ISSN 1991-346X

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ

Х А Б А Р Л А Р Ы

ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

N E W S

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА СЕРИЯСЫ

♦

СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

♦

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

1 (305)

ҚАНТАР – АҚПАН 2016 ж.
ЯНВАРЬ – ФЕВРАЛЬ 2016 г.
JANUARY – FEBRUARY 2016

1963 ЖЫЛДЫҢ ҚАҢТАР АЙЫНАН ШЫҒА БАСТАҒАН
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1963 ГОДА
PUBLISHED SINCE JANUARY 1963

ЖЫЛЫНА 6 РЕТ ШЫҒАДЫ
ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД
PUBLISHED 6 TIMES A YEAR

АЛМАТЫ, ҚР ҰҒА
АЛМАТЫ, НАН РК
ALMATY, NAS RK

«Известия НАН РК. Серия физико-математическая». ISSN 1991-346X
Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы)
Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации и архивов Министерства культуры и информации Республики Казахстан **№5543-Ж**, выданное 01.06.2006 г.

Периодичность: 6 раз в год.
Тираж: 300 экземпляров.

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, ком. 219, 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,
www:nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75.

News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physical-mathematical series.
ISSN 1991-346X
Owner: RPA "National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan" (Almaty)
The certificate of registration of a periodic printed publication in the Committee of information and archives of the Ministry of culture and information of the Republic of Kazakhstan N 5543-Ж, issued 01.06.2006

Periodicity: 6 times a year
Circulation: 300 copies

Editorial address: 28, Shevchenko str., of. 219, 220, Almaty, 050010, tel. 272-13-19, 272-13-18,
www:nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

Address of printing house: ST "Aruna", 75, Muratbayev str, Almaty

N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 1, Number 305 (2016), 75 – 81

ON THE SPECTRUM OF NON-LOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR AN EQUATION OF MIXED PARABOLIC-HYPERBOLIC TYPE

G. Dildabek[1, 2], A. Tengayeva[1, 3]

[1]Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan,
[2]Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan,
[3]Kazakh National Agrarian University, Almaty, Kazakhstan.
E-mail: [2]dildabek.g@gmail.com, [3]aijan0973@mail.ru

Keywords: non-local boundary conditions, spectrum, equation of mixed type, matrix trace, spectral trace.

Abstract. In the paper a spectral problem for an operator of parabolic-hyperbolic type of I kind with non-classical boundary conditions is considered. The problem is considered in a standard domain. The parabolic part of the space is a rectangle. And the hyperbolic part of the space coincides with a characteristic triangle. We consider a problem with the local boundary condition in the domain of parabolicity and with the boundary condition with displacement in the domain of hyperbolicity. We prove the strong solvability of considered problem. In contrast to the theory of solvability the spectral questions of problems for the equation of the mixed type are less studied. We introduce the notion of a differential operator corresponding to the considered problem. Under eigenvalues of the problem we mean eigenvalues of this operator. The main aim of the paper is the research of spectral properties of the problem. The existence of eigenvalues of the problem is proved. The representation of an inverse operator is substantiated during the proof. Having the form of the kernel of this integral operator, we prove that a matrix trace of the operator is not zero. The proof is completed by applying the formula on coincidence of matrix and spectral traces of nuclear operators.

УДК 517.956.6

О СПЕКТРЕ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Г. Дилдабек[1, 2], А. А. Тенгаева[1, 3]

[1]Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан,
[2]Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан,
[3]Казахский национальный аграрный университет, Алматы, Казахстан

Ключевые слова: нелокальные краевые условия, спектр, уравнение смешанного типа, матричный след, спектральный след.

Аннотация. В работе рассматривается спектральная задача для оператора параболо-гиперболического типа I рода с неклассическими краевыми условиями. Задача рассматривается в стандартной области. Параболическая часть области есть прямоугольник. А гиперболическая часть области совпадает с характеристическим треугольником. Рассматриваем задачу с локальным краевым условием в области параболичности и с краевым условием со смещением в области гиперболичности. Доказывается сильная разрешимость рассматриваемой задачи. В отличие от теории разрешимости, спектральные вопросы задач для уравнений смешанного типа являются мало изученными. Вводится понятие дифференциального оператора, соответствующего рассматриваемой задаче. Под собственными значениями задачи понимаются собственные значения этого оператора. Основной целью работы является исследование спектральных свойств задачи. Доказано существование собственных значений задачи. В ходе доказательства обосновывается интегральное представление обратного оператора. Имея вид ядра этого интегрального оператора, доказывается, что матричный след оператора отличен от нуля. Доказательство завершается применением формулы о совпадении матричного и спектрального следов у ядерных операторов.

1. Введение. Теория уравнений смешанного типа является одним из центральных разделов современной теории дифференциальных уравнений с частными производными. Это связано с выявлением множества прикладных задач, математическое моделирование которых обуславливает изучение различных типов уравнений в рассматриваемой области изменения независимых переменных.

Проблемам теории краевых задач для уравнений смешанного типа посвящены многочисленные работы авторов из ближнего и дальнего зарубежья. Достаточно полный обзор полученных результатов содержится в книгах А.В. Бицадзе, Л. Берса, М.М. Смирнова, М.С. Салахитдинова, Т.Д. Джураева, Т.Ш. Кальменова. Существенный вклад в развитие теории краевых задач для параболо-гиперболических уравнений внесли исследования М.С. Салахитдинова, Т.Д. Джураева, А.М. Нахушева, А.С. Бердышева, М.А. Садыбекова.

В отличие от теории разрешимости, спектральные вопросы задач для уравнений смешанного типа являются мало изученными. Здесь необходимо отметить исследования, которые внесли существенный вклад в этом направлении. Это работы Т.Ш.Кальменова [1, 2], Е.И. Моисеева [3], С.М. Пономарева [4]. Основная библиография по этим вопросам приведена в монографии Е.И. Моисеева [5]. В этих работах исследуются существование и расположение собственных значений у задач для уравнений смешанного эллиптико-гиперболического типа, построение и полнота системы собственных функций задачи.

Спектральные вопросы для уравнения параболо-гиперболического типа изучены сравнительно меньше. Основная библиография по этим вопросам приведена в недавно вышедшей монографии А.С. Бердышева [6].

2. Постановка задачи. Пусть $\Omega \in R^2$ - конечная область, ограниченная при $y > 0$ отрезками AA_0, A_0B_0, B_0B, A=(0,1), B_0=(1,1), B=(1,0), а при $y < 0$ - характеристикамиAC: $x + y = 0$ и BC: $x - y = 1$уравнения смешанного параболо-гиперболического типа

$$Lu = \begin{Bmatrix} u_x - u_{yy}, y > 0 \\ \\ u_{xx} - u_{yy}, y < 0 \end{Bmatrix} = f(x, y) \tag{1}$$

Через $W_2^l(\Omega) = H^l(\Omega)$ обозначим пространство Соболева со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_l$ и нормой $\|\cdot\|_l$,$W_2^0(\Omega) = L_2(\Omega)$; $\Omega_1 = \Omega \cap \{y > 0\}$, $\Omega_2 = \Omega \cap \{y < 0\}$.

В Ω рассмотрим следующую нелокальную краевую задачу, являющуюся обобщением аналога задачи Трикоми для параболо - гиперболического уравнения (1).

З а д а ч а S_1. Найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u|_{AA_0 \cup A_0B_0} = 0, \tag{2}$$

$$\alpha u\big(\theta_0(t)\big) = (1 - \alpha)u\big(\theta_1(t)\big), 0 \le t \le 1, \tag{3}$$

где

$$\theta_0(t) = \left(\frac{t}{2}, -\frac{t}{2}\right), \theta_1(t) = \left(\frac{t+1}{2}, \frac{t-1}{2}\right).$$

Отметим, что при $\alpha = 1$ задачаS_1 совпадает с задачей Трикоми, а при $\alpha = 0$ – с задачей Трикоми с данными на противоположной характеристике.

Сильная разрешимость частных случаев задачи при $\alpha = 1$ и при $\alpha = 0$ исследована в работе М.А. Садыбекова, Г.Д. Тойжановой [7]. Показано, что при $\alpha = 1$ задача является вольтерровой, а при $\alpha = 0$ – у задачи существует собственное значение.Случай же произвольного α оставался до сих пор не исследованнным. Исследованию задачи именно в этом случае и посвящена настоящая работа.

3. О сильной разрешимости задачи. Определение. Функцию $u \in L_2(\Omega)$ называют *сильным решением* задачи, если существует последовательность функций $\{u_n\}, u_n \in W = C^1(\overline{\Omega}) \cap C_{x,y}^{1,2}(\overline{\Omega}_1) \cap C^2(\overline{\Omega}_2)$, удовлетворяющих краевым условиям задачи, такая, что последовательности u_n и Lu_n сходятся в пространстве $L_2(\Omega)$, соответственно, к функциям u и f.

Теорема 1. *Для любой функции* $f \in L_2(\Omega)$ *существует единственное сильное решение* $u(x,y)$ *задачи* S_1. *Это решение принадлежит классу* $H^1(\Omega) \cap H^{1,2}_{x,y}(\Omega_1) \cap C(\bar{\Omega})$, *удовлетворяет неравенству*

$$\|u\|_1 \leq c\,\|f\|_0, \tag{4}$$

и представляется в виде

$$u(x,y) = \iint_\Omega K(x,y;x_1,y_1)\,f(x_1,y_1)dx_1dy_1, \tag{5}$$

где $K \in L_2(\Omega \times \Omega)$.

Доказательство. В силу однозначной разрешимости первой краевой задачи для уравнения теплопроводности и задачи Коши для волнового уравнения, решение уравнения (1) представляется в виде

$$u(x,y) = \begin{cases} \int_0^x dx_1 \int_0^1 G(x-x_1,y,y_1)f(x_1,y_1)dy_1 + \\ + \int_0^x G_{y_1}(x-x_1,y,0)\tau(x_1)dx_1\,, y>0, \\ \\ -\int_\xi^\eta d\xi_1 \int_{\xi_1}^\eta f_1(\xi_1,\eta_1)d\eta_1 + \frac{1}{2}[\tau(\xi)+\tau(\eta)] - \frac{1}{2}\int_\xi^\eta \nu(s)ds\,, y<0, \end{cases} \tag{6}$$

где

$$\tau(x) = u(x,0), \tau(0) = 0, \xi = x+y, \eta = x-y, \nu(x) = \frac{\partial u}{\partial y}(x,0), f_1(\xi,\eta) = \frac{1}{4}f\left(\frac{\xi+\eta}{2},\frac{\xi-\eta}{2}\right),$$

а$G(x-x_1,y,y_1)$ - функция Грина первой начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности в квадрате AA_0B_0B , представимая в виде [8]:

$$G(x,y,y_1) = \frac{1}{2\sqrt{\pi x}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[exp\left\{-\frac{(y-y_1+2n)^2}{4x}\right\} - exp\left\{-\frac{(y+y_1+2n)^2}{4x}\right\}^2\right] \tag{7}$$

Вычислив в (6) производную $\frac{\partial u}{\partial y}$ и устремляя y к нулю, внутри области Ω_1 получим соотношение между $\tau(x)$и $\nu(x)$, перенесенное из параболической части:

$$\nu(x) = \int_0^x k(x-t)\tau'(t)dt + \Phi_0(x), \tag{8}$$

где

$$k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{n^2}{x}}\,, \tag{9}$$

$$\Phi_0(x) = \int_0^x dx_1 \int_0^1 G_0(x-x_1,y_1)f(x_1,y_1)dy_1, \tag{10}$$

$$G_0(x,y_1) \equiv G_y(x,y_1,0) == \frac{1}{2\sqrt{\pi}x^{3/2}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(y_1+2n)e^{-\frac{(y_1+2n)^2}{4x}}. \tag{11}$$

Аналогично находим интегро-дифференциальное соотношение между $\tau(x)$и $\nu(x)$, перенесенное на отрезок AB из гиперболической части Ω_2. Оно имеет вид:

$$\nu(x) = (2\alpha-1)\tau'(x) - 2\alpha\int_0^x f_1(\xi_1,x)d\xi_1 - 2(1-\alpha)\int_x^1 f_1(x,\eta_1)d\eta_1\,, 0<x<1. \tag{12}$$

Случай $2\alpha = 1$ является самым простым. В этом случае из (12) сразу находится значение $\nu(x)$ для всех $0<x<1$. Тогда решение задачи S_1 строится в явном виде и в параболической и в гиперболической частях области. Это стандартная процедура и мы на ней подробно останавливаться не будем.

Пусть $2\alpha \neq 1$. Тогда, исключая из соотношений (8) и (12) функцию $\nu(x)$, получим для $\tau'(x)$ интегральное уравнение Вольтерра второго рода:

$$(2\alpha-1)\tau'(x) - \int_0^x k(x-t)\tau'(t)dt = \varphi(x), 0<x<1, \tag{13}$$

где

$$\varphi(x) = 2\alpha\int_0^x f_1(\xi_1,x)d\xi_1 + 2(1-\alpha)\int_x^1 f_1(x,\eta_1)d\eta_1 - \int_0^x dx_1 \int_0^1 G_0(x-x_1,y_1)f(x_1,y_1)dy_1.$$

Разделив уравнение (13) на $(2\alpha - 1)$, будем иметь

$$\tau'(x) - \int_0^x K(x-t)\tau'(t)dt = \Phi(x), 0 < x < 1, \tag{14}$$

где $K(x-t) = k(x-t)/(2\alpha - 1)$,$\Phi(x) = \varphi(x)/(2\alpha - 1)$.

Таким образом, задача S_1 эквивалентно редуцирована к интегральному уравнению Вольтерра второго рода (14). Так как $2\alpha \neq 1$, а ядро $k(x-t)$ представимо в виде

$$k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} + \tilde{k}(x),$$

где $\tilde{k}(x) \in C^{\infty}[0; 1]$, то $k(x)$ – ядро со слабой особенностью. Поэтому существует единственное сильное решение уравнения (14) и оно имеет вид

$$\tau'(x) = \Phi(x) + \int_0^x \Gamma(x-t)\Phi(t)dt, \tag{15}$$

где $\Gamma(x)$ – резольвента уравнения (14):

$$\Gamma(x) = \sum_{j=1}^{\infty} K_j(\ 〈\ ), K_1(x) = K(x), K_{j+1}(x) = \int_0^x K_1(x-t)K_j(t)dt, j \in N.$$

Из (15), с учетом$\tau(x) = 0$, после несложных преобразований получим

$$\tau(x) = \int_0^x \Gamma_1(x-t)\Phi(t)dt, \tag{16}$$

где

$$\Gamma_1(x) = 1 + \int_0^x \Gamma(t)dt. \tag{17}$$

Подставляя в (16) значение $\Phi(t)$, после очевидных преобразований приходим к виду

$$\tau(x) = \frac{2(\alpha-1)}{(2\alpha-1)} \int_0^x d\xi_1 \int_{\xi_1}^1 \Gamma_1(x-\xi_1) f_1(\xi_1, \eta_1) d\eta_1 +$$

$$+ \frac{2\alpha}{(2\alpha-1)} \int_0^x d\xi_1 \int_{\xi_1}^x \Gamma_1(x-\eta_1) f_1(\xi_1, \eta_1) d\eta_1 -$$

$$- \frac{1}{(2\alpha-1)} \int_0^x dx_1 \int_0^1 G_1(x-x_1, y_1) f(x_1, y_1) dy_1, \tag{18}$$

где $G_1(x, y) = \int_0^x G_0(t, y)\Gamma_1(x-t)dt$.

Подставляя (18) в (8) и в (6), получим формулу (5), где подробный вид ядра $K(x, y; x_1, y_1)$ может быть выписан в явном виде. Из-за его громоздкости мы здесь этот вид приводить не будем.

Покажем только, что $K(x, y; x_1, y_1) \in L_2(\Omega \times \Omega)$. Для этого из анализа представления ядра легко видеть, что в формуле все слагаемые ограничены, за исключением первого: $G_2(x - x_1, y, y_1)$, в котором не ограничено слагаемое $G(x - x_1, \text{組}, y_1)$. Поэтому достаточно показать, что

$$\theta(y)\theta(y_1)\theta(x-x_1)G(x-x_1, y, y_1) \in L_2(\Omega \times \Omega).$$

Из представления (7) функции Грина $G(x - x_1, y, y_1)$ следует, что для этого достаточно оценить слагаемое при $n = 0$:

$$B(x-x_1, y, y_1) = \theta(y)\theta(y_1)\theta(x-x_1) \frac{1}{2\sqrt{\pi(x-x_1)}} \left[exp\left\{-\frac{(y-y_1)^2}{4(x-x_1)}\right\} - exp\left\{-\frac{(y+y_1)^2}{4(x-x_1)}\right\}\right].$$

Заметим, что $0 \leq B(x - x_1, y, y_1) \leq \frac{1}{2\sqrt{\pi(x-x_1)}} e^{-\frac{(y-y_1)^2}{4(x-x_1)}}$. Пользуясь этим, вычислим

$$\|\mathrm{B}\|^2_{L_2(\Omega\times\Omega)} = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^x dx_1 \int\limits_0^1 |B(x-x_1,y,y_1)|^2 dy_1 =$$

$$= \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 dy_1 \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x |B(x_1,y,y_1)|^2 dx_1 \leq$$

$$\leq \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 dy_1 \int\limits_0^1 |B(x,y,y_1)|^2 dx \leq \frac{1}{4\pi} \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 dy_1 \int\limits_0^1 \frac{1}{x} e^{-\frac{(y-y_1)^2}{4x}} dx =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 \frac{dx}{x} \int\limits_0^1 e^{-\frac{(y-y_1)^2}{4x}} dy_1.$$

Заменяя $\frac{y-y_1}{2\sqrt{x}} = y_2$, далее имеем

$$\frac{1}{4\pi} \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 \frac{\text{灞}x}{x} \int\limits_{\frac{y-1}{2\sqrt{x}}}^{\frac{y}{2\sqrt{x}}} e^{-y_2^2} 2\sqrt{x}\, dy_2 \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-y_2^2}\, dy_2 = c \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} < \infty.$$

Следовательно, $K(x,y;x_1,y_1) \in L_2(\Omega\times\Omega)$.

Непосредственным вычислением нетрудно убедиться в справедливости оценки:

$$\|\Phi(x)\|_{L_2(0,1)} \leq c\, \|f\|_0.$$

Поэтому из (15) имеем

$$\|\tau'(x)\|_{L_2(0,1)} \leq c\|\Phi(x)\|_{L_2(0,1)} \leq c\, \|f\|_0.$$

Отсюда и из свойств решения первой начально - краевой задачи для уравнения теплопроводности следует, что решение задачи T_1 принадлежит классу $W = H^1(\Omega) \cap H^{1,2}_{x,y}(\Omega_1) \cap C(\overline{\Omega})$ и удовлетворяет неравенству (4).

Покажем, что найденное решение будет сильным. Так как $C^1_0(\overline{\Omega})$ плотно в $L_2(\Omega)$, то для любой функции $f \in L_2(\Omega)$ существует последовательность функций $f_n \in C^1_0(\overline{\Omega})$ таких, что $\|f_n - f\| \to 0, n \to \infty$. Обозначим $u_n = L^{-1} f_n$.

При $f_n \in C^1_0(\overline{\Omega})$ нетрудно видеть, что $\Phi_n(x) \in C^1[0,1]$. Поэтому уравнение (14) можно рассматривать как интегральное уравнение Вольтерра второго рода в пространстве $C^1[0,1]$. Следовательно, $\tau'_n(x) = u_x(x,0) \in C^1[0,1]$.Из свойств решений первой начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности и задачи Дарбу для волнового уравнения, принимая во внимание представление (6), получаем, что $u_n \in W$ для всех $f_n \in C^1_0(\overline{\Omega})$.

В силу неравенства (4) имеем $\|u_n - u\|_1 \leq c\|f_n - f\|_0 \to 0$.

Следовательно, $\{u_n\}$ есть последовательность, отвечающая определению сильного решения, задача S_1 сильно разрешима для любой правой части f, и сильное решение принадлежит классу $H^1(\Omega) \cap H^{1,2}_{x,y}(\Omega_1) \cap C(\overline{\Omega})$. Теорема 1 доказана.

4. О спектре задачи. Из Теоремы 1 следует, что оператор L задачи S_1 обратим, и обратный оператор L^{-1} является оператором Гильберта – Шмидта. Тогда спектр может состоять только из собственных значений оператора L^{-1}. Естественно возникает вопрос о существовании собственных значений оператора L^{-1}, следовательно, и задачи S_1.

Теорема 2. *Пусть L - оператор задачи S_1и $\alpha \neq 1$.Тогда существует $\lambda \in \mathbb{C}$ такое, что уравнение $Lu = \lambda u$ имеет нетривиальное решение.*

Доказательство. Приведем здесь только краткую схему доказательства. Через L обозначим замыкание в $L_2(\Omega)$ дифференциального оператора, заданного на W равенством (1) Из теоремы 1 следует, что оператор L - обратим, и L^{-1} - оператор Гильберта – Шмидта, определяемый формулой (5). Тогда оператор $L^{-2} \equiv (L^{-1})^2$ ядерный в $L_2(\Omega)$. Поэтому для оператора L^{-2} применим результат В.Б. Лидского о совпадении матричного и спектрального следов.

Лемма [9] *Если оператор T – ядерный в гильбертовом пространстве H, тогда, каков бы ни был ортонормированный базис $\varphi_i(i = 1,2,\dots)$в H, справедливо равенство*

$$SpT \equiv \sum_{k=1}^{\infty}(T\varphi_k, \varphi_k) = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k(T), \tag{19}$$

где λ_k – собственные значения оператора T.

Известно также, что, если T – ядерный оператор в пространстве $L_2(\Omega)$, представленный как произведение $T = KR$ двух операторов Гильберта – Шмидта:

$$(Kf)(z) = \int\limits_{\Omega} K(z,z_1)\,f(z_1)dz_1, (Rf)(z) = \int\limits_{\Omega} R(z,z_1)\,f(z_1)dz_1,$$

то имеет место формула Гаала вычисления следов [10]

$$SpT = \int_{\Omega}\left[\int_{\Omega} K(z,z_1)R(z_1,z)\,dz_1\right]dz. \tag{20}$$

Из (19) и (20) получаем, что

$$SpL^{-2} = \iint_{\Omega} dxdy\int_{\Omega} K(x,y;x_1,y_1)K(x_1,y_1;x,y)dx_1dy_1.$$

Используя явный вид ядра $K(x,y;x_1,y_1)$ можем показать, что $SpL^{-2} \neq 0$. Не останавливаясь на подробных вычислениях укажем только, что наиболее существенным является доказательство отличия от нуля интеграла $\int_0^{\xi} G_0(t,y)dt$. Имеем

$$\int\limits_0^{\xi} G_0(t,y)dt = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int\limits_0^{\xi}\frac{y+2n}{t^{3/2}}e^{-\frac{(y+2n)^2}{4t}}dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=\mp\infty}^{\infty}\int\limits_{\frac{y+2n}{2\sqrt{\xi}}}^{\pm\infty} e^{-t^2}dt =$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=-\infty}^{-1}\int\limits_{-\infty}^{\frac{y+2n}{2\sqrt{\xi}}} e^{-t^2}dt + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{+\infty}\int\limits_{\frac{y+2n}{2\sqrt{\xi}}}^{\infty} e^{-t^2}dt =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_{\frac{y+2n}{2\sqrt{\xi}}}^{\infty} e^{-t^2}dt - \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{-\frac{y+2n}{2\sqrt{\xi}}}^{\infty} e^{-t^2}dt\right] = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_{\frac{y+2n}{2\sqrt{\xi}}}^{\infty} e^{-t^2}dt - \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{\frac{2n-y}{2\sqrt{\xi}}}^{\infty} e^{-t^2}dt\right] =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_{\frac{y+2n}{2\sqrt{\xi}}}^{\infty} e^{-t^2}dt - \sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_{\frac{2n-y+2}{2\sqrt{\xi}}}^{\infty} e^{-t^2}dt\right] = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_{\frac{2n+y}{2\sqrt{\xi}}}^{\frac{2n+2-y}{2\sqrt{\xi}}} e^{-t^2}dt.$$

Отсюда получаем, что$\int_0^{\xi} G_0(t,y)dt \geq 0$.Причем равенство здесь достигается только на $y = 1$, то есть $\int_0^{\xi} G_0(t,y)dt \not\equiv 0$.

Отличие от нуля других слагаемых показывается проще, и мы на этом подробно останавливаться не будем. Таким образом, доказывается, что $SpL^{-2} \neq 0$.

Тогда, в силу (19), имеем$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k(L^{-2}) \equiv \sum_{k=1}^{\infty}{\lambda_k}^2(L^{-1}) \neq 0$,где$\lambda_k(L^{-2})$ – собственные значения оператора L^{-2}.

Это означает, что $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{{\lambda_k}^2} \neq 0$, где λ_k - собственные значения задачи (1) – (3). Отсюда следует существование собственных значений рассматриваемой нами нелокальной краевой задачи.

Авторы выражают благодарность М. А. Садыбекову за постановку задачи и ценные советы во время работы.Эта работа была поддержана грантом 0825/ГФ4 МОН РК.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Кальменов Т.Ш. О спектре задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева - Бицадзе // Дифференциальные уравнения. -1977. - Т.13, №8. - С. 1418 - 1425.

[2] Кальменов Т.Ш. О спектре задачи Трикоми для одного уравнения смешанного типа четвертого порядка // Дифференциальные уравнения. -1979. - Т.15, № 2. - С. 354 - 356.

[3] Moiseev E.I. Properties of Solution of Lavrentev-Bitsadze Equation // Mathematical Notes. – 1979. – V. 26, No. 3-4. - P. 757-762.

[4] Ponomarev S.M.Eigenvalue Problem for Lavrentiev-Bitsadze Equation //DokladyAkademiinauk SSSR. – 1977. – V. 233, No. 1. – P. 39-40.

[5] Moiseev E.I.Equations of Mixed Type with a Spectral Parameter. – Moscow Univ., Moscow. – 1988. - 150 p.

[6] БердышевА.С. Краевые задачи и их спектральные свойства для уравнения смешанного параболо-гиперболического и смешанно-составного типов. – Алматы. – 2015. – 224 с.

[7] Sadybekov M.A., Toizhanova G.D. Spectral properties of a class of boundary value problems for a parabolic-hyperbolic equation //Differentsial'nyeUravneniya. – 1992. – V. 28, No.1. – P. 176–179.

[8] Samarskii A.A., Tikhonov A.N. Equations of Mathematical Physics. - Izdatelstvo MGU, Moscow. – 1999.

[9] Lidskii V. B. Nonselfadjoint operators possessing a trace // DokladyAkademiinauk SSSR. – 1959. V. 125, No. 3. – P. 485–488.

[10] Brislawn C. Kernels of trace class operators // Proc. Amer. Math. Soc. -1988. – V. 104, №4. – P. 1181-1190.

REFERENCES

[1] Kalmenov T.Sh. The spectrum of Tricomi's problem for a Lavrent'ev-Bitsadze problem. *Differential equations,* **1977**, 13, 8, 984 –989 (in Eng.).

[2] Kalmenov T.Sh. The spectrum of Tricom's problem fora mixed fourth - order equation.*Differential equations,* **1979**, 15, 2, 248 –250 (in Eng.).

[3] Moiseev E.I. Properties of Solution of Lavrentev-Bitsadze Equation. *Mathematical Notes,* **1979**, 26, 3-4, 757-762 (in Eng.).

[4] Ponomarev S.M. Eigenvalue Problem for Lavrentiev-Bitsadze Equation. Reports of AS of USSR, **1977**, 233, 1, 39-40 (in Eng.).

[5] Moiseev E.I. Equations of Mixed Type with a Spectral Parameter. Moscow: Moscow Univ., 1988. 150p.(inRuss.).

[6] Berdyshev A.S. Boundary problems and their spectral properties for equations of mixed parabolic-hyperbolic and mixed-composite types. - Almaty. - 2015. - 224 p. (inRuss.).

[7] Sadybekov M.A., Toizhanova G.D. Spectral properties of a class of boundary value problems for a parabolic-hyperbolic equation. *Differential equations*, **1992**, 28, 1, 176–179 (in Eng.).

[8] Samarskii A.A., Tikhonov A.N. Equations of Mathematical Physics. Moscow: Izdatelstvo MGU. 1999 (inEng.).

[9] Lidskii V.B. Nonselfadjoint operators possessing a trace. Reports of AS of USSR, **1959**, 125, 3, 485–488 (in Russ.).

[10] Brislawn C. Kernels of trace class operators. *Proc. Amer. Math. Soc*, **1988**, 104, 4, 1181-1190 (in Eng.).

ПАРАБОЛА-ГИПЕРБОЛАЛЫҚ АРАЛАС ТИПТЕГІ ТЕҢДЕУ ҮШІН БЕЙЛОКАЛ ШЕТТІК ЕСЕПТІҢ СПЕКТРІ ТУРАЛЫ

Г. Ділдәбек[1, 2], А. А. Тенгаева[1, 3]

[1]Математика және математикалық моделдеу институты, Алматы, Қазақстан,
[2]әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан,
[3]Қазақ ұлттық аграрлық университеті, Алматы, Қазақстан

Тірек сөздер: бейлокал шеттік шарт; спектр; аралас типті теңдеу; матрицалық із; спектралдық із.

Аннотация. Жұмыста I текті парабола-гиперболалық типтегі оператор үшін классикалық емес шеттік шарттар мен берілген спектралдық есеп қарастырылады. Есеп стандартты облыста қарастырылады. Облыстың параболалық бөлігі тіктөртбұрыш. Ал, облыстың гиперболалық бөлігі характеристикалық үшбұрышпен сәйкес келеді. Облыстың параболалық бөлігінде локалді шеттік шарт және гиперболалық бөлігінде жылжымалы шеттік шарт қарастырылады. Қарастырылған есептің әлді шешілімділігі дәлелденеді. Шешілімділік теориясымен салыстырғанда аралас типтегі теңдеулердің спектралдық мәселелері аз зерттелген болып табылады. Берілген есепке сәйкес дифференциалдық оператор түсінігі енгізіледі. Есептің меншікті мәндері деп осы оператордың меншікті мәндерін түсінеміз. Есептің меншікті мәндерінің бар болуы дәлелденеді. Дәлелдеу барысында кері оператордың интегралдық көріністе болатындығы негізделеді. Осы интегралдық оператор ядросының түрін пайдаланып, оператордың матрицалық ізі нөлден өзгеше болатындығы дәлелденеді. Дәлелдеу ядролық операторлар үшін матрицалық және спектралдық іздердің сәйкестігі туралы формуланы қолданумен аяқталады.

Поступила 13.01.2016 г.

Publication Ethics and Publication Malpractice in the journals of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan

For information on Ethics in publishing and Ethical guidelines for journal publication see http://www.elsevier.com/publishingethics and http://www.elsevier.com/journal-authors/ethics.

Submission of an article to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan implies that the described work has not been published previously (except in the form of an abstract or as part of a published lecture or academic thesis or as an electronic preprint, see http://www.elsevier.com/postingpolicy), that it is not under consideration for publication elsewhere, that its publication is approved by all authors and tacitly or explicitly by the responsible authorities where the work was carried out, and that, if accepted, it will not be published elsewhere in the same form, in English or in any other language, including electronically without the written consent of the copyright-holder. In particular, translations into English of papers already published in another language are not accepted.

No other forms of scientific misconduct are allowed, such as plagiarism, falsification, fraudulent data, incorrect interpretation of other works, incorrect citations, etc. The National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan follows the Code of Conduct of the Committee on Publication Ethics (COPE), and follows the COPE Flowcharts for Resolving Cases of Suspected Misconduct (http://publicationethics.org/files/u2/New_Code.pdf). To verify originality, your article may be checked by the Cross Check originality detection service http://www.elsevier.com/editors/plagdetect.

The authors are obliged to participate in peer review process and be ready to provide corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. All authors of a paper should have significantly contributed to the research.

The reviewers should provide objective judgments and should point out relevant published works which are not yet cited. Reviewed articles should be treated confidentially. The reviewers will be chosen in such a way that there is no conflict of interests with respect to the research, the authors and/or the research funders.

The editors have complete responsibility and authority to reject or accept a paper, and they will only accept a paper when reasonably certain. They will preserve anonymity of reviewers and promote publication of corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. The acceptance of a paper automatically implies the copyright transfer to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.

The Editorial Board of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan will monitor and safeguard publishing ethics.

Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайте:

www:nauka-nanrk.kz

http://www.physics-mathematics.kz

Редактор *М. С. Ахметова*
Верстка на компьютере *Д. Н. Калкабековой*

Подписано в печать 16.01.2016.
Формат 60х881/8. Бумага офсетная. Печать – ризограф.
10,7 п.л. Тираж 300. Заказ 1.

Национальная академия наук РК
050010, Алматы, ул. Шевченко, 28, т. 272-13-18, 272-13-19