u}_r(t)$, $r=\overline{1,m+1}$. Тогда по лемме 1 следует, что задача (1)-(3) имеет решение. Теорема 2 доказана.

Таким образом, при выполнении условий теоремы 2 задача (1)-(3) однозначно разрешима. Далее предлагается алгоритм нахождения единственного решения задачи (1)-(3).

Алгоритм нахождения решения задачи (1) – (3).

Как видно из уравнений (9), (10), коэффициенты и правая часть системы (11) находятся как решение матричных и векторных задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dz}{dt}=A_0(t)z+A_i(t),\ t\in[\theta_{r-1},\theta_r),\ i=\overline{0,m},\ \ z(\theta_{r-1})=0,\ \ r=\overline{1,m+1},\tag{16}$$

$$\frac{dz}{dt} = A_0(t)z + f(t)\,,\ t \in [\theta_{r-1}, \theta_r),\ \ z(\theta_{r-1}) = 0,\ \ r = \overline{1, m+1}. \tag{17}$$

Решение системы (11) вектор $\lambda^* = [Q(\theta)]^{-1} F(\theta)$, где $\lambda^* \in R^{n(m+1)}$ состоит из значений решений исходной задачи (1)-(3) в начальных точках подинтервалов, т.е. $\lambda_r^* = x^*(\theta_{r-1})$, $r = \overline{1, m+1}$. Если известно $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, ..., \lambda_{m+1}^*)$ - решение системы (11), тогда решение задачи Коши

$$\frac{dx^*}{dt} = A_0(t)x^* + \sum_{j=1}^{m} A_j(t)\lambda_{j+1}^* + f(t), \quad t \in [\theta_{r-1}, \theta_r),$$

$$x^*(\theta_{r-1}) = \lambda_r^*, \quad r = \overline{1, m+1},$$

записывается в следующей аналитической форме

$$x^*(t) = X(t)X^{-1}(\theta_{r-1})\lambda_r^* + X(t)\int_{\theta_{r-1}}^{t} X^{-1}(\tau)\left[\sum_{j=1}^{m} A_j(\tau)\lambda_{j+1}^* + f(\tau)\right]d\tau,$$

$$t \in [\theta_{r-1}, \theta_r), \quad r = \overline{1, m+1}, \tag{18}$$

значение функции $x^*(t)$ на правом конце $t = T$ имеет вид

$$x^*(T) = X(t)X^{-1}(\theta_m)\lambda_{m+1}^* + X(t)\int_{\theta_m}^{t} X^{-1}(\tau)\left[\sum_{j=1}^{m} A_j(\tau)\lambda_{j+1}^* + f(\tau)\right]d\tau. \tag{19}$$

Таким образом, в этом случае получаем решение линейной двухточечной краевой задачи с интегральным условием для систем нагруженных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (1)-(3) в аналитической форме (18), (19).

Если матрица дифференциальной части уравнения (1) является переменной и построить фундаментальную матрицу не удается, то в этом случае используем численную реализацию алгоритма метода параметризации. Пусть имеем разбиение $0 = \theta_0 < \theta_1 < ... < \theta_m < \theta_{m+1} = T$. Каждый подинтервал $[\theta_{i-1}, \theta_i)$, $i = \overline{1, m+1}$, делим на N_i частей, приближенные значения коэффициентов и правой части системы (11) найдем решая матричные и векторные задачи Коши (18), (19) методом Рунге-Кутта 4-го порядка с шагом $h_i = (\theta_i - \theta_{i-1})/N_i$, $i = \overline{1, m+1}$, на каждом *i*-ом интервале.

Тогда получим следующую приближенную систему алгебраических уравнений относительно параметров λ:

$$Q_*^{\tilde{h}}(\theta)\lambda = F_*^{\tilde{h}}(\theta),\ \ \lambda \in R^{n(m+1)},\ \ \tilde{h} = (h_1, h_2, ..., h_{m+1}). \tag{20}$$

Решая систему (18) найдем $\lambda^{\tilde{h}} \in R^{n(m+1)}$. Как было отмечено выше компоненты $\lambda^{\tilde{h}} = (\lambda_1^{\tilde{h}}, \lambda_2^{\tilde{h}}, ..., \lambda_{m+1}^{\tilde{h}})$ являются значениями приближенного решения задачи (1) – (3) в начальных точках подинтервалов: $x^{\tilde{h}_r}(\theta_0) = \lambda_1^{\tilde{h}}$, $x^{\tilde{h}_r}(\theta_1) = \lambda_2^{\tilde{h}}, ...,$ $x^{\tilde{h}_r}(\theta_m) = \lambda_{m+1}^{\tilde{h}}$. Из формулы (18), (19) следует, что приближенные значения решения в остальных точках подинтервалов определяются решениями задач Коши

$$\frac{dx}{dt} = A_0(t)x + \sum_{j=1}^{m} A_j(t)\lambda_{j+1}^{\tilde{h}} + f(t), \quad t \in [\theta_{r-1}, \theta_r), \tag{21}$$

$$x(\theta_{r-1}) = \lambda_r^{\tilde{h}}, \quad r = \overline{1, m+1}. \tag{22}$$

Используя метод Рунге-Кутта 4-го порядка, при решении задач Коши (21), (22) находим численное решение задачи (1)-(3).

Пример. На $[0, T]$ рассмотрим линейную двухточечную краевую задачу с интегральным условием для систем нагруженных дифференциальных уравнений при импульсном воздействии

$$\frac{dx}{dt}=A_0(t)x+A_1(t)\lim_{t\to\theta_1+0}x(t)+f(t),\quad t\in(0,T)\setminus\{\theta_1\},\tag{23}$$

$$B_0x(0)+D_0x(\theta_1)+C_0x(T)+\int_0^T M(t)x(t)dt=d,\quad d\in R^2,\quad x\in R^2,\tag{24}$$

$$B_1\lim_{t\to\theta_1-0}x(t)-C_1\lim_{t\to\theta_1+0}x(t)=\varphi_1,\quad \varphi_1\in R^2,\tag{25}$$

где $T=1$, $\theta=1/2$, $A_0=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$, $A_1(t)=\begin{pmatrix}0&t\\1&0\end{pmatrix}$, $M(t)=\begin{pmatrix}t&0\\0&2\end{pmatrix}$, $B_0=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $D_0=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}$, $C_0=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$, $B_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $C_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $d=\begin{pmatrix}7/24\\1\end{pmatrix}$, $\varphi_1=\begin{pmatrix}-1/2\\0\end{pmatrix}$, $f(t)=\begin{pmatrix}-3t/2\\1/2-t\end{pmatrix}$, при $t\in[0,1/2)$, $f(t)=\begin{pmatrix}-t/2\\-5/2\end{pmatrix}$, при $t\in[1/2,1]$.

В рассматриваемой задаче фундаментальной матрицей дифференциальной части уравнения (23) является $X(t)=\begin{pmatrix}1&e^{2t}\\-1&e^{2t}\end{pmatrix}$.

Дополнительные параметры λ_r, $r=1,2$, введем как значения решения в начальных точках подинтервалов: $\lambda_1\hat{=}x(0)$, $\lambda_2\hat{=}x(1/2)$, и произведем замену через $u_1(s)=x(s)-\lambda_1$, $s\in[0,1/2)$, $u_2(s)=x(s)-\lambda_2$, $s\in[0,1/2)$. Тогда получим

$$u_1(t)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\left(1-e^{2t}\right)&-\frac{1}{2}\left(1-e^{2t}\right)\\-\frac{1}{2}\left(1-e^{2t}\right)&-\frac{1}{2}\left(1-e^{2t}\right)\end{pmatrix}\lambda_1+\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}\left(2t+1-e^{2t}\right)&\frac{1}{8}\left(2t^2-2t-1+e^{2t}\right)\\\frac{1}{4}\left(2t-1+e^{2t}\right)&-\frac{1}{8}\left(2t^2+2t+1-e^{2t}\right)\end{pmatrix}\lambda_2+\begin{pmatrix}-\frac{1}{16}\left(2t^2-6t-3+3e^{2t}\right)\\\frac{1}{16}\left(2t^2+14t+3-3e^{2t}\right)\end{pmatrix},$$

$$t\in\left[0,\frac{1}{2}\right),$$

$$u_2(t)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}\left(2-3e^{2t-1}+2t\right)&\frac{1}{16}\left(-11+12e^{2t-1}+4t^2-4t\right)\\\frac{1}{4}\left(-4+3e^{2t-1}+2t\right)&-\frac{1}{16}\left(9-12e^{2t-1}+4t^2+4t\right)\end{pmatrix}\lambda_2+\begin{pmatrix}-\frac{1}{32}\left(4t^2-44t-3+24e^{2t-1}\right)\\\frac{1}{32}\left(4t^2-36t+41-24e^{2t-1}\right)\end{pmatrix},$$

$$t\in\left[\frac{1}{2},1\right],$$

Краевое условие и условия импульсного воздействия решения при t = 1/2 приводит к следующей системе линейных алгебраических уравнений относительно параметров

$$\begin{pmatrix}\frac{19}{16}&\frac{1}{16}&\frac{197}{96}-\frac{9}{16}e&\frac{163}{384}-\frac{9}{16}e\\-1+\frac{1}{2}e&1+\frac{1}{2}e&-\frac{5}{4}+\frac{1}{4}e&\frac{1}{12}+\frac{1}{8}e\\\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e&-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e&-\frac{3}{2}+\frac{1}{4}e&-\frac{3}{16}+\frac{1}{8}e\\-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e&\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e&\frac{1}{4}e&-\frac{21}{16}+\frac{1}{8}e\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_{11}\\\lambda_{12}\\\lambda_{21}\\\lambda_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{317}{256}-\frac{9}{16}e\\-\frac{7}{12}+\frac{3}{16}e\\-\frac{27}{32}+\frac{3}{16}e\\-\frac{21}{32}+\frac{3}{16}e\end{pmatrix}.$$

Отсюда найдем значения параметров, которые обозначим через $\lambda^*_{i,j}$, $i,j=1,2$,

$$\lambda_{11}^* = 0\,,\ \lambda_{12}^* = 0\,,\ \lambda_{21}^* = \frac{1}{2}\,,\ \lambda_{22}^* = \frac{1}{2}\,.$$

Тогда единственное решение $x^*(t)$ задачи (23)-(25) определяется с помощью форму (16), (17) в следующем виде:

$$x^*(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & e^{2t} \\ -1 & e^{2t} \end{pmatrix} \int_0^t \begin{pmatrix} -1/2 \\ (1/2 - \tau)e^{-2\tau} \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in \left[0, \frac{1}{2}\right),$$

$$x^*(t) = \begin{pmatrix} e^{2t-1}/2 \\ e^{2t-1}/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & e^{2t} \\ -1 & e^{2t} \end{pmatrix} \int_{\frac{1}{2}}^t \begin{pmatrix} 1 \\ -e^{-2\tau} \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} t \\ 1-t \end{pmatrix}, \quad t \in t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right],$$

В этом примере нам удалось построить фундаментальную матрицу дифференциальной части рассматриваемого обыкновенного дифференциального уравнения. Алгоритм метода параметризации позволил построить решение задачи (23)-(25) в явном виде.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Нахушев А.М. Краевые задачи для нагруженных интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа и некоторые их приложения к прогнозу почвенной влаги // Дифференц. Уравнения. -1979. - Т. 15, № 1. - С. 96-105.

[2] Нахушев А.М. Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложения к динамике почвенной влаги грунтовых вод // Дифференц. Уравнения, 1982. - Т. 18, № 1. - С. 72-81.

[3] Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. -М.: Высшая

[4] школа, 1995. -205 с.

[5] Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их применение. - М.: Наука, 2012. -232 с.

[6] Абдуллаев В.М., Айда-заде К.Р. О численном решении нагруженных дифференциальных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. - 2004. - Т. 44, № 9. - С. 1585-1595.

[7] Бакирова Э.А. О признаке однозначной разрешимости двухточечной краевой задачи для системы нагруженных дифференциальных уравнений // Известия НАН РК. Сер. физ-матем. - 2005. - №1. -С. 95-102.

[8] Бакирова Э.А. О необходимых и достаточных условиях однозначной разрешимости двухточечной краевой задачи для нагруженных дифференциальных уравнений // Математический журнал. - 2005. -Т. 5, № 3. - С. 25-34.

[9] Кадирбаева Ж.М. Об однозначной и корректной разрешимости линейной двухточечной краевой задачи для нагруженных дифференциальных уравнений // Матем. журнал МОН РК. - 2009. - Т. 9, № 4. - С. 63-71.

[10] Akzhigitov E.A., Kadirbayeva Zh.M. On a solvability of two-point boundary value problem for loaded differential equations // Science review. S.Seifullin Kazakh Agro Technical University. - 2012. - № 2(10). –С. 35-40.

[11] Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И. Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений. - Алматы: Ғылым, 2010. -334 с.

[12] Пулькина Л.С. Нелокальная задача с интегральными условиями для квазилинейного гиперболического уравнения // Математические заметки. - 2001. - Т. 70, №1. -С. 88-95.

[13] Пулькина Л.С. Смешанная задача с интегральным условием для гиперболического уравнения // Математические заметки. -2003. - Т. 74. - № 3. - С. 435 - 445.

[14] Пулькина Л.С. Нелокальная задача с интегральными условиями для гиперболического уравнения // Дифференциальные уравнения. -2004. - Т. 40, № 7. - С. 887 -892.

[15] Абдуллаев В.М., Айда-заде К.Р. О численном решении задач оптимального управления с неразделенными многоточечными и интегральными условиями // Ж. вычисл. матем. и математической физики. - 2012. - Т.52, №12. - С. 2163-2177.

[16] Абдуллаев В.М., Айда-заде К.Р. Численный метод решения нагруженных нелокальных граничных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. - 2014. - Т.54, №7. -С. 1096-1109.

[17] Aida-zade K.R., Abdullaev V.M. On Numerical Solution to Loaded Systems of Ordinary Differential Equations with Non-separated Multipoint and Integral Conditions // Numerical Analysis and Applications. - 2014. - Vol. 17, № 1. - P. 1-16.

[18] Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Well-posedness of nonlocal boundary value problems with integral condition for the system of hyperbolic equations // Journal of Math. analysis and applications. - 2013. - Vol. 402. - P. 167-178.

[19] Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Периодические и почти периодические решения дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Украинский мат. журнал. -1980. -Т. 34, № 1. - С. 66-73.

[20] Samoilenko A.M., Perestyuk N.A. Impulsive Differential Equations. – Singapore: World Scientific, 1995. -462 p.

[21] Тлеулесова А.Б. Об однозначной разрешимости двухточечной краевой задачи с импульсным воздействием // Математический журнал. - 2004. - Т.4, №4. - С. 93-102.

[22] Джумабаев Д.С. Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. - 1989. - Т.29, №1. -С. 50-66.

[23] Джумабаев Д.С., Иманчиев А.Е. Корректная разрешимость линейной многоточечной краевой задачи // Математический журнал. - 2005. - Т.5, №1. - С. 30-38.

[24] Джумабаев Д.С. Необходимые и достаточные условия разрешимости линейных краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма // Украинский математический журнал. -2014. -Т.66, №8. - С. 1074-1091.

REFERENCES

[1] Nakhushev A.M. Boundary value problems for loaded integro-differential equations of hyperbolic type and some of their applications to the forecast of soil moisture. *Differential equations,* **1979,** 15, 1, 96-105 (in Russ.).

[2] Nakhushev A.M. On an approximate method of solving boundary value problems for differential equations and its applications to the dynamics of soil moisture groundwater. *Differential equations,* **1982,** 18, 1, 72-81 (in Russ.).

[3] Nakhushev A.M. Equations of mathematical biology. M.: Visshaya Shkola, 1995. 205 p. (in Russ.).

[4] Nakhushev A.M. Loaded equations and their applications. M.: Science, 2012. 232 p. (in Russ.).

[5] Abdullaev V.M., Aida-zade K.R. On a numerical solution of loaded differential equations. *Journal of Computational Mathematics and mathematical physics,* **2004,** 44, 9, 1585-1595 (in Russ.).

[6] Bakirova E.A. On a criterion of the unique solvability of a two-point boundary value problem for loaded differential equations. *Izvestia NAS RK. Seria phys.-math.,* **2005,** 1, 95-102 (in Russ.).

[7] Bakirova E.A. On necessary and sufficient conditions of the unique solvability of a two-point boundary value problem for loaded differential equations. *Mathematical Journal,* **2005,** 5, 3, 25-34 (in Russ.).

[8] Kadirbayeva Zh.M. On the unique and correct solvability of a linear two-point boundary value problem for loaded differential equations. *Mathematical Journal,* **2009,** 9, 4, 63-71 (in Russ.).

[9] Akzhigitov E.A., Kadirbayeva Zh.M. On a solvability of two-point boundary value problem for loaded differential equations. *Science review. S.Seifullin Kazakh Agro Technical University*, **2012,** 2(10), 35-40 (in Eng.).

[10] Dzhenaliev M.T., Ramazanov M.I. Loaded equation as a perturbation of differential equations. Almaty: Science, 2010. 334 p. (in Russ.).

[11] Pulkina L.C. A nonlocal problem with integral conditions for the quasilinear parabolic equation. *Mathematical Notes*, **2001,** 70, 1, 88-95 (in Russ.).

[12] Pulkina L.C. Mixed problem with integral condition for the hyperbolic equation. *Mathematical Notes*, **2003,** 74, 3, 435-445 (in Russ.).

[13] Pulkina L.C. A nonlocal problem with integral conditions for the hyperbolic equation. *Differential equations,* **2004,** 40, 7, 887-892 (in Russ.).

[14] Abdullaev V.M., Aida-zade K.R. Numerical solution of optimal control problems with unseparated multipoint and integral conditions. *Journal of Computational Mathematics and mathematical physics,* **2012,** 52, 12, 2163-2177 (in Russ.).

[15] Abdullaev V.M., Aida-zade K.R. Numerical method of solution to loaded nonlocal boundary value problems for ordinary differential equations. *Journal of Computational Mathematics and mathematical physics,* **2014,** 54, 7, 1096-1109 (in Russ.).

[16] Aida-zade K.R., Abdullaev V.M. On Numerical Solution to Loaded Systems of Ordinary Differential Equations with Non-separated Multipoint and Integral Conditions. *Numerical Analysis and Applications,* **2014,** 17,1, 1-16 (in Eng.).

[17] Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Well-posedness of nonlocal boundary value problems with integral condition for the system of hyperbolic equations. *Journal of Math. analysis and applications*, **2013,** 402, 167-178 (in Eng.).

[18] Samoilenko A.M., Perestyuk N.A. Periodic and almost periodic solutions of differential equations with impulse effect. *Ukrainian Mathematical Journal,* **1980,** 34, 1, 66-73 (in Russ.).

[19] Samoilenko A.M., Perestyuk N.A. Impulsive Differential Equations. Singapore: World Scientific, 1995. 462 p. (in Eng.).

[20] Tleulesova A.B. On an unique solvability of a two-point boundary value problem of impulse effect. *Mathematical Journal,* **2004,** 4, 4, 93-102 (in Russ.).

[21] Dzhumabaev D.S. Criterions of the unique solvability of a linear boundary value problem for ordinary differential equation. *Journal of Computational Mathematics and mathematical physics,* **1989,** 29, 1, 50-66 (in Russ.).

[22] Dzhumabaev D.S., Imanchiev A.E. Correct solvability of linear multipoint boundary value problem. *Mathematical Journal,* **2005,** 5, 1, 30-38 (in Russ.).

[23] Dzhumabaev D.S. Necessary and sufficient conditions for the solvability of linear boundary value problems for the Fredholm integral-differential equations. *Ukrainian Mathematical Journal,* **2014,** 66, 8, 1074-1091 (in Russ.).

ИМПУЛЬСТІК ӘСЕР БОЛҒАНДА ЖҮКТЕЛГЕН ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ҮШІН КӨПНҮКТЕЛІ ИНТЕГРАЛДЫҚ ШАРТЫ БАР СЫЗЫҚТЫ ШЕТТІК ЕСЕПТІҢ ШЕШІЛІМДІЛІГІ ТУРАЛЫ

Ж. М. Қадырбаева, С. С. Кабдрахова

Математика және математикалық моделдеу институты, Алматы, Қазақстан

Тірек сөздер: теңдеу, импульс, жүктеу, шешілімділік, алгоритм.

Аннотация. Импульстік әсер болғанда жүктелген дифференциалдық теңдеулер үшін көпнүктелі интегралдық шарты бар сызықты шеттік есеп қарастырылады. Қарастырылып отырған есепті шешу үшін параметрлеу әдісі қолданылады. Импульстік әсер болғанда жүктелген дифференциалдық теңдеулер үшін көпнүктелі интегралдық шарты бар сызықты шеттік есеп жүктелу нүктелерінде қосымша параметрлер енгізу арқылы параметрлі эквивалентті шеттік есепке келтіріледі. Параметрлі эквивалентті шеттік есеп параметрлі жәй дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін Коши шеттік есебінен, көпнүктелі интегралдық шартынан және импульстік түрткі шартынан тұрады. Параметрлі жәй дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін Коши шеттік есебінің шешімі дифференциалдық теңдеудің фундаменталдық матрицасының көмегімен тұрғызылады. Тұрғызылған шешімнің сәйкес нүктелерінде мәндерді көпнүктелі интегралдық шартқа және импульстік әсер шартына қоя отырып, параметрлерге қарасты сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесі құрылады. Параметрлерге қарасты сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесінің шешімінің және импульстік әсер болғанда жүктелген дифференциалдық теңдеулер үшін көпнүктелі интегралдық шарты бар сызықты шеттік есептің шешімінің өзара байланысы туралы лемма дәлелденеді. Импульстік әсер болғанда жүктелген дифференциалдық теңдеулер үшін көпнүктелі интегралдық шарты бар сызықты шеттік есептің бірмәнді шешілі-ділігінің нышаны параметрлерге қарасты сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесінің матрицасының терминінде тағайындалды. Импульстік әсер болғанда жүктелген дифференциалдық теңдеулер үшін көпнүктелі интегралдық шарты бар сызықты шеттік есептің шешіліділігінің қажетті және жеткілікті шарттары, параметрлерге қарасты сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесінің оң жағының коэффициентірінің транспонирленген матрицасның өзегіне ортогоналдығы арқылы дәлелденді. Импульстік әсер болғанда жүктелген дифференциалдық теңдеулер үшін көпнүктелі интегралдық шарты бар сызықты шеттік есептің, параметрлеу әдісіне негізделген, шешімдерін табу алгоритмі ұсынылды. Алгоритм импульстік әсер болғанда жүктелген екі өлшемді дифференциалдық теңдеулер үшін көпнүктелі интегралдық шарты бар сызықты шеттік есептің шешімін табу мысалымен сипатталады.

Поступила 13.01.2016 г.

Publication Ethics and Publication Malpractice in the journals of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan

For information on Ethics in publishing and Ethical guidelines for journal publication see http://www.elsevier.com/publishingethics and http://www.elsevier.com/journal-authors/ethics.

Submission of an article to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan implies that the described work has not been published previously (except in the form of an abstract or as part of a published lecture or academic thesis or as an electronic preprint, see http://www.elsevier.com/postingpolicy), that it is not under consideration for publication elsewhere, that its publication is approved by all authors and tacitly or explicitly by the responsible authorities where the work was carried out, and that, if accepted, it will not be published elsewhere in the same form, in English or in any other language, including electronically without the written consent of the copyright-holder. In particular, translations into English of papers already published in another language are not accepted.

No other forms of scientific misconduct are allowed, such as plagiarism, falsification, fraudulent data, incorrect interpretation of other works, incorrect citations, etc. The National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan follows the Code of Conduct of the Committee on Publication Ethics (COPE), and follows the COPE Flowcharts for Resolving Cases of Suspected Misconduct (http://publicationethics.org/files/u2/New_Code.pdf). To verify originality, your article may be checked by the Cross Check originality detection service http://www.elsevier.com/editors/plagdetect.

The authors are obliged to participate in peer review process and be ready to provide corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. All authors of a paper should have significantly contributed to the research.

The reviewers should provide objective judgments and should point out relevant published works which are not yet cited. Reviewed articles should be treated confidentially. The reviewers will be chosen in such a way that there is no conflict of interests with respect to the research, the authors and/or the research funders.

The editors have complete responsibility and authority to reject or accept a paper, and they will only accept a paper when reasonably certain. They will preserve anonymity of reviewers and promote publication of corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. The acceptance of a paper automatically implies the copyright transfer to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.

The Editorial Board of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan will monitor and safeguard publishing ethics.

Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайте:

www:nauka-nanrk.kz

http://www.physics-mathematics.kz

Редактор *М. С. Ахметова*
Верстка на компьютере *Д. Н. Калкабековой*

Подписано в печать 27.01.2016.
Формат 60х881/8. Бумага офсетная. Печать – ризограф.
12,75 п.л. Тираж 300. Заказ 1.

Национальная академия наук РК
050010, Алматы, ул. Шевченко, 28, т. 272-13-18, 272-13-19