ISSN 1991-346X

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ

Х А Б А Р Л А Р Ы

ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

N E W S

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА СЕРИЯСЫ

♦

СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

♦

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

1 (305)

ҚАНТАР – АҚПАН 2016 ж.
ЯНВАРЬ – ФЕВРАЛЬ 2016 г.
JANUARY – FEBRUARY 2016

1963 ЖЫЛДЫҢ ҚАҢТАР АЙЫНАН ШЫҒА БАСТАҒАН
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1963 ГОДА
PUBLISHED SINCE JANUARY 1963

ЖЫЛЫНА 6 РЕТ ШЫҒАДЫ
ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД
PUBLISHED 6 TIMES A YEAR

АЛМАТЫ, ҚР ҰҒА
АЛМАТЫ, НАН РК
ALMATY, NAS RK

«Известия НАН РК. Серия физико-математическая». ISSN 1991-346X
Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы)
Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации и архивов Министерства культуры и информации Республики Казахстан **№5543-Ж**, выданное 01.06.2006 г.

Периодичность: 6 раз в год.
Тираж: 300 экземпляров.

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, ком. 219, 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,
www:nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75.

News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physical-mathematical series.
ISSN 1991-346X
Owner: RPA "National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan" (Almaty)
The certificate of registration of a periodic printed publication in the Committee of information and archives of the Ministry of culture and information of the Republic of Kazakhstan N 5543-Ж, issued 01.06.2006

Periodicity: 6 times a year
Circulation: 300 copies

Editorial address: 28, Shevchenko str., of. 219, 220, Almaty, 050010, tel. 272-13-19, 272-13-18,
www:nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

Address of printing house: ST "Aruna", 75, Muratbayev str, Almaty

N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 1, Number 305 (2016), 5 – 13

PROPERTIES OF SPLITTING FORMULAS IN WEAKLY O-MINIMAL STRUCTURES

B. Sh. Kulpeshov

International Information Technology University, Almaty, Kazakhstan.
E-mail: b.kulpeshov@iitu.kz

Keywords: weak o-minimality, $\aleph_0$-categoricity, convexity rank.

Abstract. In the present work we study properties of (p,q)-splitting formulas for non-algebraic $p,q \in S_1(\varnothing)$ in countably categorical weakly o-minimal theories of finite convexity rank.

УДК 510.67

СВОЙСТВА СЕКАТОРОВ В СЛАБО О-МИНИМАЛЬНЫХ СТРУКТУРАХ

Б. Ш. Кулпешов

Международный университет информационных технологий, Алматы, Казахстан

Ключевые слова: слабая о-минимальность, счетная категоричность, ранг выпуклости.

Аннотация. В настоящей работе мы исследуем свойства (*p*,*q*)-секаторов для неалгебраических $p,q \in S_1(\varnothing)$ в счетно категоричных слабо о-минимальных теориях конечного ранга выпуклости.

Пусть L – счетный язык первого порядка. В данной статье мы рассматриваем L-структуры и предполагаем, что L содержит символ бинарного отношения <, который интерпретируется как линейный порядок в этих структурах. Настоящая работа касается понятия *слабой о-минимальности*, первоначально глубоко исследованного Д. Макферсоном, Д. Маркером и Ч. Стейнхорном в [1]. Подмножество A линейно упорядоченной структуры M называется *выпуклым*, если для любых $a,b \in A$ и $c \in M$ всякий раз, когда $a < c < b$ мы имеем $c \in A$. *Слабо о-минимальной структурой* называется линейно упорядоченная структура $M = \langle M, =, <, \ldots \rangle$ такая, что любое определимое (с параметрами) подмножество структуры M является объединением конечного числа выпуклых множеств в M.

Пусть A, B – произвольные подмножества линейно упорядоченной структуры M. Тогда выражение $A < B$ означает, что $a < b$ всякий раз, когда $a \in A$ и $b \in B$. Выражение $A < b$ означает что $A < \{b\}$. Через A^+ (и соответственно A^-) будем обозначать множество элементов b рассматриваемой структуры с условием $A < b$ ($b < A$).

Определение 1. [2] Пусть T – слабо о-минимальная теория, M – достаточно насыщенная модель теории T, и пусть $\varphi(x)$ – произвольная M- определимая формула с одной свободной переменной. *Ранг выпуклости формулы* $\varphi(x)$ ($RC(\varphi(x))$) определяется следующим образом:

1) $RC(\varphi(x)) \geq 1$, если $\varphi(M)$ бесконечно.

2) $RC(\varphi(x)) \geq \alpha+1$, если существуют параметрически определимое отношение эквивалентности $E(x,y)$ и бесконечное число элементов $b_i, i \in \omega$, такие, что:

- Для любых $i, j \in \omega$ всякий раз когда $i \neq j$ мы имеем $M \models \neg E(b_i, b_j)$
- Для каждого $i \in \omega$ $RC(E(x,b_i) \geq \alpha$ и $E(M, b_i)$ – выпуклое подмножество множества $\varphi(M)$

3) $RC(\varphi(x)) \geq \delta$, если $RC(\varphi(x)) \geq \alpha$ для всех $\alpha \leq \delta$ (δ предельный).

Если $RC(\varphi(x)) = \alpha$ для некоторого α, то мы говорим, что $RC(\varphi(x))$ определяется. В противном случае (т.е. если $RC(\varphi(x)) \geq \alpha$ для всех α), мы полагаем $RC(\varphi(x)) = \infty$.

Определение 2. (Байжанов Б.С., [3]) Пусть M – слабо о-минимальная структура, $A, B \subseteq M$, M – $|A|^+$-насыщенна, $p,q \in S_1(A)$ – неалгебраические. Будем говорить, что тип p не является *слабо ортогональным* типу q, если существуют A-определимая формула $H(x,y)$, $\alpha \in p(M)$ и $\beta_1, \beta_2 \in q(M)$ такие что $\beta_1 \in H(M,\alpha)$ и $\beta_2 \notin H(M,\alpha)$.

Лемма 3. [3] Отношение не слабой ортогональности 1-типов является отношением эквивалентности на $S_1(A)$.

Вспомним некоторые понятия, первоначально введенные в [1]. Пусть $Y \subset M^{n+1}$ – $\varnothing$-определимо, пусть $\pi : M^{n+1} \to M^n$ – проекция, которая отбрасывает последнюю координату, и пусть $Z := \pi(Y)$. Для каждого $\bar{a} \in Z$ пусть $Y_{\bar{a}} := \{y : (\bar{a}, y) \in Y\}$. Предположим, что для каждого $\bar{a} \in Z$ множество $Y_{\bar{a}}$ ограничено сверху, но не имеет супремума в M. Пусть $\approx$ – $\varnothing$-определимое отношение эквивалентности на M^n, определяемое следующим образом:

$$\bar{a} \approx \bar{b} \text{ для всех } \bar{a}, \bar{b} \in M^n \setminus Z \text{ и } \bar{a} \approx \bar{b} \Leftrightarrow \sup Y_{\bar{a}} = \sup Y_{\bar{b}}, \text{ если } \bar{a}, \bar{b} \in Z$$

Пусть $\bar{Z} := Z/\approx$, и для каждого кортежа $\bar{a} \in Z$ мы обозначаем через $[\bar{a}]$ $\approx$-класс кортежа $\bar{a}$. Существует естественный $\varnothing$-определимый линейный порядок на $M \cup \bar{Z}$, определяемый следующим образом. Пусть $\bar{a} \in Z$ и $c \in M$. Тогда $[\bar{a}] < c$ тогда и только тогда, когда $w < c$ для всех $w \in Y_{\bar{a}}$. Если $\bar{a} \not\approx \bar{b}$, то существует некоторый $x \in M$ такой, что $[\bar{a}] < c < [\bar{b}]$ или $[\bar{b}] < c < [\bar{a}]$, и поэтому $<$ индуцирует линейный порядок на $M \setminus \bar{Z}$. Мы называем такое множество $\bar{Z}$ *сортом* (в данном случае, $\varnothing$-определимым сортом) в $\bar{M}$, где $\bar{M}$ – Дедекиндово пополнение структуры M, и обозреваем $\bar{Z}$ как естественно вложенную в $\bar{M}$.

Определение 4. [1] Пусть M – линейно упорядоченная структура, $D \subseteq M$ – бесконечно, $K \subseteq \bar{M}$, $f : D \to K$ – функция. Будем говорить, что f является *локально возрастающей* (*локально убывающей, локально константой*) на D, если для любого $x \in D$ существует бесконечный интервал $J \subseteq D$, содержащий x, так что f является строго возрастающей (строго убывающей, константой) на J.

Будем также говорить, что функция f является локально монотонной на множестве $D \subseteq M$, если f является либо локально возрастающей, либо локально убывающей на D.

Предложение 5. [4] Пусть M – слабо о-минимальная структура, $A \subseteq M$, $p \in S_1(A)$ – неалгебраический. Тогда любая функция в A-определимый сорт, область определения которой содержит множество $p(M)$, является локально монотонной или локально константой на $p(M)$.

Пусть f – A-определимая функция на $D \subseteq M$, E – A-определимое отношение эквивалентности на D. Мы говорим что f – *строго возрастающая (убывающая) на* D/E, если для любых $a,b \in D$ с условием $a < b \wedge \neg E(a,b)$ мы имеем $f(a) < f(b)$ ($f(a) > f(b)$).

Определение 6. [5, 6] Пусть M – слабо о-минимальная структура, $B, D \subseteq M$, $A \subseteq \overline{M}$ – B-определимый сорт и $f: D \to A$ – B-определимая функция, являющаяся локально возрастающей (убывающей) на D. Будем говорить, что функция f *имеет глубину* n на множестве D, если существуют отношения эквивалентности $E_1(x,y), \ \ldots, E_n(x,y)$, разбивающие D на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, так что для любого $2 \le i \le n$ каждый E_i-класс разбивается на бесконечное число бесконечных выпуклых E_{i-1}-подклассов и выполняется следующее:

- f является строго возрастающей (убывающей) на каждом E_1-классе
- f является локально убывающей (возрастающей) на D/E_k для любого нечетного $k \le n$
- f является локально возрастающей (убывающей) на D/E_k для любого четного $k \le n$
- f является строго монотонной на D/E_n.

В этом случае функцию f будем называть *локально возрастающей (убывающей) глубины* n.

Теорема 7. [6] Пусть T – слабо о-минимальная теория. Тогда любая функция в определимый сорт имеет конечную глубину.

Мы естественным образом расширяем Определение 1.6, вводя понятие *локально константной функции глубины* n, если в данном определении функция f является константой на каждом E_1-классе. Заметим, что в этом случае функция f может быть как локально возрастающей, так и локально убывающей на D/E_1.

Пример 8. [1] Пусть $M = \langle M, <, P_1^1, P_2^1, f^1 \rangle$ – линейно упорядоченная структура, так что M есть непересекающееся объединение интерпретаций унарных предикатов P_1 и P_2, при этом $P_1(M) < P_2(M)$. Мы отождествляем интерпретацию P_2 с Q, упорядоченной как обычно, а P_1 с $Q \times Q$, упорядоченной лексикографически. Символ f интерпретируется частичной унарной функцией с $Dom(f) = P_1(M)$ и $Range(f) = P_2(M)$ и определяется посредством $f((n,m)) = n$ для всех $(n,m) \in Q \times Q$.

Может быть доказано, что M – счетно категоричная слабо о-минимальная структура. Пусть $p := \{P_1(x)\}$, $q := \{P_2(x)\}$. Очевидно что $p, q \in S_1(\varnothing)$. Возьмем произвольный $a \in p(M)$. Тогда существует единственный $b \in q(M)$ такой, что $f(a) = b$, т.е. $b \in dcl(\{a\})$.

Рассмотрим следующую формулу:

$$E(x,y) := P_1(x) \wedge P_1(y) \wedge \exists z\, [P_2(z) \wedge f(x) = z \wedge f(y) = z]$$

Можно понять, что $E(x,y)$ – $\varnothing$-определимое отношение эквивалентности, разбивающее $p(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов. Утверждаем, что f – локально константа глубины 1 на $P_1(M)$.

Определение 9. [7] Пусть M – слабо о-минимальная структура, $A \subseteq M$, $p \in S_1(A)$ – неалгебраический.

(1) A-определимая формула $F(x,y)$ называется p-*стабильной*, если существуют α, γ_1, $\gamma_2 \in p(M)$ такие, что $F(M,\alpha) \setminus \{\alpha\} \ne \varnothing$ и $\gamma_1 < F(M,\alpha) < \gamma_2$.

(2) p-стабильная формула $F(x,y)$ называется *выпуклой вправо* (*влево*), если существует $\alpha \in p(M)$ такой, что $F(M,\alpha)$ выпукло, α – левая (правая) концевая точка множества $F(M,\alpha)$ и $\alpha \in F(M,\alpha)$.

Определение 10. [8] Будем говорить, что p-стабильная выпуклая вправо (влево) формула $F(x,y)$ является *эквивалентность-генерирующей*, если для любых $\alpha,\beta\in p(M)$ таких, что $M\models F(\beta,\alpha)$, имеет место следующее:

$$M\models\forall x[x\geq\beta\to[F(x,\alpha)\leftrightarrow F(x,\beta)]]\ \ (M\models\forall x[x\leq\beta\to[F(x,\alpha)\leftrightarrow F(x,\beta)]])$$

Пример 11. Пусть $M=\langle Q,=,<,R^2\rangle$, где M – линейно упорядоченная структура, Q – упорядочение рациональных чисел, для любых $a,b\in M$ $M\models R(b,a)\Leftrightarrow a\leq b<a+\sqrt{2}$ и, следовательно, $R(M,a)=\{b\in M\mid a\leq b<a+\sqrt{2}\}$ и $R(a,M)=\{b\in M\mid a-\sqrt{2}<b\leq a\}$.

Можно понять, что $R(x,y)$ – p-стабильная выпуклая вправо и $R(x,y)$ не является эквивалентность-генерирующей.

Лемма 12. [8] Пусть M – слабо о-минимальная структура, $A\subseteq M$, $p\in S_1(A)$ – неалгебраический, M – $|A|^+$-насыщенна. Предположим, что $F(x,y)$ – p-стабильная выпуклая вправо формула, так что $F(x,y)$ – эквивалентность-генерирующая. Тогда

1) $G(x,y):=F(y,x)$ – p-стабильная выпуклая влево формула, являющаяся также эквивалентность-генерирующей.

2) $E(x,y):=F(x,y)\vee F(y,x)$ – отношение эквивалентности, разбивающее $p(M)$ на выпуклые классы.

Теорема 13. [8] Пусть T – счетно категоричная слабо о-минимальная теория, $M\models T$, $A\subseteq M$, $p\in S_1(A)$ – неалгебраический. Тогда любая p-стабильная выпуклая вправо (влево) формула является эквивалентность-генерирующей.

Следствие 14. ([9], [8]) Пусть T – счетно категоричная слабо о-минимальная теория, $M\models T$, $p\in S_1(\varnothing)$ – неалгебраический. Предположим, что $\{F_1(x,y),...,F_m(x,y)\}$ – полный список всех p-стабильных выпуклых вправо формул, так что для любого $\alpha\in p(M)$ $F_1(M,\alpha)\subset...\subset F_m(M,\alpha)$. Тогда $\varnothing$-определимыми отношениями эквивалентности с бесконечными выпуклыми классами на $p(M)$ являются в точности E_i для $1\leq i\leq m$, данные формулой $E_i(x,y):=F_i(x,y)\vee F_i(y,x)$, так что имеет место следующее:

- E_m разбивает $p(M)$ на бесконечное число E_m-классов, каждый E_m-класс выпуклый и открытый, так что индуцированный порядок на классах является плотным порядком без концевых точек

- Для каждого $i\in\{1,...,m-1\}$ E_i разбивает каждый E_{i+1}-класс на бесконечное число E_i-классов, каждый E_i-класс выпуклый и открытый, так что E_i-подклассы каждого E_{i+1}-класса являются плотно упорядоченными без концевых точек.

Вспомним, что полная теория T называется *бинарной*, если любая формула эквивалентна булевой комбинации формул самое большее от двух свободных переменных.

Теорема 15. [10] Пусть T – счетно категоричная слабо о-минимальная теория. Тогда T бинарная $\Leftrightarrow$ T имеет конечный ранг выпуклости.

Определение 16. [10] *Рангом выпуклости* 1*-типа* p ($RC(p)$) называется инфимум множества $\{RC(\varphi(x))\mid\varphi(x)\in p\}$, т.е. $RC(p):=\inf\{RC(\varphi(x))\mid\varphi(x)\in p\}$.

В Примере 8 имеем типы p и q не слабо ортогональны, $dcl(\{a\})\cap q(M)\neq\varnothing$, $dcl(\{b\})\cap p(M)=\varnothing$ для некоторых $a\in p(M)$ и $b\in q(M)$, $RC(p)=2$, $RC(q)=1$.

Далее мы рассматриваем только счетно категоричные слабо о-минимальные теории конечного ранга выпуклости. Будем обозначать через n_p ранг выпуклости типа p, т.е. $RC(p)$, поскольку в силу Теоремы 15 $RC(p) < \omega$ для любого неалгебраического $p \in S_1(\varnothing)$.

Лемма 17. Пусть T – счетно категоричная слабо о-минимальная теория конечного ранга выпуклости, $M \models T$, $p,q \in S_1(\varnothing)$ – неалгебраические, $dcl(\{a\}) \cap q(M) \neq \varnothing$ для некоторого $a \in p(M)$. Тогда следующие условия эквивалентны:

(1) $RC(p) > RC(q)$

(2) Не существует $\varnothing$-определимой биекции $f : p(M) \to q(M)$

(3) $dcl(\{b\}) \cap p(M) = \varnothing$ для любого $b \in q(M)$

(4) Существует $\varnothing$-определимая функция $f : p(M) \to q(M)$, являющаяся локально константой на $p(M)$.

Доказательство Леммы 17 следует из Теоремы 2.2 [11].

Следствие 18. Пусть T – счетно категоричная слабо о-минимальная теория конечного ранга выпуклости, $M \models T$, $p,q \in S_1(\varnothing)$ – неалгебраические, $dcl(\{a\}) \cap q(M) \neq \varnothing$ для некоторого $a \in p(M)$. Тогда

(1) Если $RC(p) = RC(q)$, то существует единственная $\varnothing$-определимая локально монотонная биекция $f : p(M) \to q(M)$, имеющая глубину k для некоторого $0 \le k \le n_p - 1$.

(2) Если $RC(p) > RC(q)$, то существует единственная $\varnothing$-определимая функция $f : p(M) \to q(M)$, являющаяся локально константой глубины k для некоторого $1 \le k \le n_q$.

Доказательство Следствия 18. (1) В силу Леммы 17 существует $\varnothing$-определимая биекция $f : p(M) \to q(M)$, а в силу Предложения 5 f должна быть локально монотонной на $p(M)$. Поскольку $RC(p) = n_p$, f имеет глубину k для некоторого $0 \le k \le n_p - 1$. Поймем, что функция f единственна. Допустим противное: существует $\varnothing$-определимая функция g такая, что $g(a) \neq f(a)$ для некоторого $a \in p(M)$. Пусть для определенности $f(a) = b$ и $g(a) = b_1$ для некоторых $b, b_1 \in q(M)$. Тогда рассмотрим следующую формулу:

$$\varphi(b, y) := \exists x[f(x) = b \wedge g(x) = y].$$

Очевидно, что $M \models \exists! y\varphi(b, y) \wedge \varphi(b, b_1)$, т.е. $b_1 \in dcl(\{b\})$, откуда получаем, что $dcl(\{b\})$ бесконечно, противореча счетной категоричности T.

(2) В силу Леммы 17 существует $\varnothing$-определимая функция $f : p(M) \to q(M)$, являющаяся локально константой на $p(M)$. Тогда f является константой на каждом $E^p_{n_p - n_q}$-классе, f – локально монотонная на $p(M)/E^p_{n_p - n_q}$ и f имеет глубину k для некоторого $1 \le k \le n_q$. Допустим противное: существует $\varnothing$-определимая функция $g : p(M) \to q(M)$, отличная от f. Тогда существует некоторый $a \in p(M)$ такой, что $f(a) \neq g(a)$. Функция g не может биекцией, иначе получим что $RC(p) = RC(q)$. Поэтому g должна быть локально константой на $p(M)$, при этом функция g также является константой на каждом $E^p_{n_p - n_q}$-классе. Тогда, рассматривая формулу $\varphi(b, y)$ из доказательства пункта (1), получим, что $dcl(\{b\})$ бесконечно, противореча счетной категоричности T. □

Далее понадобится понятие (p_1, p_2)-секатора, введенное в [10]. Пусть $A \subseteq M$, $p_1, p_2 \in S_1(A)$ – неалгебраические, типы p_1 и p_2 не слабо ортогональны. Мы говорим что A-определимая формула $\varphi(x, y)$ является (p_1, p_2)-*секатором*, если существует $a \in p_1(M)$ такой, что $\varphi(a, M) \subset p_2(M)$, $\varphi(a, M)$ выпукло и $\varphi(a, M)^- = p_2(M)^-$. Если $\varphi_1(x, y)$,

$\varphi_2(x,y)$ – (p_1,p_2)-секаторы, то мы говорим что $\varphi_1(x,y)$ *меньше чем* $\varphi_2(x,y)$, если существует $a\in p_1(M)$ такой, что $\varphi_1(a,M)\subset\varphi_2(a,M)$.

Очевидно, что если $p_1,p_2\in S_1(A)$ – неалгебраические и типы p_1 и p_2 не слабо ортогональны, тогда существует (p_1,p_2)-секатор и множество всех (p_1,p_2)-секаторов линейно упорядочено. Также очевидно, что для любого (p_1,p_2)-секатора $\varphi(x,y)$ $f(x):=\sup\varphi(x,M)$ не является константой на $p_1(M)$.

Теорема 19. Пусть T – счетно категоричная слабо о-минимальная теория конечного ранга выпуклости, $p,q\in S_1(\varnothing)$ – неалгебраические, типы p и q не слабо ортогональны. Тогда $RC(p)>RC(q)\Leftrightarrow$ для любого (p,q)-секатора $R(x,y)$ существует $\varnothing$-определимое отношение эквивалентности $E(x,y)$, разбивающее $p(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, так что $f(x):=\sup R(x,M)$ является константой на каждом E-классе.

Доказательство Теоремы 19 следует из Теоремы 2.3 [11].

Следствие 20. Пусть T – счетно категоричная слабо о-минимальная теория конечного ранга выпуклости, $p,q\in S_1(\varnothing)$ – неалгебраические, типы p и q не слабо ортогональны. Тогда $RC(p)=RC(q)\Leftrightarrow$ существует (p,q)-секатор $R(x,y)$ такой, что функция $f(x):=\sup R(x,M)$ является локально монотонной на $p(M)$.

Предложение 21. Пусть T – счетно категоричная слабо о-минимальная теория конечного ранга выпуклости, $M\models T$, $p,q\in S_1(\varnothing)$ – неалгебраические, $dcl(\{a\})\cap q(M)\neq\varnothing$ для некоторого $a\in p(M)$. Тогда

(1) Если $RC(p)=RC(q)$, то существует в точности $2n_p$ (p,q)-секаторов.

(2) Если $RC(p)>RC(q)$, то существует в точности $2n_q$ (p,q)-секаторов.

Доказательство Предложения 21. (1) Пусть $RC(p)=RC(q)$. В силу Следствия 18 существует единственная $\varnothing$-определимая локально монотонная биекция $f:p(M)\to q(M)$, имеющая глубину k для некоторого $0\le k\le n_p-1$. Тогда рассмотрим следующие формулы:

$$\varphi_-^0(x,y):=U_p(x)\wedge U_q(y)\wedge y<f(x),\ \ \varphi_+^0(x,y):=U_p(x)\wedge U_q(y)\wedge y\le f(x)$$

$$\varphi_-^i(x,y):=U_p(x)\wedge U_q(y)\wedge\forall t[E_i^p(x,t)\to y<f(t)],\ 1\le i\le n_p-1$$

$$\varphi_+^i(x,y):=U_p(x)\wedge U_q(y)\wedge\exists t[E_i^p(x,t)\wedge y<f(t)],\ 1\le i\le n_p-1$$

Очевидно, что эти формулы являются (p,q)-секаторами, причем

$$\varphi_-^{n_p-1}(a,M)\subset\ldots\subset\varphi_-^1(a,M)\subset\varphi_-^0(a,M)\subset\varphi_+^0(a,M)\subset\varphi_+^1(a,M)\subset\ldots\subset\varphi_+^{n_p-1}(a,M)$$

Утверждаем, что других (p,q)-секаторов нет. Допустим противное: существует (p,q)-секатор $\Phi(x,y)$, отличный от этих $2n_p$ (p,q)-секаторов. Тогда возможны следующие случаи: $\varphi_-^{i+1}(a,M)\subset\Phi(a,M)\subset\varphi_-^i(a,M)$ для некоторого $0\le i\le n_p-2$,

$$\varphi_+^i(a,M)\subset\Phi(a,M)\subset\varphi_+^{i+1}(a,M)\text{ для некоторого }0\le i\le n_p-2,$$

$$\Phi(a,M)\subset\varphi_-^{n_p-1}(a,M)\text{ или }\varphi_+^{n_p-1}(a,M)\subset\Phi(a,M)$$

Не умаляя общности, предположим, что $\varphi_-^{i+1}(a,M)\subset\Phi(a,M)\subset\varphi_-^i(a,M)$ для некоторого $0\le i\le n_p-2$ (остальные случаи рассматриваются аналогично). Поскольку f – локально монотонная глубины k для некоторого $0\le k\le n_p-1$, то f должна быть строго возрастающей или строго убывающей на каждом $E_{i+1}^p(a,M)/E_i^p$ для любого $a\in p(M)$. Для определенности предположим первое. Тогда рассмотрим следующую формулу:

$$G^{\Phi}(z,x) := U_p(z) \wedge z \le a \wedge \forall y[U_q(y) \wedge y < f(z) \to \Phi(a,y)]$$

Нетрудно понять, что $G^{\Phi}(z,x)$ – p-стабильная выпуклая влево формула, причем $G^{\Phi}(z,x)$ меньше чем $G_{i+1}(z,x)$ и больше чем $G_i(z,x)$, где $G_{i+1}(z,x) := E^p_{i+1}(z,x) \wedge z \le x$ и $G_i(z,x) := E^p_i(z,x) \wedge z \le x$ также p-стабильные выпуклые влево формулы. Тогда в силу Теоремы 13 и Леммы 12 мы получаем, что $RC(p) \ge n_p + 1$, противореча нашему допущению. Таким образом, других (p,q)-секаторов нет.

Пусть теперь $RC(p) > RC(q)$. В силу Следствия 18 существует единственная $\varnothing$-определимая функция $f : p(M) \to q(M)$, являющаяся локально константой глубины k на $p(M)$ для некоторого $1 \le k \le n_q$, причем f является константой на каждом $E^p_{n_p - n_q}$-классе и f – локально монотонная на $p(M)/E^p_{n_p-n_q}$. Тогда $\varphi^i_-(a,M) = \varphi^0_-(a,M)$ и $\varphi^0_+(a,M) = \varphi^i_+(a,M)$ для каждого $1 \le i \le n_p - n_q$. □

Предложение 22. Пусть T – счетно категоричная слабо о-минимальная теория конечного ранга выпуклости, $M \models T$, $p,q \in S_1(\varnothing)$ – неалгебраические, типы p и q не слабо ортогональны, $dcl(\{a\}) \cap q(M) \ne \varnothing$ для некоторого $a \in p(M)$. Тогда

(1) Если $RC(p) = RC(q)$, то существует в точности $2n_p - 1$ (p,q)-секаторов.

(2) Если $RC(p) > RC(q)$, то существует в точности $2n_q - 1$ (p,q)-секаторов.

Доказательство Предложения 22. (1) Пусть $RC(p) = RC(q)$. В силу Следствия 20 существует (p,q)-секатор $\varphi(x,y)$ такой, что функция $f(x) := \sup \varphi(x,M)$ является локально монотонной на $p(M)$. Поскольку $RC(p) = n_p$, то f имеет глубину k для некоторого $0 \le k \le n_p - 1$. Рассмотрим следующие формулы:

$$\Phi^i_-(x,y) := U_p(x) \wedge U_q(y) \wedge \forall t[E^p_i(x,t) \to \varphi(t,y)],\ 1 \le i \le n_p - 1$$

$$\Phi^i_+(x,y) := U_p(x) \wedge U_q(y) \wedge \exists t[E^p_i(x,t) \wedge \varphi(y,t)],\ 1 \le i \le n_p - 1$$

Очевидно, что эти формулы являются (p,q)-секаторами, причем

$$\Phi^{n_p-1}_-(a,M) \subset ... \subset \Phi^1_-(a,M) \subset \varphi(a,M) \subset \Phi^1_+(a,M) \subset ... \subset \Phi^{n_p-1}_+(a,M)$$

Аналогично доказательству Предложения 21 можно показать, что других (p,q)-секаторов нет, если в формуле $G^{\Phi}(z,x)$ вместо конъюнктивного члена $y < f(z)$ рассматривать $\varphi(z,y)$.

(2) Пусть $RC(p) > RC(q)$. Поскольку типы p и q не слабо ортогональны, то в силу Теоремы 19 для любого (p,q)-секатора $R(x,y)$ существует $\varnothing$-определимое отношение эквивалентности $E(x,y)$, разбивающее $p(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, так что $f(x) := \sup R(x,M)$ является константой на каждом E-классе. Тогда выберем наибольшее отношение эквивалентности $E^p_i(x,y)$ на $p(M)$ такое, что для любого (p,q)-секатора $R(x,y)$ $f(x) := \sup R(x,M)$ является константой на каждом E^p_i-классе. Так как $E^p_i(x,y)$ наибольшее с таким свойством, то существует (p,q)-секатор $\varphi(x,y)$ такой, что $f(x) := \sup \varphi(x,M)$ – константа на каждом E^p_i-классе и f – локально монотонная на $p(M)/E^p_i$. Очевидно что $i = n_p - n_q$. Тогда $\Phi^j_-(a,M) = \varphi(a,M) = \Phi^j_+(a,M)$ для каждого $1 \le j \le n_p - n_q$. Аналогично можно показать, что других (p,q)-секаторов нет. □

Теорема 23. Пусть T – счетно категоричная слабо о-минимальная теория конечного ранга выпуклости, $M \models T$, $|M| = \aleph_0$. Тогда

(i) существует конечное множество $C = \{c_0,...,c_n\} \subseteq M$ ($M \cup \{-\infty,+\infty\}$, если M не имеет первого или последнего элементов), состоящее из всех $\varnothing$-определимых элементов в M (с возможными исключениями для $-\infty$, $+\infty$), такое что $M \models c_i < c_j$ для всех $i < j \le n$ и для каждого $j \in \{1,...,n\}$ либо $M \models \neg(\exists x)c_{j-1} < x < c_j$, либо $I_j = \{x \in M : M \models c_{j-1} < x < c_j\}$ является плотным линейным порядком без концевых точек и существуют $k_j \in \omega$ и $p_1^j,...,p_{k_j}^j \in S_1(\varnothing)$ так что $I_j = \bigcup_{s=1}^{k_j} p_s^j(M)$;

(ii) для каждого неалгебраического $p \in S_1(\varnothing)$ существует натуральное число $n_p \ge 1$ такой, что $RC(p) = n_p$, т.е. существуют $\varnothing$-определимые отношения эквивалентности $E_1^p(x,y), E_2^p(x,y),..., E_{n_p-1}^p(x,y)$ такие, что

- $E_{n_p-1}^p$ разбивает $p(M)$ на бесконечное число $E_{n_p-1}^p$-классов, каждый $E_{n_p-1}^p$-класс выпуклый и открытый, так что индуцированный порядок на классах является плотным линейным порядком без концевых точек

- для каждого $i \in \{1,...,n_p-2\}$ E_i^p разбивает каждый E_{i+1}^p-класс на бесконечное число E_i^p-классов, каждый E_i^p-класс выпуклый и открытый, так что E_i^p-подклассы каждого E_{i+1}^p-класса плотно упорядочены без концевых точек

(iii) для любых неалгебраических $p,q \in S_1(\varnothing)$ таких, что типы p и q не слабо ортогональны:

(1) если $dcl(\{a\}) \cap q(M) \ne \varnothing$ для некоторого $a \in p(M)$, то существует единственная $\varnothing$-определимая функция , $f : p(M) \to q(M)$, так что

в случае $RC(p) = RC(q)$ f – локально монотонная биекция глубины k на $p(M)$ для некоторого $0 \le k \le n_p - 1$,

в случае $RC(p) > RC(q)$ f – локально константа глубины k на $p(M)$ для некоторого $1 \le k \le n_q$, т.е. f – константа на каждом $E_{n_p-n_q}^p$-классе и локально монотонная на $p(M)/E_{n_p-n_q}^p$;

(2) если $dcl(\{a\}) \cap q(M) = \varnothing$ для всех $a \in p(M)$, то

в случае $RC(p) = RC(q)$ существуют в точности $2n_p - 1$ (p,q)-секаторов $S_1(x,y),\dots, S_{2n_p-1}(x,y)$ таких, что $S_1(a,M) \subset ... \subset S_{2n_p-1}(a,M)$ для всех $a \in p(M)$, $f(x) := \sup S_{n_p}(x,M)$ – локально монотонная глубины k на $p(M)$ для некоторого $0 \le k \le n_p - 1$, и

$$S_i(x,y) \equiv \forall t[E_{n_p-i}^p(x,t) \to S_{n_p}(t,y)],\ 1 \le i \le n_p - 1$$

$$S_j(x,y) \equiv \exists t[E_{j-n_p}^p(x,t) \land S_{n_p}(t,y)],\ n_p + 1 \le j \le 2n_p - 1$$

в случае $RC(p) > RC(q)$ существуют в точности $2n_q - 1$ (p,q)-секаторов $S_1(x,y),\dots, S_{2n_q-1}(x,y)$ таких, что $S_1(a,M) \subset ... \subset S_{2n_q-1}(a,M)$ для всех $a \in p(M)$, $f(x) := \sup S_{n_q}(x,M)$ – константа на каждом $E_{n_p-n_q}^p$-классе и локально монотонная на $p(M)/E_{n_p-n_q}^p$, и

$$S_i(x,y) \equiv \forall t[E_{n_p-i}^p(x,t) \to S_{n_q}(t,y)],\ 1 \le i \le n_q - 1$$

$$S_j(x,y) \equiv \exists t[E_{n_p-2n_q+j}^p(x,t) \land S_{n_q}(t,y)],\ n_q + 1 \le j \le 2n_q - 1$$

В заключение отметим, что данные исследования поддержаны грантом КН МОН РК № 0830/ГФ4.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Macpherson H.D., Marker D., Steinhorn C. Weakly o-minimal structures and real closed fields // Transactions of The American Mathematical Society, 352 (2000), pp. 5435-5483.

[2] Kulpeshov B.Sh. Weakly o-minimal structures and some of their properties // The Journal of Symbolic Logic, 63 (1998), pp. 1511-1528.

[3] Baizhanov B.S. Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by a family of unary predicates // The Journal of Symbolic Logic, 66 (2001), pp. 1382-1414.

[4] Kulpeshov B.Sh. Countably categorical quite o-minimal theories // Journal of Mathematical Sciences, volume 188, issue 4 (2013), pp. 387-397.

[5] Вербовский В.В. О глубине функций слабо о-минимальных структур и пример слабо о-минимальной структуры без слабо о-минимальной теории // Proceedings of Informatics and Control Problems Institute. 1996. C. 207-216.

[6] Verbovskiy V.V. On formula depth of weakly o-minimal structures // Algebra and Model Theory, (A.G. Pinus and K.N. Ponomaryov, editors), Novosibirsk, 1997, pp. 209-223.

[7] Baizhanov B.S. One-types in weakly o-minimal theories // Proceedings of Informatics and Control Problems Institute, Almaty, 1996, pp. 75-88.

[8] Baizhanov B.S., Kulpeshov B.Sh. On behaviour of 2-formulas in weakly o-minimal theories // Mathematical Logic in Asia, Proceedings of the 9th Asian Logic Conference / Eds.: S. Goncharov, R. Downey, H. Ono, Singapore, World Scientific: 2006, pp. 31-40.

[9] Herwig B., Macpherson H.D., Martin G., Nurtazin A., Truss J.K. On $\aleph_0$-categorical weakly o-minimal structures // Annals of Pure and Applied Logic, 101 (2000), pp. 65-93.

[10] Kulpeshov B.Sh. Criterion for binarity of $\aleph_0$-categorical weakly o-minimal theories // Annals of Pure and Applied Logic, 45 (2007), pp. 354-367.

[11] Кулпешов Б.Ш. Бинарный ранг выпуклости в слабо о-минимальных структурах // Известия НАН РК. Серия физ.-мат., 1 (299), 2015. С. 5-13.

REFERENCES

[1] Macpherson H.D., Marker D., Steinhorn C. Weakly o-minimal structures and real closed fields // Transactions of The American Mathematical Society, 352 (2000), pp. 5435-5483.

[2] Kulpeshov B.Sh. Weakly o-minimal structures and some of their properties // The Journal of Symbolic Logic, 63 (1998), pp. 1511-1528.

[3] Baizhanov B.S. Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by a family of unary predicates // The Journal of Symbolic Logic, 66 (2001), pp. 1382-1414.

[4] Kulpeshov B.Sh. Countably categorical quite o-minimal theories // Journal of Mathematical Sciences, volume 188, issue 4 (2013), pp. 387-397.

[5] Verbovskii V.V. Depth functions weakly o-minimal structures and the example of a weakly o-minimal structure without weakly o-minimal theory // Proceedings of Informatics and Control Problems Institute, 1996, pp 207-216. (in Russ.).

[6] Verbovskiy V.V. On formula depth of weakly o-minimal structures // Algebra and Model Theory, (A.G. Pinus and K.N. Ponomaryov, editors), Novosibirsk, 1997, pp. 209-223.

[7] Baizhanov B.S. One-types in weakly o-minimal theories // Proceedings of Informatics and Control Problems Institute, Almaty, 1996, pp. 75-88.

[8] Baizhanov B.S., Kulpeshov B.Sh. On behaviour of 2-formulas in weakly o-minimal theories // Mathematical Logic in Asia, Proceedings of the 9th Asian Logic Conference / Eds.: S. Goncharov, R. Downey, H. Ono, Singapore, World Scientific: 2006, pp. 31-40.

[9] Herwig B., Macpherson H.D., Martin G., Nurtazin A., Truss J.K. On $\aleph_0$-categorical weakly o-minimal structures // Annals of Pure and Applied Logic, 101 (2000), pp. 65-93.

[10] Kulpeshov B.Sh. Criterion for binarity of $\aleph_0$-categorical weakly o-minimal theories // Annals of Pure and Applied Logic, 45 (2007), pp. 354-367.

[11] Kulpeshov B.Sh. Binary convexity rank in weakly o-minimal structures // Proceedings of the National Academy of Sciences of Kazakhstan, a series of physical-mathematical, 1 (299), 2015, p. 5-13. (in Russ.).

БОСАҢ О-МИНИМАЛДЫ ҚҰРЫЛЫМДАРДА СЕКАТОРЛАР ҚАСИЕТТЕРІ

Б.Ш. Кулпешов

Халықаралық ақпараттық технологиялар университеті, Алматы, Қазақстан

Тірек сөздер: босаң о-минималдық, есептік категориялық, дөңестік рангісі.

Аннотация. Осы жұмыста дөнестік рангісі шекті есептік-категориялық босаң о-минималды құрылымдарда алгебралық емес $p,q \in S_1(\varnothing)$ (p,q)-секаторлардың қасиеттерін зерттейміз.

Поступила 13.01.2016 г.

Publication Ethics and Publication Malpractice in the journals of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan

For information on Ethics in publishing and Ethical guidelines for journal publication see http://www.elsevier.com/publishingethics and http://www.elsevier.com/journal-authors/ethics.

Submission of an article to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan implies that the described work has not been published previously (except in the form of an abstract or as part of a published lecture or academic thesis or as an electronic preprint, see http://www.elsevier.com/postingpolicy), that it is not under consideration for publication elsewhere, that its publication is approved by all authors and tacitly or explicitly by the responsible authorities where the work was carried out, and that, if accepted, it will not be published elsewhere in the same form, in English or in any other language, including electronically without the written consent of the copyright-holder. In particular, translations into English of papers already published in another language are not accepted.

No other forms of scientific misconduct are allowed, such as plagiarism, falsification, fraudulent data, incorrect interpretation of other works, incorrect citations, etc. The National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan follows the Code of Conduct of the Committee on Publication Ethics (COPE), and follows the COPE Flowcharts for Resolving Cases of Suspected Misconduct (http://publicationethics.org/files/u2/New_Code.pdf). To verify originality, your article may be checked by the Cross Check originality detection service http://www.elsevier.com/editors/plagdetect.

The authors are obliged to participate in peer review process and be ready to provide corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. All authors of a paper should have significantly contributed to the research.

The reviewers should provide objective judgments and should point out relevant published works which are not yet cited. Reviewed articles should be treated confidentially. The reviewers will be chosen in such a way that there is no conflict of interests with respect to the research, the authors and/or the research funders.

The editors have complete responsibility and authority to reject or accept a paper, and they will only accept a paper when reasonably certain. They will preserve anonymity of reviewers and promote publication of corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. The acceptance of a paper automatically implies the copyright transfer to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.

The Editorial Board of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan will monitor and safeguard publishing ethics.

Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайте:

www:nauka-nanrk.kz

http://www.physics-mathematics.kz

Редактор *М. С. Ахметова*
Верстка на компьютере *Д. Н. Калкабековой*

Подписано в печать 16.01.2016.
Формат 60х881/8. Бумага офсетная. Печать – ризограф.
10,7 п.л. Тираж 300. Заказ 1.

Национальная академия наук РК
050010, Алматы, ул. Шевченко, 28, т. 272-13-18, 272-13-19