ISSN 1991-346X

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ

Х А Б А Р Л А Р Ы

ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

N E W S

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА
СЕРИЯСЫ**

♦

**СЕРИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ**

♦

**PHYSICO-MATHEMATICAL
SERIES**

1 (305)

**ҚАНТАР – АҚПАН 2016 ж.
ЯНВАРЬ – ФЕВРАЛЬ 2016 г.
JANUARY – FEBRUARY 2016**

1963 ЖЫЛДЫҢ ҚАҢТАР АЙЫНАН ШЫҒА БАСТАҒАН
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1963 ГОДА
PUBLISHED SINCE JANUARY 1963

ЖЫЛЫНА 6 РЕТ ШЫҒАДЫ
ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД
PUBLISHED 6 TIMES A YEAR

АЛМАТЫ, ҚР ҰҒА
АЛМАТЫ, НАН РК
ALMATY, NAS RK

«Известия НАН РК. Серия физико-математическая». ISSN 1991-346X
Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы)
Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации и архивов Министерства культуры и информации Республики Казахстан **№5543-Ж**, выданное 01.06.2006 г.

Периодичность: 6 раз в год.
Тираж: 300 экземпляров.

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, ком. 219, 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,
www:nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75.

News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physical-mathematical series.
ISSN 1991-346X
Owner: RPA "National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan" (Almaty)
The certificate of registration of a periodic printed publication in the Committee of information and archives of the Ministry of culture and information of the Republic of Kazakhstan N 5543-Ж, issued 01.06.2006

Periodicity: 6 times a year
Circulation: 300 copies

Editorial address: 28, Shevchenko str., of. 219, 220, Almaty, 050010, tel. 272-13-19, 272-13-18,
www:nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

Address of printing house: ST "Aruna", 75, Muratbayev str, Almaty

N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 1, Number 305 (2016), 190 – 199

THE SECOND SYSTEM OF CANONICAL ELEMENTS OF POINCARE IN THE SECOND HILL'S PROBLEM

S. S. Daiyrbekov, M. D. Shinibaev, A. Narimbetova, O. Utegenov, D. Tanabaeva

University of Syr-Daria, Zhetysai, Kazakhstan

Key words: canonical elements of Poincare, intermediate orbit, the central field of gravity, the satellite of the Earth, the Hill's problem.

Annotation. [1] gives the following description of the second canonical elements of the Poincare: "Thus the value of the order ρ_1 eccentricity, ρ_2 the order of inclinations, so that these elements are convenient in the case where the INT[1] moves in a nearly circular orbit lying in the main plane".

[2] pointed out: "Canonical Poincare elements may only be used to describe the motion of elliptic type".

From these observations it follows that the second system of canonical elements Poincare is applicable only if the eccentricity of the orbit below the limit of Laplace $e_л = 0,67$.

In the article developed a method to use a second system of canonical elements of Poincare in $e \le e_л$ case, as well as in $e > e_л$. This method not only preserves, the positive qualities of the second canonical elements of Poincare, but also expands the scope of these elements.

УДК 531.1+629.195

ВТОРАЯ СИСТЕМА КАОНОНИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ ПУАНКАРЕ ВО ВТОРОЙ ЗАДАЧЕ ХИЛЛА

С. С. Дайырбеков, М. Д. Шинибаев, А. Наримбетова, О. Утегенов, Д. Танабаева

Университет Сыр-Дария, Джетысай, Казахстан

Ключевые слова: система канонических элементов Пуанкаре, промежуточная орбита, центральное поле тяготения, спутник Земли, задача Хилла.

Аннотация. В [1] дается следующая характеристика второй системы канонических элементов Пуанкаре: «Таким образом величина ρ_1 имеет порядок эксцентриситета, ρ_2 имеет порядок наклонности, вследствие чего эти элементы оказываются удобными в том случае, когда ИНТ[2] движется по почти круговой орбите, лежащей в основной плоскости».

В [2] отмечено: «Канонические элементы Пуанкаре могут применяться только для описания движения эллиптического типа».

Из этих замечаний следует, что вторая система канонических элементов Пуанкаре применима только в случае эксцентриситета орбиты меньшего предела Лапласа $e_л = 0,67$.

[1] INT – artificial celestial body.
[2] /ИНТ – искусственное небесное тело.

В статье разработан метод, позволяющий использовать вторую систему канонических элементов Пуанкаре и в случае $e \le e_{\ddot{e}}$, а также при $e > e_{\ddot{e}}$. Этот метод не только сохраняет положительные качества второй системы канонических элементов Пуанкаре, но и расширяет область применения этих элементов.

Рассмотрим движение ИСЗ в поле тяготения Хилла [3]

$$U = \frac{\mu}{r} + \frac{1}{2}\nu r^2 - \frac{3}{2}\nu z^2, \tag{1}$$

где первый член характеризует поле тяготения центрального тела со сферическим распределением плотности, а остальные представляют возмущения от внешнего тела, μ – гравитационный параметр, ν – постоянный параметр, подбираемый так, чтобы движение перицентра и узла орбиты ИСЗ совпадали с наблюдаемыми их движениями, $\bar{r}$ – радиус-вектор ИСЗ, z – ее аппликата.

Невозмущенному движению при $\nu = 0$ соответствуют следующие выражения [4]:

$$\left.\begin{aligned} x &= r(\cos u \cos\Omega - \sin u \sin\Omega \cos i),\\ y &= r(\cos u \sin\Omega + \sin u \cos\Omega \cos i),\\ z &= r(\sin u \sin i) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Если подставить последнее уравнение из (2) в (1), то найдем

$$U = \frac{\mu}{r} + \frac{1}{2}\nu r^2(1 - 3\sin^2 u \sin^2 i), \tag{3}$$

где

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos\upsilon}, \tag{4}$$

где a – большая полуось, e – эксцентриситет, i – наклон, υ – истинная аномалия, $u = \upsilon + \omega$, Ω – долгота восходящего узла, ω – угловое расстояние перицентра, u – аргумент широты.

Запишем функцию Гамильтона

$$H = T - U = \left(\frac{\mathrm{v}^2}{2} - \frac{\mu}{r}\right) - \frac{1}{2}\nu r^2(1 - 3\sin^2 u \sin^2 i), \tag{5}$$

здесь: $$H = H_0 + H_1,$$

$$H_0 = \left(\frac{\mathrm{v}^2}{2} - \frac{\mu}{r}\right) = h = \frac{\mu}{2a} = \frac{\mu^2}{2L^2}, \tag{6}$$

$$H_1 \approx \frac{1}{2}\nu r^2(1 - 3\sin^2 u \sin^2 i), \tag{7}$$

где H_1 – пертурбационная функция, H_0 – гамильтониан невозмущенного движения ИСЗ.

Выпишем вторую систему канонических элементов Пуанкаре:

$$\left.\begin{aligned} &L = \sqrt{\mu a}, \quad \lambda = \ell + \pi,\\ &\xi_1 = \sqrt{2\rho_1}\cos\omega_1, \quad \eta_1 = \sqrt{2\rho_1}\sin\omega_1,\\ &\xi_2 = \sqrt{2\rho_2}\cos\omega_2, \quad \eta_2 = \sqrt{2\rho_2}\sin\omega_2, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

где

$$\left.\begin{aligned} &\rho_1 = \sqrt{\mu a}\cdot(1 - \sqrt{1-e^2}), \ \ \omega_1 = -\pi,\\ &\rho_2 = \sqrt{\mu a}\cdot\sqrt{1-e^2}\cdot(1 - \cos i), \ \ \omega_2 = -\Omega, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$\pi = \Omega + \omega$ – долгота перицентра.

В элементах (8) уравнения возмущенного движения ИСЗ имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dL}{dt}=\frac{\partial F}{\partial\lambda},\quad \frac{d\xi_1}{dt}=\frac{\partial F}{\partial\eta_1},\quad \frac{d\xi_2}{dt}=\frac{\partial F}{\partial\eta_2},\\ &\frac{d\lambda}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial L},\quad \frac{d\eta_1}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial\xi_1},\quad \frac{d\eta_2}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial\xi_2},\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

где

$$F=\frac{\mu^2}{2L^2}+H_1. \tag{11}$$

В соответствие с [2] координаты x,y,z и канонические элементы второй системы связаны так:

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{[2L-(\xi_1^2+\eta_1^2)]^2}{4\mu(1+e\cos\upsilon)\sqrt{\xi_2^2+\eta_2^2}}\left\{\xi_2\cos(\upsilon+\omega)+\eta_2\sin(\upsilon+\omega)\cdot\left[1-\frac{\xi_2^2+\eta_2^2}{2L-(\xi_1^2+\eta_1^2)}\right]\right\},\\ y&=\frac{[2L-(\xi_1^2+\eta_1^2)]^2}{4\mu(1+e\cos\upsilon)\sqrt{\xi_2^2+\eta_2^2}}\left\{-\eta_2\cos(\upsilon+\omega)+\xi_2\sin(\upsilon+\omega)\cdot\left[1-\frac{\xi_2^2+\eta_2^2}{2L-(\xi_1^2+\eta_1^2)}\right]\right\},\\ z&=\frac{[2L-(\xi_1^2+\eta_1^2]^2}{4\mu(1+e\cos\upsilon)\sqrt{\xi_2^2+\eta_2^2}}\left\{\frac{(\xi_2^2+\eta_2^2)\sin(\upsilon+\omega)\sqrt{4L-2(\xi_1^2+\eta_1^2)-(\xi_2^2+\eta_2^2)}}{[2L-(\xi_1^2+\eta_1^2)]}\right\},\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

$$\left.\begin{aligned} &\lambda-\Omega-\omega=\left(1-\frac{\sqrt{\xi_1^2+\eta_1^2}}{\sqrt{2}L}\right)^3\int_0^{\upsilon}\frac{d\upsilon}{(1+e\cos\upsilon)^2},\\ &e=\frac{\sqrt{\xi_1^2+\eta_1^2}}{\sqrt{L}}\cdot\left[1-\frac{1}{4L}(\xi_1^2+\eta_1^2)\right]^{1/2},\\ &\cos\omega=\frac{\xi_1\xi_2+\eta_1\eta_2}{\sqrt{(\xi_1^2+\eta_1^2)(\xi_2^2+\eta_2^2)}},\quad \sin\omega=\frac{\xi_1\xi_2-\eta_1\eta_2}{\sqrt{(\xi_1^2+\eta_1^2)(\xi_2^2+\eta_2^2)}}.\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

В соответствие с [3,4][3]:

$$\xi_1^2+\eta_1^2=2L(1-\sqrt{1-e^2}),\ \xi_2^2+\eta_2^2=4L\sqrt{1-e^2}\sin^2\frac{i}{2}, \tag{14}$$

$$\left.\begin{aligned} &\sin i=\sqrt{\xi_2^2+\eta_2^2}\cdot\frac{\left[4L-2(\xi_1^2+\eta_1^2)-(\xi_2^2+\eta_2^2)\right]^{1/2}}{[2L-(\xi_1^2+\eta_1^2)]},\\ &\sin^2\frac{i}{2}=\frac{\xi_2^2+\eta_2^2}{4L-2(\xi_1^2+\eta_1^2)}.\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Перепишем r в элементах (8), для этого в (4) заменим a из (8) и e^2 из (13), тогда получим

$$r=\frac{[2L-(\xi_1^2+\eta_1^2)]^2}{4\mu(1+e\cos\upsilon)}. \tag{16}$$

$\sin^2 i$ найдем из (15)

[3] Субботин М.Ф. Введение в теоретическую астрономию. - М., 1968. - 800 с. См. стр. 660.

$$\sin^2 i = \frac{(\xi_2^2+\eta_2^2)}{[2L-((\xi_1^2+\eta_1^2)]^2}[4L-2(\xi_1^2+\eta_1^2)-(\xi_2^2+\eta_2^2)]. \qquad (17)$$

Преобразуем $\sin u$, используя $u = \upsilon + \omega$

$$\sin^2 u = [\sin\upsilon\cos\omega + \cos\upsilon\sin\omega]^2. \qquad (18)$$

Преобразуем числитель (16), используя (14)

$$[2L-((\xi_1^2+\eta_1^2)]^2 = 4L(1-e^2). \qquad (19)$$

Подставив (19) в (16), найдем

$$r = \frac{L^2(1-e^2)}{\mu(1+e\cos\upsilon)}. \qquad (20)$$

Определим r^2

$$r = \frac{L^4(1-2e^2)}{\mu^2(1+e\cos\upsilon)^2}. \qquad (21)$$

Преобразуем H_1 к элементам (8)

$$H = \frac{\nu}{2\mu^2}L^4\frac{(1-2e^2)}{(1+e\cos\upsilon)^2}\cdot[1-3(\sin\upsilon\cos\omega+\cos\upsilon\sin\omega)^2\sin^2 i\,] \qquad (22)$$

Теперь (11) примет вид

$$F = \frac{\mu^2}{2L^2}+\frac{\nu}{2\mu^2}L^4\cdot(1-2e\cos\upsilon)\cdot[1-3(\sin\upsilon\cos\omega+\cos\upsilon\sin\omega)^2\sin^2 i\,], \qquad (23)$$

здесь отброшены члены порядка $O(\nu e^2)$ и выше, и

$$F = F(L,e,\omega,i) = F(L,\xi_1,\xi_2,\eta_1,\eta_2). \qquad (24)$$

В (24) λ явно не входит, поэтому в (10)

$$\frac{dL}{dt} = 0,\ L - const. \qquad (25)$$

Следует заметить, что остальные частные производные в (10) не равны нулю. При вычислении их нам понадобятся следующие выражения:

$$e'_{\xi_2} = 0,\ e'_{\eta_2} = 0,\ e'_L = \frac{-e}{2L},\ e'_{\xi_1} = \frac{\xi_1}{L}\left(\frac{1}{e}-\frac{3}{8}e\right),\ e'_{\eta_1} = \frac{\eta_1}{L}\left(\frac{1}{e}-\frac{3}{8}e\right), \qquad (26)$$

$$(\cos\omega)'_L = 0,\ (\cos\omega)'_{\xi_1} = \frac{1}{2L^2\sin\frac{i}{2}}\left[L\xi_2\cdot\frac{1}{e}-\xi_1(\xi_1\xi_2+\eta_1\eta_2)\cdot\left(\frac{1}{e^3}-\frac{1}{2e}\right)\right], \qquad (27)$$

$$(\cos\omega)'_{\xi_2} = \frac{2L\xi_1\sin\frac{i}{2}-(\xi_1\xi_2+\eta_1\eta_2)\xi_2\cdot\sin^{-1}\frac{i}{2}\cdot\frac{1}{2}}{4L^2e\sin^2\frac{i}{2}}, \qquad (28)$$

$$(\cos\omega)'_{\eta_1} = \frac{1}{2L^2\sin\frac{i}{2}}\left[\eta_2 L\cdot\frac{1}{e}-(\xi_1\xi_2+\eta_1\eta_2)\eta_1\cdot\left(\frac{1}{e^3}-\frac{1}{2e}\right)\right], \qquad (29)$$

$$(\cos\omega)'_{\eta_2} = \frac{2L\eta_1\sin\frac{i}{2}-(\xi_1\xi_2+\eta_1\eta_2)\eta_2\cdot\sin^{-1}\frac{i}{2}\cdot\frac{1}{2}}{4L^2e\cdot\sin^2\frac{i}{2}}, \qquad (30)$$

$$2Le\cdot\sin\frac{i}{2}\cos\omega=\xi_1\xi_2+\eta_1\eta_2\,,\ 2Le\cdot\sin\frac{i}{2}\sin\omega=\xi_1\xi_2-\eta_1\eta_2\,,$$

$$(\sin\omega)'_L=0\,,\ (\sin\omega)'_{\xi_2}=\frac{2L\xi_1\sin\frac{i}{2}-(\xi_1\xi_2-\eta_1\eta_2)\xi_2\cdot\sin^{-1}\frac{i}{2}\cdot\frac{1}{2}}{4L^2e\sin^2\frac{i}{2}}\,, \tag{31}$$

$$(\sin\omega)'_{\xi_1}=\frac{1}{2L^2\sin\frac{i}{2}}\left[L\xi_2\cdot\frac{1}{e}-(\xi_1\xi_2-\eta_1\eta_2)\cdot\left(\frac{1}{e^3}-\frac{1}{2e}\right)\xi_1\right], \tag{32}$$

$$(\sin\omega)'_{\eta_1}=\frac{1}{2L^2\sin\frac{i}{2}}\left[\eta_2L\cdot\frac{1}{e}-(\xi_1\xi_2-\eta_1\eta_2)\cdot\left(\frac{1}{e^3}-\frac{1}{2e}\right)\eta_1\right], \tag{33}$$

$$(\sin\omega)'_{\eta_2}=\frac{2L\eta_1\sin\frac{i}{2}-(\xi_1\xi_2-\eta_1\eta_2)\eta_2\cdot\sin^{-1}\frac{i}{2}\cdot\frac{1}{2}}{4L^2e\cdot\sin^2\frac{i}{2}}\,, \tag{34}$$

$$(\sin i)'_L=\frac{1}{\sqrt{L}}\sin^2\frac{i}{2}\cdot\left(\frac{1-4L\cos^2\frac{i}{2}}{4L\cos\frac{i}{2}}\right)\cdot(4+e^2)\,, \tag{35}$$

$$(\sin i)'_{\xi_1}=\frac{2}{\sqrt{L}}\cdot\left(\frac{2\cos^2\frac{i}{2}-1}{\cos\frac{i}{2}}\right)\cdot\sin^2\frac{i}{2}\cdot\xi_1\cdot\left(1+\frac{1}{4}e^2\right), \tag{36}$$

$$(\sin i)'_{\xi_2}=\frac{\xi_2^2}{4L^2\sin i}\cdot(1+e^2)\,,\ (\sin i)'_{\eta_2}=\frac{\eta_2^2}{4L^2\sin i}\cdot(1+e^2) \tag{37}$$

$$(\sin i)'_{\eta_1}=\frac{2}{\sqrt{L}}\cdot\left(\frac{2\cos^2\frac{i}{2}-1}{\cos\frac{i}{2}}\right)\cdot\sin^2\frac{i}{2}\cdot\eta_1\cdot\left(1+\frac{1}{4}e^2\right). \tag{38}$$

Найдем правые части канонических уравнений (10), взяв частные производные от (23), используя (26)-(38):

$$\frac{d\xi_1}{dt}=\frac{\partial F}{\partial\eta_1}=v\left\{\frac{1}{e}\xi_{-10}\cos\upsilon+\frac{1}{e}\xi_{-11}\cos(\upsilon+2\omega)+\frac{1}{e}\xi_{-11}\cos(3\upsilon+2\omega)+\right.$$
$$\left.+\left(e\xi_{11}+\frac{e^2}{v}\xi_{12}\right)\cos\upsilon+e\xi_{21}\cos(\upsilon+2\omega)+e\xi_{21}\cos(3\upsilon+2\omega)\right\}, \tag{39}$$

где

$$B_1=-\frac{L^3}{\mu^2}\,,\ B_2=\frac{4}{\sqrt{L}}\sin i\sin^2\frac{i}{2}\cdot\left(\frac{2\cos^2\frac{i}{2}-1}{\cos\frac{i}{2}}\right),$$

$$\xi_{-10}=-\frac{3}{2}B_1\sin^2 i\,,\ \xi_{-11}=\frac{3}{4}B_1\sin^2 i\,,\ \xi_{11}=\frac{9}{16}B_1\sin^2 i\,,\ \xi_{24}=-\frac{9}{32}B_1\sin^2 i\,,$$

$$\xi_{12}=2\sqrt{L}B_2\sin(\Omega+\omega)\,.$$

$$\frac{d\xi_2}{dt}=\frac{\partial F}{\partial\eta_2}=v_2\,\{(a_{00}+ea_{01})+a_{10}\sin\upsilon+a_{20}\sin(\upsilon+2\omega)+a_{30}\sin(3\upsilon+2\omega)+$$
$$+ea_{11}\sin2\upsilon+ea_{21}\cos2\upsilon+ea_{31}\sin(4\upsilon+2\omega)+ea_{41}\sin(4\upsilon+2\omega)+$$
$$+ea_{51}\sin(2\upsilon+2\omega)+(a_{60}+ea_{61})\cos\upsilon+(a_{70}+ea_{71})\cos(\upsilon+2\omega)+$$
$$+(a_{70}+ea_{71})\cos(3\upsilon+2\omega)+(a_{80}+ea_{81})\cos(2\upsilon+2\omega)\},\tag{40}$$

где:

$$a_{00}=\frac{1}{4L}\sin^2\frac{i}{2}\sin^2\Omega\,,\ a_{01}=-\frac{1}{2}\sin^2\frac{i}{2}\left(E_{40}\cos2\omega+E_{20}\sin2\omega+E_{10}\right),\ a_{10}=E_{00}\sin^2 i\,,$$

$$a_{20}=E_{20}\sin^2 i\,,\ a_{30}=E_{30}\sin^2 i\,,\ a_{11}=a_{10}\,,\ a_{21}=-\frac{1}{2}E_{10}\sin^2 i\,,\ a_{31}=-\frac{1}{2}E_{30}\sin^2 i\,,$$

$$a_{41}=-\frac{1}{2}E_{40}\sin^2 i\,,\ a_{51}=-\frac{1}{2}\sin^2 i(E_{20}+E_{30})\,,\ a_{60}=E_{10}\sin^2 i\,,\ a_{61}=-\frac{1}{4L}\sin^2\frac{i}{2}\sin^2\Omega\,,$$

$$a_{70}=E_{40}\sin^2 i\,,\ a_{71}=\frac{1}{8L}\sin^2\frac{i}{2}\sin^2\Omega\,,\ v_2=v\left(-\frac{3L^4}{2\mu^2}\right),$$

$$E_{00}=\frac{B_3\sin\frac{i}{2}\cos\omega}{4L}-\frac{\sin(\Omega+\omega)}{2\sqrt{L}\sin\frac{i}{2}}\,,\ E_{10}=-\frac{B_5\sin\omega}{4L\sin^2\frac{i}{2}}\,,$$

$$E_{20}=\frac{\sin(\Omega+\omega)}{4\sqrt{L}\sin\frac{i}{2}}+\frac{1}{8L}B_3\sin\frac{i}{2}\cos\omega\,,\ E_{30}=\frac{\sin(\Omega+\omega)}{4\sqrt{L}\sin\frac{i}{2}}\,,\ E_{40}=-\frac{\cos(\Omega+\omega)}{4\sqrt{L}\sin\frac{i}{2}}+\frac{B_5\sin\omega}{8L\sin^2\frac{i}{2}}\,,$$

$$B_3=-\sqrt{L}\sin\frac{i}{2}\sin\Omega\,,\ B_4=\sqrt{L}\cdot\frac{1}{4}\sin\frac{i}{2}\sin\Omega\,,\ B_5=\sqrt{L}\sin\frac{i}{2}\cos\Omega\,.$$

$$\frac{d\lambda}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial L}=\frac{\mu^2}{L^3}-v_3\,\{(n_{00}+en_{01})+n_{10}\cos(2\upsilon+2\omega)+n_{11}e\cos\upsilon+$$
$$+n_{21}e\cos(\upsilon+2\omega)+n_{21}e\cos(3\upsilon+2\omega)\},\tag{41}$$

где:

$$b_{00}=c_{00}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right),\ b_{10}=\frac{3}{2}c_{00}\sin^2 i\,,\ b_{11}=c_{01}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right),$$

$$b_{21}=c_{01}\frac{3}{4}\sin^2 i\,,\ d_{00}=d_{01}=-3\sin i\cdot\frac{1}{\sqrt{L}}\sin^2 i\cdot\frac{1-4L\cos^2\frac{i}{2}}{L\cos\frac{i}{2}}\cdot L^4\,,$$

$$d_{10}=12\sin i\cdot\frac{1}{\sqrt{L}}\sin^2\frac{i}{2}\cdot\frac{1-4\cos^2\frac{i}{2}}{L\cos\frac{i}{2}}\cdot L^4\,,\ d_{21}=\frac{d_{10}}{2}\,,$$

$$n_{00}=b_{00}+d_{00}\,,\ n_{01}=d_{01}\,,\ n_{10}=b_{10}+d_{10}\,,\ n_{11}=b_{11}+d_{21}\,,$$

$$n_{21}=b_{21}+d_{31},\ v_3=v\cdot\frac{1}{2\mu^2}.$$

$$\frac{d\eta_1}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial \xi_1}=-v_4\ \{(K_{00}+K_{01}e)+K_{20}\cos(\upsilon+2\omega)+K_{20}\cos(3\upsilon+2\omega)+$$
$$+K_{30}\sin(\upsilon+\omega)+K_{30}\sin(3\upsilon+\omega)+K_{41}e\cos 2\upsilon+K_{51}e\cos(2\upsilon+2\omega)+$$
$$+K_{61}e\cos(4\upsilon+2\omega)+\left(\frac{1}{e}K_{-70}+K_{71}e\right)\sin(2\upsilon+\omega)+(K_{80}+K_{81}e)\cos\upsilon\Big\},\qquad(42)$$

где:

$$D_{00}=\sqrt{L}\sin\frac{i}{2}\cos\Omega,\ D_{02}=\frac{1}{4}D_{00},\ D_{11}=\sqrt{L}\cos(\Omega+\omega),\ D_{21}=2L\sin\frac{i}{2}\cos\omega,$$

$$D_{30}=\frac{1}{2L^2\sin\frac{i}{2}},\ D_{-01}=(LD_{00}-D_{11}D_{21})D_{30},\ D_{31}=\left(LD_{02}+\frac{1}{2}D_{11}D_{21}\right)D_{30},$$

$$D_{42}=2L\sin\frac{i}{2}\sin\omega\cdot D_{11},\ D_{-40}=D_{30}(LD_{00}-D_{42}),\ D_{41}=D_{30}D_{02}L+\frac{1}{2}D_{42},$$

$$D_{51}=\frac{2}{\sqrt{L}}\left(\frac{2\cos^2\frac{i}{2}-1}{\cos\frac{i}{2}}\right)\sin^2\frac{i}{2}D_{11},\ v_4=\frac{v}{2\mu^2}L^4,\ D_{50}=-\frac{2}{L}D_{11},$$

$$D_{61}=4\sin i\sin^2\frac{i}{2}\cdot\left(\frac{2\cos^2\frac{i}{2}-1}{\cos\frac{i}{2}}\right)\cdot\cos(\Omega+\omega),\ K_{00}=-\frac{3}{2}D_{50}\sin^2 i,$$

$$K_{01}=3D_{50}+\sin^2 i\cdot\left(\frac{9}{4}D_{50}-\frac{3}{2}D_{61}\right)-3D_{41}\sin^2 i\sin\omega,\ K_{80}=D_{50}-18D_{-40}\sin^2 i\sin\omega,$$

$$K_{20}=\frac{3}{4}D_{50}\sin^2 i,\ K_{30}=-9D_{-40}\sin^2 i,\ K_{81}=-9\sin^2 i\cdot D_{50},\ K_{41}=3D_{50},$$

$$K_{51}=\frac{3}{2}\sin^2 i\cdot(D_{61}+3D_{50}),\ K_{61}=\frac{9}{4}D_{50}\sin^2 i,\ K_{-70}=-3D_{-40}\sin^2 i,\ K_{71}=-3D_{41}\sin^2 i.$$

$$\frac{d\eta_2}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial \xi_2}=3v_5\ \{(F_{00}+eF_{01})+F_{10}\sin\upsilon+F_{20}\cos(2\upsilon+2\omega)+$$
$$+F_{30}\cos(3\upsilon+2\omega)+(F_{40}+eF_{41})\cos\upsilon+F_{51}e\cos 2\upsilon+F_{61}e\sin 2\upsilon+$$
$$+F_{71}e\cos(\upsilon+2\omega)\}\qquad(43)$$

где:

$$R_{01}=2L\sin\frac{i}{2}\sin\omega\cdot D_{00},\ R_{03}=2L\sin\frac{i}{2}\sin\omega\cdot D_{02},\ D_{71}=\frac{1}{4L^2\sin^2\frac{i}{2}},$$

$$R_{00}=2D_{71}L\cdot D_{11}\sin\frac{i}{2}-\frac{1}{2}\frac{1}{\sin\frac{i}{2}}D_{21}D_{00}D_{71},\ R_{02}=\frac{1}{2}\frac{1}{\sin\frac{i}{2}}D_{21}D_{71}D_{02},$$

$$R_{10} = D_{71} \cdot 2L \sin\frac{i}{2} D_{11} - R_{01}D_{00},\ R_{12} = -(R_{01}D_{02} + R_{03}D_{00}) \cdot \frac{1}{2\sin\frac{i}{2}},$$

$$R_{20} = \frac{1}{4L^2 \sin i} D_{00}^2,\ R_{22} = \frac{1}{4L^2 \sin i}(2D_{00}D_{02} + D_{00}^2),\ v_5 = v_4,\ R_{30} = 2\sin i \cdot R_{20},$$

$$R_{32} = 2\sin i \cdot R_{22},\ F_{00} = R_{30},\ F_{01} = -R_{10}\sin^2 i,\ F_{40} = -F_{01},\ F_{41} = -R_{30},\ F_{51} = -R_{10} \cdot \frac{1}{2}\sin^2 i,$$

$$F_{10} = R_{00}\sin^2 i,\ F_{61} = R_{00}\sin^2 i,\ F_{20} = -\frac{1}{2}R_{30},\ F_{71} = -F_{20},\ F_{30} = \frac{1}{2}R_{30}.$$

В уравнениях (39)-(43) перейдем от t к истинной аномалии υ. Для этого используем формулу [5, стр.199]

$$\frac{dA}{d\upsilon} = \frac{1}{n}\left(\frac{r}{a}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \frac{dA}{dt} = a\sqrt{\frac{a}{\mu}}(1 - 2e\cos\upsilon)\frac{dA}{dt}, \tag{44}$$

где через A обозначен любой элемент из (8), $n = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}$ – среднее движение. Тогда (39) примет вид:

$$\frac{d\xi_1}{d\upsilon} = \frac{v}{n} \cdot \left\{(N_{00} + e^2 N_{02}) + \left(\frac{1}{e}N_{-10} + N_{11}e + N_{12}\frac{e^2}{v}\right)\cos\upsilon + \left(\frac{1}{e}N_{-11} + eN_{21}\right) \times \right.$$
$$\times \cos(\upsilon + 2\omega) + \left(\frac{1}{e}N_{-11} + eN_{21}\right)\cos(3\upsilon + 2\omega) - 2(N_{-11} + e^2 N_{21})\cos(2\upsilon + 2\omega) -$$
$$\left. - (N_{-11} + e^2 N_{22})\cos(4\upsilon + 2\omega)\right\}, \tag{45}$$

где:

$$N_{00} = -(\xi_{-10} + \xi_{-11}\cos 2\omega),\ N_{02} = -(\xi_{11} + \xi_{21}\cos 2\omega),\ N_{-10} = \xi_{-10},$$
$$N_{11} = \xi_{11},\ N_{12} = \xi_{12},\ N_{-11} = \xi_{-11},\ N_{21} = \xi_{21},\ N_{-11} = \xi_{-12},\ N_{22} = \xi_{21}.$$

$$\frac{d\xi_2}{d\upsilon} = \frac{v_2}{n} \cdot \left\{(m_{00} + em_{01} + e^2 m_{02}) + em_{11}\sin 2\upsilon + em_{21}\sin(2\upsilon + 2\omega) + \right.$$
$$+ em_{31}\sin(4\upsilon + 2\omega) + e^2 m_{42}\sin\upsilon + e^2 m_{42}\sin 3\upsilon + e^2 m_{52}\cos\upsilon + e^2 m_{52}\cos 3\upsilon +$$
$$+ e^2 m_{62}\sin(3\upsilon + 2\omega) + e^2 m_{72}\sin(5\upsilon + 2\omega) + e^2 m_{72}\sin(\upsilon + 2\omega) +$$
$$+ e^2 m_{82}\cos(5\upsilon + 2\omega) + (em_{91} + e^2 m_{92})\cos 2\upsilon + (em_{101} + e^2 m_{102})\cos(2\upsilon + 2\omega) +$$
$$+ (em_{111} + e^2 m_{112})\cos(4\upsilon + 2\omega) + (em_{121} + e^2 m_{122})\cos(\upsilon + 2\omega) +$$
$$\left. + (em_{121} + e^2 m_{122})\cos(3\upsilon + 2\omega)\right\}, \tag{46}$$

где:

$$m_{00} = a_{00},\ m_{01} = a_{01} + a_{20}\sin 2\omega - a_{70} - \frac{1}{2}a_{60},\ m_{02} = -\left(a_{71} + \frac{1}{2}a_{61}\right),$$
$$m_{11} = -a_{10},\ m_{21} = -(a_{20} + a_{30}),\ m_{31} = -a_{30},\ m_{42} = -a_{11},\ m_{52} = -a_{21},$$
$$m_{62} = -(a_{31} + a_{51}),\ m_{72} = -a_{31},\ m_{82} = -a_{41},\ m_{91} = -\frac{1}{2}a_{60},$$
$$m_{92} = -\frac{1}{2}a_{61},\ m_{101} = -\frac{1}{2}a_{70},\ m_{102} = -\frac{1}{2}a_{71},\ m_{111} = -a_{70},$$
$$m_{112} = -a_{71},\ m_{121} = -a_{80},\ m_{122} = -a_{81}.$$

$$\frac{d\lambda}{d\upsilon} = -\frac{v_3}{n}\cdot\Big\{ (M_{00} + M_{01}e + e^2 M_{02}) + (eM_{11} + e^2 M_{12})\cos\upsilon + eM_{21}\cos(\upsilon + 2\omega) +$$
$$+ M_{21}e\cdot\cos(3\upsilon + 2\omega) + e^2 M_{22}\cos(\upsilon + 2\omega) + e^2 M_{22}\cos(3\upsilon + 2\omega) +$$
$$+ e^2 M_{32}\cos 2\upsilon + e^2 M_{42}\cos(2\upsilon + 2\omega) + e^2 M_{52}\cos(4\upsilon + 2\omega)\Big\}, \qquad (47)$$

где:

$$M_{00} = n_{00} - \frac{\mu^2}{L^3}\cdot\frac{1}{v_3},\ M_{01} = n_{01},\ M_{02} = -\left(\frac{1}{2}n_{11} + m_{21}\cos 2\omega\right),$$
$$M_{11} = n_{11} - 2n_{00} + \frac{2\mu^2}{L^3}\cdot\frac{1}{v_3},\ M_{12} = -2n_{01},\ M_{21} = n_{21} - n_{10},$$
$$M_{22} = n_{21} - n_{10},\ M_{32} = -\frac{1}{2}n_{11},\ M_{42} = -2n_{21},\ M_{52} = -n_{21}.$$

$$\frac{d\eta_1}{d\upsilon} = -\frac{v_4}{n}\cdot\Big\{ (L_{00} + eL_{01} + e^2 L_{02}) + (L_{10} + eL_{11} + e^2 L_{12})\cos\upsilon + eL_{21}\cos(2\upsilon + 2\omega) +$$
$$+ eL_{31}\cos(4\upsilon + 2\omega) + \left(\frac{1}{e}L_{-30} + eL_{41}\right)\sin(2\upsilon + \omega) + eL_{51}\sin(4\upsilon + \omega) +$$
$$+ (eL_{61} + e^2 L_{62})\cos 2\upsilon + (L_{70} + e^2 L_{72})\sin(\upsilon + \omega) + (L_{70} + e^2 L_{72})\sin(3\upsilon + \omega) +$$
$$+ (L_{80} + e^2 L_{82})\cos(\upsilon + 2\omega) + (L_{80} + e^2 L^*_{82})\cos(3\upsilon + 2\omega) + e^2 L_{92}\cos 5\upsilon +$$
$$+ e^2 L_{92}\cos 3\upsilon + e^2 L_{102}\cos(5\upsilon + 2\omega)\Big\}, \qquad (48)$$

где:

$$L_{00} = K_{00},\ L_{01} = K_{01} - K_{30}\sin\omega - K_{20}\cos 2\omega - K_{80},\ L_{02} = -K_{81},$$
$$L_{10} = K_{80},\ L_{11} = K_{81} - 2K_{00},\ L_{12} = 2K_{01},\ L_{21} = K_{51} - 2K_{20},$$
$$L_{31} = K_{61} - K_{20},\ L_{61} = K_{40} - K_{80},\ L_{62} = K_{81},\ L_{70} = (K_{30} - K_{-70}),$$
$$L_{72} = K_{71},\ L_{80} = K_{20},\ L_{82} = -K_{51},\ L^*_{82} = K_{82} - K_{61},\ L_{92} = -K_{41};$$

$$\frac{d\eta_2}{d\upsilon} = \frac{3}{n}v_5\cdot\Big\{ (O_{00} + eO_{01} + e^2 O_{02}) + (O_{10} + e^2 O_{12})\sin\upsilon + eO_{11}\sin 2\upsilon +$$
$$+ e^2 O_{22}\sin 3\upsilon + (O_{30} + eO_{31} + e^2 O_{32})\cos\upsilon + (eO_{41} + e^2 O_{42})\cos 2\upsilon +$$
$$+ e^2 O_{52}\cos 3\upsilon + (O_{60} + eO_{61} + e^2 O_{62})\cos(2\upsilon + 2\omega) +$$
$$+ (O_{70} + eO_{71})\cos(3\upsilon + 2\omega) + eO_{81}\cos(\upsilon + 2\omega) + eO_{91}\cos(4\upsilon + 2\omega)\Big\}, \qquad (49)$$

где:

$$O_{00} = F_{00},\ O_{01} = F_{01} - \frac{1}{2}F_{40},\ O_{02} = -\left(\frac{1}{2}F_{41} + F_{71}\right),\ O_{10} = F_{10},$$
$$O_{12} = -F_{61},\ O_{11} = F_{61} - F_{10},\ O_{22} = -F_{61},\ O_{30} = F_{40},\ O_{31} = F_{41} - 2F_{00},$$
$$O_{32} = -(2F_{01} + F_{71}),\ O_{41} = F_{51} - F_{40},\ O_{42} = -\frac{1}{2}F_{41},\ O_{52} = -F_{51},$$
$$O_{60} = F_{20},\ O_{61} = -F_{30},\ O_{62} = -F_{71},\ O_{70} = F_{30},\ O_{71} = -F_{20},$$
$$O_{81} = F_{71} - F_{20},\ O_{91} = -F_{30}.$$

В каждом из уравнений (45)- (49) есть в правых частях постоянные и периодические члены, после интегрирования постоянные члены дадут вековые, а периодические вековые и периодические члены, причем от вековых членов можно избавиться, используя классические методы.

Имея в виду, что $H_1 << H_0 = \dfrac{\mu^2}{2L^2}$, в первом приближении при интегрировании (45)-(49) медленно изменяющиеся элементы i, ω, Ω можно считать постоянными.

В правых частях (45)-(49) есть общий множитель $v = O(10^{-7}) \div O(10^{-11})$, поэтому если даже $e > e_ё \approx 0{,}67$, то порядок величин $O(ve)$, $O(ve^2)$ останется неизменным, поэтому наш метод позволяет использовать вторую систему канонических элементов Пуанкаре и в этом случае. Следовательно, можно считать, что цель исследования достигнута.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Дубошин Г.Н. Небесная механика. Методы теории движения искусственных небесных тел.- М.: Наука, 1983. - 352 с.

[2] Абалакин В.К., Аксенов Е.П., Гребеников А., Демин В.Г., Рябов Ю.А. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике.- М.: Наука, 1976.- 864 с.

[3] Шинибаев М.Д. Метод промежуточных орбит в теории движения ИСЗ. Palmarium academic publishing. Saarbrücken.– Deutschland, 2015.- 132 с.

[4] Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы.-М.: Наука, 1968.- 799 с.

[5] Чеботарев Г.А. Аналитические и численные методы небесной механики.- М.-Л.: Наука, 1965.- 367 с.

REFERENCES

[1] Dubochin G.N. Nebesnaya mehanika. Metodi teorii dvigenia iskusstvennih nebesnih tel.- M.: Nauka, 1983.- 352 s. (in Russ).

[2] Abalakin V.K., Aksenov E.P., Grebenikov E.A., Demin V.G., Raybov J.A. Spravoch-noe rukovodstvo po nebesnoi mehanike I astrodinamike.- M.: Nauka, 1976.- 864 s. (in Russ).

[3] Shinibaev M.D. Metod promegutochnih orbit v teorii dvigeniay ISZ. Palmarium academic publishing. Saarbrücken.– Deutschland, 2015.- 132 s. (in Russ).

[4] Dubochin G.N. Nebesnaya mehanika. Osnovnye zadachi I metody.- M.: Nauka, 1968.- 799 s. (in Russ).

[5] Chebotarev G.A. Analiticheskie I chislennie metodiy nebesnoy mehaniki.- M.-L.: Nauka, 1965.- 367 s. (in Russ).

ПУАНКАРЕНІҢ ЕКІНШІ КАНОНДЫҚ ЭЛЕМЕНТТЕР ЖҮЙЕСІН ХИЛДЫҢ ЕКІНШІ ЕСЕБІНДЕ ҚОЛДАНУ

С. С. Дайырбеков, М. Д. Шыныбаев, А. Нарымбетова, О. Өтегенов, Д. Танабаева

Сыр-Дария университеті, Жетысай, Қазақстан

Тірек сөздер: Пуанкаренің екінші канондық элементтер жүйесі, орталық орбита, орталық тартылыс күш өрісі, Жер серігі, Хилл есебі.

Аннотация. Пуанкаренің екінші канондық элементтері былай сипатталады [1]: «… сонымен ρ_1-дің реттілігі эксцентриситет реттілігімен бірдей, ал ρ_2-нің реттілігі көлбеумен тең, сондықтан бұл элементтер шеңберлік қозғалыстықтағы денелер қозғалысын зерттеуге қолайлы, әсіресе орбита негізгі жазықтықта орналасқанда».

Ал [2]-де былай делінген: «Пуанкаренің канондық элементтері тек эллипс тәрізді қозғалыстарда қолданылуы мүмкін».

Бұл айтылғанды ескерсек, Пуанкаренің екінші канондық элементтерінің қолдану аясы, тек аз мәнді эксцентриситеттік қозғалыстармен шектеледі, демек $e \le e_ё$, $e_л = 0{,}67$.

Мақаладағы әдіс бойынша Пуанкаре элементтерінің қолдану аясы кеңейеді. Ол элементте $e = e_ё$ болғанда да, тіпті $e > e_ё$ болғанда да қасиеттерін сақтайды және қолдануы мүмкін.

Поступила 13.01.2016 г.

Publication Ethics and Publication Malpractice in the journals of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan

For information on Ethics in publishing and Ethical guidelines for journal publication see http://www.elsevier.com/publishingethics and http://www.elsevier.com/journal-authors/ethics.

Submission of an article to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan implies that the described work has not been published previously (except in the form of an abstract or as part of a published lecture or academic thesis or as an electronic preprint, see http://www.elsevier.com/postingpolicy), that it is not under consideration for publication elsewhere, that its publication is approved by all authors and tacitly or explicitly by the responsible authorities where the work was carried out, and that, if accepted, it will not be published elsewhere in the same form, in English or in any other language, including electronically without the written consent of the copyright-holder. In particular, translations into English of papers already published in another language are not accepted.

No other forms of scientific misconduct are allowed, such as plagiarism, falsification, fraudulent data, incorrect interpretation of other works, incorrect citations, etc. The National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan follows the Code of Conduct of the Committee on Publication Ethics (COPE), and follows the COPE Flowcharts for Resolving Cases of Suspected Misconduct (http://publicationethics.org/files/u2/New_Code.pdf). To verify originality, your article may be checked by the Cross Check originality detection service http://www.elsevier.com/editors/plagdetect.

The authors are obliged to participate in peer review process and be ready to provide corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. All authors of a paper should have significantly contributed to the research.

The reviewers should provide objective judgments and should point out relevant published works which are not yet cited. Reviewed articles should be treated confidentially. The reviewers will be chosen in such a way that there is no conflict of interests with respect to the research, the authors and/or the research funders.

The editors have complete responsibility and authority to reject or accept a paper, and they will only accept a paper when reasonably certain. They will preserve anonymity of reviewers and promote publication of corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. The acceptance of a paper automatically implies the copyright transfer to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.

The Editorial Board of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan will monitor and safeguard publishing ethics.

Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайте:

www:nauka-nanrk.kz

http://www.physics-mathematics.kz

Редактор *М. С. Ахметова*
Верстка на компьютере *Д. Н. Калкабековой*

Подписано в печать 27.01.2016.
Формат 60x881/8. Бумага офсетная. Печать – ризограф.
12,75 п.л. Тираж 300. Заказ 1.

Национальная академия наук РК
050010, Алматы, ул. Шевченко, 28, т. 272-13-18, 272-13-19