ISSN 1991-346X

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ

Х А Б А Р Л А Р Ы

ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

N E W S

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА СЕРИЯСЫ

♦

СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

♦

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

1 (305)

ҚАНТАР – АҚПАН 2016 ж.
ЯНВАРЬ – ФЕВРАЛЬ 2016 г.
JANUARY – FEBRUARY 2016

1963 ЖЫЛДЫҢ ҚАҢТАР АЙЫНАН ШЫҒА БАСТАҒАН
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1963 ГОДА
PUBLISHED SINCE JANUARY 1963

ЖЫЛЫНА 6 РЕТ ШЫҒАДЫ
ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД
PUBLISHED 6 TIMES A YEAR

АЛМАТЫ, ҚР ҰҒА
АЛМАТЫ, НАН РК
ALMATY, NAS RK

«Известия НАН РК. Серия физико-математическая». ISSN 1991-346X
Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы)
Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации и архивов Министерства культуры и информации Республики Казахстан **№5543-Ж**, выданное 01.06.2006 г.

Периодичность: 6 раз в год.
Тираж: 300 экземпляров.

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, ком. 219, 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,
www:nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75.

News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physical-mathematical series.
ISSN 1991-346X
Owner: RPA "National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan" (Almaty)
The certificate of registration of a periodic printed publication in the Committee of information and archives of the Ministry of culture and information of the Republic of Kazakhstan N 5543-Ж, issued 01.06.2006

Periodicity: 6 times a year
Circulation: 300 copies

Editorial address: 28, Shevchenko str., of. 219, 220, Almaty, 050010, tel. 272-13-19, 272-13-18,
www:nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

Address of printing house: ST "Aruna", 75, Muratbayev str, Almaty

N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 1, Number 305 (2016), 82 – 91

THE UNIQUENESS OF THE SOLUTION OF THE SPATIAL PROBLEM OF INTEGRAL GEOMETRY FOR CURVES THAT ARE INVARIANT WITH RESPECT TO THE VERTICAL SHIFT

T. B. Dilman, A. A. Abeyeva, M. S. Serikbol

The Korkyt Ata Kyzylorda State University, Kyzylorda, Kazakhstan.
E-mail: DilmanTB@mail.ru

Key words: integral geometry, family curves, integral equation, solution, uniqueness.

Abstract. In this article the following class of integral geometry problems is considered: about the function reconstruction, shared by the integrals on some set of curves. This problems are correlated with several applications. In order to study the internal earth structure, the multiple explosions are held on Earth surface. Then, the fluctuations regimes of earth surface are measured on equipment for each explosion. The goal of research is to determine distribution of physical parameters inside the Earth accordin to equipment measurements, correlated with laws on dissemination of seismic waves. The most clear functional of such equipment is the arrival time of seismic wave, which exacty serves as a base for interpretation practice. It is known that lineriazed problem of seismic-exploration data interpretation is actually the integral geometry problem. An integral geometry also includes the problems related to the radiography, particularly the interpretation problem of X-ray examination. For instance, a X-ray film darkening functionally correlated with the absorption coefficient is also actually an integral geometry problem. In this case, it is required to determine the function if the integrals of this function on set of rays were set. The integral geometry problem in multidimensional space is studied in this work. The solution uniqueness theorem is proved for the considered integral geometry problem.

УДК 517.946

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ ДЛЯ КРИВЫХ, ИНВАРИАНТНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ВЕРТИКАЛЬНОГО СДВИГА

Т. Б. Дильман, А. А. Абеева, М. С. Серикбол

Кызылординский государственный университет им. Коркыт ата, Кызылорда, Казахстан

Ключевые слова: интегральная геометрия, семейство кривых, интегральное уравнение, решение, единственность.

Аннотация. В статье рассматривается следующий класс задачинтегральной геометрии: о восстановлении функции, заданной интегралами по некоторому семейству кривых. Эти задачи связаны с многочисленными приложениями. В целях изучения внутреннего строения земных недр на поверхности Земли производится серия взрывов. Для каждого взрыва на системе приборов измеряются режимы колебаний земной поверхности. Цель исследования – по показаниям приборов определить внутри Земли распределение физических параметров, связанных с законами распространения сейсмических волн. Наиболее четкий функционал в показаниях приборов – время прихода сейсмической волны, именно он служит основой в практике интерпретации. Известно, что линеаризованная задача интерпретации данных сейсморазведки есть задача интегральной геометрии. К интегральной геометрии сводятся задачи, связанные с просвечиванием, в частности, задачи интерпретации рентгеновских снимков. Потемнение рентгеновской пленки функционально связано с интегралом поглощения вдоль рентгеновского луча от источника до точки на пленке. Таким

образом, задача определения пространственного коэффициента поглощения есть задача интегральной геометрии – требуется определить функцию, если заданы интегралы от этой функции по семейству лучей. В работе исследуется задача интегральной геометрии для семейства пространственных кривых. Доказывается теорема единственности решения рассматриваемой задачи интегральной геометрии.

Задача интегральной геометрии, как известно, заключается в определении функции, если известны интегралы от нее по семейству многообразий, причем размерность этих многообразий меньше размерности пространства, которое является областью определения искомой функции. К задачам интегральной геометрии сводятся многие прикладные задачи [1].

Обратными задачами для дифференциальных уравнений называют задачи определения дифференциальных уравнений по данной информации о решениях этих уравнений [1]. М.М. Лаврентьев и В.Г. Романов в 1966 году впервые обратили внимание на глубокую связь между задачами интегральной геометрии и многомерными обратными задачами для дифференциальных уравнений с частными производными [2]. Многомерные обратные задачи для уравнений математической физики часто некорректны в классическом смысле Адамара. Поэтому актуальность приобретают вопросы условной корректности в смысле Тихонова некорректных задач [3]. Растет необходимость исследования задач интегральной геометрии, когда интегрирование искомой функции (нескольких функций) производится по семейству сложных многообразий (например, [4]).

В области $0 \le z \le H$ трехмерного пространства x, y, z задано семейство плоских кривых $L(x, y, z, \alpha)$ типа параболы с вершинами в точках (x, y, z) и опирающихся двумя концами на плоскость $z = 0$. Плоскости, содержащие кривые из этого семейства, предполагаются перпендикулярными плоскости $z = 0$. Пусть (ξ_k, η_k, ζ) – координаты кривой из семейства $L(x, y, z, \alpha)$:

$$\xi_k = x + (-1)^k \sqrt{z-\zeta}[1+\varphi(x, y, \sqrt{z-\zeta}, \alpha)]\cos\alpha,$$
$$\eta_k = y + (-1)^k \sqrt{z-\zeta}[1+\varphi(x, y, \sqrt{z-\zeta}, \alpha)]\sin\alpha,$$
$$k = 1, 2, \quad 0 \le \zeta \le z.$$

В рассматриваемой задаче интегральной геометрии из уравнения

$$f(x, y, z, \alpha) = \int_0^{r(x,y,z,0,\alpha)} \sum_{k=1}^{2} u(\xi_k, \eta_k, \zeta)dr \tag{1}$$

по заданной функции $f(x, y, z, \alpha)$ нужно определить $u(x, y, z)$. Здесь

$$r = r(x, y, z, \zeta, \alpha) = \sqrt{z-\zeta}[1+\varphi(x, y, \sqrt{z-\zeta}, \alpha)]$$

означает длину проекции кривой из семейства кривых $L(x, y, z, \alpha)$ на плоскости $z = 0$.

Аналогичная постановка задачи интегральной геометрии, когда кривые инвариантны к сдвигу по переменным x, y исследована в работе [5]. В данной работе рассматриваемые кривые инвариантны к сдвигу по переменной z. Здесь доказана теорема единственности решения одной многомерной задачи интегральной геометрии.

Теорема. Пусть функция $\varphi(x, y, \tau, \alpha)$ трижды непрерывно дифференцируема по всем переменным и удовлетворяет условиям

$$\varphi(x, y, -\tau, \alpha) = \varphi(x, y, \tau, \alpha), \ \varphi(x, y, 0, \alpha) = 0$$
$$\|\tau'\varphi(x, y, \tau', \alpha) - \tau''\varphi(x, y, \tau'', \alpha)\|_C \le \|\tau' - \tau''\|_C q, \quad q \prec 1. \tag{*}$$

Тогда решение рассматриваемой задачи интегральной геометрии единственно в достаточно малой области в классе финитных функций с носителем $\Omega = \{(x, y)\} \in R^2$, принадлежащих $L_2(\Omega)$ по x, y, а по переменной z удовлетворяющей условию

$$|u(x, y, z)| \le Me^{az}, \quad z \ge 0; \quad u(x, y, z) \equiv 0, \quad z \prec 0; \quad M, a = const.$$

Доказательство. Уравнение (1) преобразуем к следующему виду

$$f(x, y, z, \alpha) = \int_0^z \frac{R(x, y, \sqrt{z-\zeta}, \alpha)}{2\sqrt{z-\zeta}} \sum_{k=1}^{2} u(\xi_k, \eta_k, \zeta) d\zeta, \qquad (2)$$

$$R(x, y, \sqrt{z-\zeta}, \alpha) = 1 + \varphi(x, y, \sqrt{z-\zeta}, \alpha) + \sqrt{z-\zeta}\varphi'_{(3)}(x, y, \sqrt{z-\zeta}, \alpha).$$

К функции $f(x, y, z, \alpha)$ применяем преобразование Лапласа по переменной z:

$$\widetilde{f}(x, y, p, \alpha) = \int_0^{+\infty} f(x, y, z, \alpha) e^{-pz} dz =$$

$$= \int_0^{+\infty} d\zeta \int_{\zeta}^{+\infty} e^{-pz} \frac{R(x, y, \sqrt{z-\zeta}, \alpha)}{2\sqrt{z-\zeta}} \sum_{k=1}^{2} u(\xi_k, \eta_k, \zeta) dz.$$

Изменяя порядок интегрирования и введя новую переменную $\tau = \sqrt{z-\zeta}$ получаем уравнение

$$\widetilde{f}(x, y, p, \alpha) = \int_0^{+\infty} R(x, y, \tau, \alpha) e^{-p\tau^2} d\tau \int_0^{+\infty} e^{-p\zeta} \sum_{k=1}^{2} u(\xi_k, \eta_k, \zeta) d\zeta, \qquad (3)$$

где

$$R(x, y, \tau, \alpha) = 1 + \varphi(x, y, \tau, \alpha) + \tau\varphi'_{\tau}(x, y, \tau, \alpha), \qquad (4)$$

$$\xi_k = x + (-1)^k \tau[1 + \varphi(x, y, \tau, \alpha)]\cos\alpha,$$

$$\eta_k = y + (-1)^k \tau[1 + \varphi(x, y, \tau, \alpha)]\sin\alpha, \; k = 1,2.$$

Теперь уравнение (3) преобразуются к виду

$$\widetilde{f}(x, y, p, \alpha) = \int_0^{+\infty} R(x, y, \tau, \alpha) e^{-p\tau^2} \sum_{k=1}^{2} u(\xi_k, \eta_k, p) d\tau =$$

$$= -\int_0^{+\infty} e^{-pt^2} R(x, y, -t, \alpha) \cdot$$

$$\cdot \widetilde{u}[x + t(1 + \varphi(x, y, -t, \alpha))\cos\alpha,\; y + t(1 + \varphi(x, y, -t, \alpha))\sin\alpha, p]dt +$$

$$+ \int_0^{+\infty} e^{-p\tau^2} R(x, y, \tau, \alpha) \cdot$$

$$\cdot \widetilde{u}[x + \tau(1 + \varphi(x, y, \tau, \alpha))\cos\alpha,\; y + \tau(1 + \varphi(x, y, \tau, \alpha))\sin\alpha, p]d\tau, \qquad (5)$$

где $\widetilde{u}(x, y, p) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, y, \zeta) e^{-p\zeta} d\zeta$.

Из четности функции $\varphi(x, y, \tau, \alpha)$ и нечетности производной $\varphi'_{\tau}(x, y, \tau, \alpha)$ по переменной τ имеем $R(x, y, -t, \alpha) = R(x, y, t, \alpha)$. Тогда уравнение (5) можно переписать так

$$\widetilde{f}(x,y,p,\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p\tau^2} R(x,y,\tau,\alpha) \cdot$$

$$\cdot \widetilde{u}[x + \tau(1 + \varphi(x,y,\tau,\alpha))\cos\alpha, y + \tau(1 + \varphi(x,y,\tau,\alpha))\sin\alpha, p]d\tau.$$

Интегрируя $\widetilde{f}(x, y, p, \alpha)$ по α от 0 до 2π, получаем двойной интеграл по всей плоскости τ, α:

$$\int_0^{2\pi} \widetilde{f}(x, y, p, \alpha) d\alpha = \int_0^{2\pi} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p\tau^2} R(x, y, \tau, \alpha) \cdot$$

$$\widetilde{u}[x + \tau(1 + \varphi(x, y, \tau, \alpha))\cos\alpha,\; y + \tau(1 + \varphi(x, y, \tau, \alpha))\sin\alpha, p]d\tau. \qquad (6)$$

Сделаем замену переменных:

$$x+\tau(1+\varphi(x,\,y,\,\tau,\,\alpha))\cos\alpha=\xi,$$

$$y+\tau(1+\varphi(x,\,y,\,\tau,\,\alpha))\sin\alpha=\eta. \tag{7}$$

Из системы (7) требуется найти τ и α, рассматривая x и y как параметров. Нетрудно из системы (7) найти

$$\alpha=arctg\frac{\eta-y}{\xi-x}\cdot \tag{8}$$

Справедлива **Лемма** [4]. При условиях теоремы, τ из системы (6) определяется в виде

$$\tau=\sqrt{(x-\xi)^2+(\eta-y)^2}+w(x,\,y,\,\xi,\,\eta), \tag{9}$$

где $w(x,\,y,\,\xi,\,\eta)$ – сумма функционального ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\tau_k-\tau_{k-1})$,

$$\tau_0=\sqrt{(x-\xi)^2+(\eta-y)^2},\quad \tau_n=\tau_0-\tau_{n-1}\varphi(x,\,y,\,\tau_{n-1},\,arctg\frac{\eta-y}{\xi-x}),\quad n=1,2,...$$

Теперь пользуясь формулами (8) и (9) вычислим якобиан:

$$J(\xi,\eta)=\begin{vmatrix}\tau'_\xi & \tau'_\eta\\ \alpha'_\xi & \alpha'_\eta\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\dfrac{\xi-x}{\sqrt{(x-\xi)^2+(\eta-y)^2}}+w'_\xi & \dfrac{\eta-y}{\sqrt{(x-\xi)^2+(\eta-y)^2}}+w'_\eta\\ \dfrac{-(\eta-y)}{(x-\xi)^2+(\eta-y)^2} & \dfrac{\xi-x}{(x-\xi)^2+(\eta-y)^2}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(\eta-y)^2}}+\frac{(\xi-x)w'_\xi+(\eta-y)w'_\eta}{(x-\xi)^2+(\eta-y)^2}.$$

Следовательно,

$$J(\xi,\eta)=\frac{1+G(x,\,y,\,\xi,\,\eta)}{\sqrt{(x-\xi)^2+(\eta-y)^2}}, \tag{10}$$

функция $G(x,\,y,\,\xi,\,\eta)=\dfrac{(\xi-x)^2w'_\xi+(\eta-y)^2w'_\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(\eta-y)^2}}$ – дважды непрерывно дифференцируема по x и y.

Таким образом, после замены переменных, вместо уравнения (6), имеем

$$\int\limits_0^{2\pi}\tilde f(x,\,y,\,p,\,\alpha)d\alpha=\iint\limits_{R^2}\frac{\tilde R(x,\,y,\,\xi,\,\eta)[1+G(x,\,y,\,\xi,\,\eta)]}{\sqrt{(x-\xi)^2+(\eta-y)^2}}\cdot$$

$$\cdot\tilde u(\xi,\,\eta,\,p)\exp\{-p[\sqrt{(x-\xi)^2+(\eta-y)^2}+w(x,\,y,\,\xi,\,\eta)]^2\}d\xi d\eta,$$

где

$$\tilde R(x,\,y,\,\xi,\,\eta)=R[x,\,y,\,\sqrt{(x-\xi)^2+(\eta-y)^2}+w(x,\,y,\,\xi,\,\eta),\,arctg\frac{\eta-y}{\xi-x}].$$

В силу финитности функции $\tilde u(\xi,\,\eta,\,p)$ по первым двум аргументам в ограниченной области $\Omega=\{(x,\,y)\}\subset R^2$:

$$\int_0^{2\pi} \widetilde{f}(x, y, p, \alpha) d\alpha = \iint_\Omega \frac{\widetilde{u}(\xi, \eta, p)}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (\eta - y)^2}} d\xi d\eta + \iint_\Omega \frac{K(x, y, \xi, \eta, p)\widetilde{u}(\xi, \eta, p)}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (\eta - y)^2}} d\xi d\eta,$$

где

$$K(x, y, \xi, \eta, p) = \widetilde{R}(x, y, \xi, \eta)[1 + G(x, y, \xi, \eta)] \cdot$$

$$\cdot \exp\{-p[\sqrt{(x-\xi)^2 + (\eta - y)^2} + w(x, y, \xi, \eta)]^2\} - 1$$

достаточно гладкая функция. К обеим частям последнего уравнения применяем оператор усреднения [6] по кругу $S(\lambda, \mu; h)$ радиуса h с центром в точке (λ, μ):

$$\omega(\lambda, \mu, p) = \iint_{S(\lambda,\mu;h)} \frac{\int_0^{2\pi} \widetilde{f}(x, y, p, \alpha) d\alpha}{\sqrt{(x-\lambda)^2 + (\mu - y)^2}} dxdy =$$

$$= \iint_\Omega F(\lambda, \mu, \xi, \eta, p)\widetilde{u}(\xi, \eta, p) d\xi d\eta \tag{11}$$

где

$$F(\lambda, \mu, \xi, \eta, p) = \iint_{S(\lambda,\mu;h)} \frac{dxdy}{\sqrt{(x-\lambda)^2 + (\mu - y)^2}\sqrt{(x-\xi)^2 + (\eta - y)^2}} +$$

$$+ \iint_{S(\lambda,\mu;h)} \frac{K(x, y, \xi, \eta, p) dxdy}{\sqrt{(x-\lambda)^2 + (\mu - y)^2}\sqrt{(x-\xi)^2 + (\eta - y)^2}}.$$

С помощью полярных координат r, α с центром в точке (λ, μ) изучим первое слагаемое функции $F(\lambda, \mu, \xi, \eta, p)$:

$$\iint_{S(\lambda,\mu;h)} \frac{dxdy}{\sqrt{(x-\lambda)^2 + (\mu - y)^2}\sqrt{(x-\xi)^2 + (\eta - y)^2}} = \left| \begin{array}{l} x = \lambda + r\cos\alpha \\ y = \mu + r\sin\alpha \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^h \frac{dr}{\sqrt{[r-\chi]^2 + (\xi - \lambda)^2 + (\eta - \mu)^2 - \chi^2}}, \tag{12}$$

где $\chi = (\xi - \lambda)\cos\alpha - (\eta - \mu)\sin\alpha$.

Используя замену

$$r - (\xi - \lambda)\cos\alpha - (\eta - \mu)\sin\alpha = \tau,$$

$$(\xi - \lambda)^2 + (\eta - \mu)^2 - [(\xi - \lambda)\cos\alpha + (\eta - \mu)\sin\alpha]^2 = c$$

вычисляем внутренний интеграл в двойном интеграле (12):

$$\iint_{S(\lambda,\mu;h)} \frac{dxdy}{\sqrt{(x-\lambda)^2 + (\mu - y)^2}\sqrt{(x-\xi)^2 + (\eta - y)^2}} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \ln\left| h - \chi + \sqrt{h^2 - 2h[(\xi - \lambda)\cos\alpha + (\eta - \mu)\sin\alpha] + \chi^2} \right| d\alpha -$$

$$- \int_0^{2\pi} \ln\left| -\frac{(\xi - \lambda)\cos\alpha + (\eta - \mu)\sin\alpha}{\sqrt{(\xi - \lambda)^2 + (\eta - \mu)^2}} + 1 \right| d\alpha - 2\pi \ln\sqrt{(\xi - \lambda)^2 + (\eta - \mu)^2}.$$

Поэтому уравнение (11) записывается

$$\omega(\lambda,\mu,p) = -2\pi\iint_{\Omega} \ln\sqrt{(\xi-\lambda)^2+(\eta-\mu)^2}\,\widetilde{u}(\xi,\eta,p)d\xi d\eta + \\ + \iint_{\Omega}\widetilde{F}(\lambda,\mu,\xi,\eta,p)\widetilde{u}(\xi,\eta,p)d\xi d\eta, \tag{13}$$

где

$$\widetilde{F}(\lambda,\mu,\xi,\eta,p) = \int_0^{2\pi}\ln\Big|h-(\xi-\lambda)\cos\alpha-(\eta-\mu)\sin\alpha + \\ + \sqrt{h^2-2h[(\xi-\lambda)\cos\alpha-(\eta-\mu)\sin\alpha]+(\xi-\lambda)^2+(\eta-\mu)^2}\Big|d\alpha - \\ - \int_0^{2\pi}\ln\left|1-\frac{(\xi-\lambda)\cos\alpha-(\eta-\mu)\sin\alpha}{\sqrt{(\xi-\lambda)^2+(\eta-\mu)^2}}\right|d\alpha + \\ + \iint_{S(\lambda,\mu;h)}\frac{K(x,y,\xi,\eta,p)dxdy}{\sqrt{(x-\lambda)^2+(\mu-y)^2}\sqrt{(x-\xi)^2+(\eta-y)^2}}. \tag{14}$$

К уравнению (13) применяем оператор Лапласа по λ, μ:

$$\Delta_{\lambda,\mu}\omega(\lambda,\mu,p) = -2\pi\iint_{\Omega}\Delta_{\lambda,\mu}\ln\sqrt{(\xi-\lambda)^2+(\eta-\mu)^2}\,\widetilde{u}(\xi,\eta,p)d\xi d\eta + \\ + \iint_{\Omega}\Delta_{\lambda,\mu}\widetilde{F}(\lambda,\mu,\xi,\eta,p)\widetilde{u}(\xi,\eta,p)d\xi d\eta. \tag{15}$$

Учитывая, что $\Delta_{\lambda,\mu}\ln\sqrt{(\xi-\lambda)^2+(\eta-\mu)^2} = 2\pi\delta(\xi-\lambda,\eta-\mu)$ [6] и вспоминая свойство дельта-функции Дирака, имеем

$$\Delta_{\lambda,\mu}\omega(\lambda,\mu,p) = -4\pi^2\iint_{\Omega}\delta(\xi-\lambda,\eta-\mu)\widetilde{u}(\xi,\eta,p)d\xi d\eta + \\ + \iint_{\Omega}\Delta_{\lambda,\mu}\widetilde{F}(\lambda,\mu,\xi,\eta,p)\widetilde{u}(\xi,\eta,p)d\xi d\eta$$

или

$$\Delta_{\lambda,\mu}\omega(\lambda,\mu,p) = -4\pi^2\widetilde{u}(\lambda,\mu,p) + \iint_{\Omega}\Delta_{\lambda,\mu}\widetilde{F}(\lambda,\mu,\xi,\eta,p)\widetilde{u}(\xi,\eta,p)d\xi d\eta \tag{16}$$

Исследуем ядро уравнения (16). Если ввести полярные координаты ρ, β с центром в точке (ξ,η), то

$$\widetilde{F}(\xi+\rho\cos\beta,\eta+\rho\sin\beta,\xi,\eta,p) = \overline{F}(\rho,\beta,\xi,\eta,p). \tag{17}$$

Следовательно, ядро уравнения (16) будет иметь вид

$$\Delta_{\lambda,\mu}\widetilde{F}(\lambda,\mu,\xi,\eta,p) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\overline{F}}{\partial\rho} + \frac{\partial^2\overline{F}}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\overline{F}}{\partial\beta^2}. \tag{18}$$

После ряда известных преобразований [7] имеем

$$\overline{F}(\rho,\beta,\xi,\eta,p) = \Phi(\rho) + \Psi(\rho,\beta,\xi,\eta,p), \tag{19}$$

где

$$\int_0^{2\pi}\ln\left|h+\rho\cos\theta+\sqrt{h^2+2h\rho\cos\theta+\rho^2}\right|d\theta - \int_0^{2\pi}\ln|\cos\theta+1|d\theta = \Phi(\rho),$$

$$\iint_{S(\lambda,\mu;h)}\frac{K(x,y,\xi,\eta,p)dxdy}{\sqrt{(x-\lambda)^2+(\mu-y)^2}\sqrt{(x-\xi)^2+(\eta-y)^2}} = \\ = \Psi(\rho,\beta,\xi,\eta,p). \tag{20}$$

Задача оценки ядра уравнения (16), записанного в виде (18), сводится к задаче исследования гладкости функции $\Psi(\rho, \beta, \xi, \eta, p)$ по ρ, β, так как функция $\Phi(\rho)$ из (19) является достаточно гладкой функцией при $\rho \le diam\Omega \le h$. При достаточно малых ρ всегда можно выбрать положительное δ так, чтобы $\rho(1+\delta) \prec \rho\cos\theta + \sqrt{h^2 - \rho^2 \sin^2\theta}$.

Разбивая внутренний интеграл в формуле (20) на два интеграла: один по $[0, \rho(1+\delta)]$, другой – по $[\rho(1+\delta), \rho\cos\theta + \sqrt{h^2 - \rho^2\sin^2\theta}]$, получаем

$$\Psi(\rho, \beta, \xi, \eta, p) = \Psi_1(\rho, \beta, \xi, \eta, p) + \Psi_2(\rho, \beta, \xi, \eta, p),$$

где

$$\Psi_1(\rho, \beta, \xi, \eta, p) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\rho(1+\delta)} \frac{K(\xi + r\cos(\theta+\beta), \eta + r\sin(\theta+\beta), \xi, \eta, p)dr}{\sqrt{\rho^2 + r^2 - 2r\rho\cos\theta}},$$

$$\Psi_2(\rho, \beta, \xi, \eta, p) =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta + \int_{\rho(1+\delta)}^{\rho\cos\theta + \sqrt{h^2-\rho^2\sin^2\theta}} \frac{K(\xi + r\cos(\theta+\beta), \eta + r\sin(\theta+\beta), \xi, \eta, p)dr}{\sqrt{\rho^2 + r^2 - 2r\rho\cos\theta}}.$$

В интеграле $\Psi_1(\rho, \beta, \xi, \eta, p)$ введем новую переменную $r = \rho t$:

$$\Psi_1(\rho, \beta, \xi, \eta, p) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{1+\delta} \frac{K(\xi + \rho t\cos(\theta+\beta), \eta + \rho t\sin(\theta+\beta), \xi, \eta, p)dt}{\sqrt{1 + t^2 - 2t\cos\theta}}$$

достаточно гладкая функция. Для оценки функции $\Psi_2(\rho, \beta, \xi, \eta, p)$ и ее первых двух производных саму функцию запишем в виде

$$\Psi_2(\rho, \beta, \xi, \eta, p) =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\rho(1+\delta)}^{\rho\cos\theta + \sqrt{h^2-\rho^2\sin^2\theta}} \widehat{\Phi}(\frac{\rho}{r}, \theta) \frac{K(\xi + r\cos(\theta+\beta), \eta + r\sin(\theta+\beta), \xi, \eta, p)dr}{r},$$

где функция

$$\widehat{\Phi}(\frac{\rho}{r}, \theta) = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + r^2 - 2r\cos\theta}} = \frac{1}{\sqrt{(\frac{\rho}{r})^2 + 1 - 2(\frac{\rho}{r})\cos\theta}}$$

удовлетворяет условию [1, с.205]

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial\rho^k} \widehat{\Phi}(\frac{\rho}{r}, \theta) \right| \le \frac{C}{r^k}, \quad r \ge \rho(1-\delta), \quad C = const. \tag{21}$$

Вычисляя производные $\frac{\partial^k}{\partial\rho^k} D^{\alpha}_{\xi,\eta,\beta}$ $(\alpha + k \le 2)$ от $\Psi_2(\rho, \beta, \xi, \eta, p)$ символ $D^{\alpha}_{\xi,\eta,\beta}$ можно внести под знак внутреннего интеграла. В силу достаточной гладкости $K(\xi + r\cos(\theta+\beta), \eta + r\sin(\theta+\beta), \xi, \eta, p)$ и функция $\frac{K(\xi + r\cos(\theta+\beta), \eta + r\sin(\theta+\beta), \xi, \eta, p)}{r}$ будет достаточно гладкой.

Вычисление производной $\frac{\partial^k}{\partial\rho^k}$ от внутеннего интеграла функции $\Psi_2(\rho, \beta, \xi, \eta, p)$ по параметру ρ приводит к появлению ряда слагаемых за счет вычисления производных по верхнему и нижнему пределам и интеграла за счет дифференцирования подынтегральной функции. Первые из слагаемых ограничены, так как функция $\widehat{\Phi}(\frac{\rho}{r},\theta)$ на нижнем пределе ограничена и не зависит от ρ, а на верхнем пределе совпадает с аналитической функцией

$$\frac{\rho\cos\theta+\sqrt{h^2-\rho^2\sin^2\theta}}{h}.$$

Интеграл, возникающий при дифференцировании подынтегрального выражения, имеет вид

$$\int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_{\rho(1+\delta)}^{\rho\cos\theta+\sqrt{h^2-\rho^2\sin^2\theta}} \frac{D^{\alpha}_{\xi,\eta,\beta}K(\xi+r\cos(\theta+\beta),\eta+r\sin(\theta+\beta),\xi,\eta,p)}{r}\cdot$$

$$\cdot\frac{\partial^k}{\partial\rho^k}\widehat{\Phi}(\frac{\rho}{r},\theta)dr\cdot$$

и в силу неравенства (21) оценивается интегралом

$$\int\limits_{\rho(1+\delta)}^{\rho\cos\theta+\sqrt{h^2-\rho^2\sin^2\theta}}\frac{dr}{r^k}=\begin{cases}\ln\dfrac{\cos\theta+\sqrt{(\frac{h}{\rho})^2-\sin^2\theta}}{1+\delta}, & k=1,\\ -\dfrac{1}{\rho\cos\theta+\sqrt{h^2-\rho^2\sin^2\theta}}+\dfrac{1}{\rho(1+\delta)}, & k=2\end{cases} \tag{22}$$

Отсюда вытекает следущая оценка

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial\rho^k}D^{\alpha}_{\xi,\eta,\beta}\overline{F}(\rho,\beta,\xi,\eta,p)\right|\le Const\begin{cases}|\ln\rho|, & k=1,\\ \dfrac{1}{\rho}, & k=2,\quad k+\alpha\le 2\end{cases}, \tag{23}$$

справедливая в окрестности точки $\rho = 0$. Вне окрестности функция $\overline{F}$ – непрерывная и ограниченная вместе с производными второго порядка. По известной лемме Адамара [8]

$$\overline{F}(\rho,\beta,\xi,\eta,p)=\overline{F}(0,\beta,\xi,\eta,p)+\rho g(\rho,\beta,\xi,\eta,p)$$

где гладкость функции $g(\rho,\beta,\xi,\eta,p)$ на единицу меньше гладкости функции $\overline{F}(\rho,\beta,\xi,\eta,p)$. Учитывая, что $\overline{F}(0,\beta,\xi,\eta,p)$ зависит только от ξ, η, p имеем

$$\frac{\partial^2\overline{F}}{\partial\beta^2}=\rho\frac{\partial^2 g}{\partial\beta^2},$$

отсюда вытекает оценка

$$\left|\frac{\partial^2\overline{F}}{\partial\beta^2}\right|\le const\cdot\rho\cdot \tag{24}$$

На основе формулы (18), используя неравенства (23), (24), оценим ядро интегрального уравнения второго рода (16) в окрестности точки $\rho = 0$:

$$\left|\Delta_{\lambda,\mu}\widetilde{F}(\lambda,\mu,\xi,\eta,p)\right|\le\frac{1}{\rho}\left|\frac{\partial\overline{F}}{\partial\rho}\right|+\left|\frac{\partial^2\overline{F}}{\partial\rho^2}\right|+\frac{1}{\rho^2}\left|\frac{\partial^2\overline{F}}{\partial\beta^2}\right|\le$$

$$\le const\{\rho\ln\rho+\frac{1}{\rho}\}\le C_0\frac{\ln\rho}{\rho},\quad C_0=const.$$

Таким образом, показали, что уравнение (16) является уравнением типа Фредгольма с особенностью вида

$$\frac{\ln\sqrt{(\xi-\lambda)^2+(\eta-\mu)^2}}{\sqrt{(\xi-\lambda)^2+(\eta-\mu)^2}}.$$

Учитывая, что при $\alpha \succ 0$ имеем $\lim\limits_{\rho\to 0}\rho^{\alpha}\ln\rho = 0$, а также подбирая $\alpha \prec 1$, получаем $|\ln\rho| \le \dfrac{const}{\rho^{\alpha}}, \quad 0 \prec \alpha \prec 1$. Отсюда

$$\frac{\ln\sqrt{(\xi-\lambda)^2+(\eta-\mu)^2}}{\sqrt{(\xi-\lambda)^2+(\eta-\mu)^2}} \le \frac{const}{(\sqrt{(\xi-\lambda)^2+(\eta-\mu)^2})^{1+\alpha}}, \quad 0 \prec \alpha \prec 1,$$

т.е. уравнение (16) является уравнением со слабой особенностью в окрестности точки (λ, μ), а вне окрестности это уравнение имеет ограниченное ядро, т.е. является уравнением Фредгольма второго рода. Известно, что уравнение (16) с ядром такого типа имеет при фиксированных p $(\operatorname{Re} p \succ \alpha)$ единственное решение $\tilde{u}(x, y, p)$, принадлежащее к классу $L_2(\Omega)$ по x, y, если только диаметр области Ω достаточно мал [9]. В силу условий теоремы, по образу Лапласа $\tilde{u}(x, y, p)$ однозначно восстанавливается оригинал $u(x, y, z)$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. – Москва: Наука, 1980. – 287 с.

[2] Лаврентьев М.М., Романов В.Г. О трех линеаризованных обратных задачах для гиперболических уравнений // Доклады АН СССР. – 1966. - Т. 171, №6. – С. 1279-1281.

[3] Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. – Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. – 457 с.

[4] Баканов Г.Б., Дильман Т.Б. Об одной задаче интегральной геометрии для некоторого семейства кривых // Междунар. научная конференция «Актуальные проблемы математики и математического моделирования», посвящ. 50-летию создания Института математики и механики АН КазССР (1-5 июня 2015). – 2015. – С. 290-291.

[5] Алексеев А.А. Об одной задаче интегральной геометрии в трехмерном пространстве // Единственность, устойчивость и методы решения некорректных задач математической физики и анализа – Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1984. – С. 3-15.

[6] Ион Ф. Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными. Москва: Иностранная литература, 1958. – 157 с.

[7] Елубаев С.Е., Ділман Т.Б. Гиперболалық және параболалық теңдеулер үшін кейбір кері есептер. 2-басылымы, Қызылорда: Принт, 2012, 236 б.

[8] Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – Москва: МГУ, 1984. – 296 с.

[9] Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. Москва: Наука, 1959. – 232 с.

REFERENCES

[1] Lavrent'ev M.M., Romanov V.G., Shishatskij S.P. Nekorrektnye zadachi matematicheskoj fiziki i analiza. – Moskva: Nauka, 1980. – 287 s.

[2] Lavrent'ev M.M., Romanov V.G. O treh linearizovannyh obratnyh zadachah dlja giperbolicheskih uravnenij // Doklady AN SSSR. – 1966. - T. 171, №6. – S. 1279-1281.

[3] Kabanihin S.I. Obratnye i nekorrektnye zadachi. – Novosibirsk: Sibirskoe nauchnoe izdatel'stvo, 2009. – 457 s.

[4] Bakanov G.B., Dil'man T.B. Ob odnoj zadache integral'noj geometrii dlja nekotorogo semejstva krivyh // Mezhdunar. nauchnaja konferencija «Aktual'nye problemy matematiki i matematicheskogo modelirovanija», posvjashh. 50-letiju sozdanija Instituta matematiki i mehaniki AN KazSSR (1-5 ijunja 2015). – 2015. – S. 290-291.

[5] Alekseev A.A. Ob odnoj zadache integral'noj geometrii v trehmernom prostranstve // Edinstvennost', ustojchivost' i metody reshenija nekorrektnyh zadach matematicheskoj fiziki i analiza – Novosibirsk: VC SO AN SSSR, 1984. – S. 3-15.

[6] Ion F. Ploskie volny i sfericheskie srednie v primenenii k differencial'nym uravnenijam s chastnymi proizvodnymi. Moskva: Inostrannaja literatura, 1958. – 157 s.

[7] Elubaev S.E., Dilman T.B. Giperbolalyқ zhәne parabolalyқ teңdeuler үshin kejbir keri esepter. 2-basylymy, Қyzylorda: Print, 2012, 236 b.

[8] Petrovskij I.G. Lekcii po teorii obyknovennyh differencial'nyh uravnenij. – Moskva: MGU, 1984. – 296 s.

[9] Mihlin S.G. Lekcii po linejnym integral'nym uravnenijam. Moskva: Nauka, 1959. – 232 s.

ВЕРТИКАЛЬ ҚОЗҒАЛЫСҚА ИНВАРИАНТТЫ ҚИСЫҚТАР ҮШІН КЕҢІСТІКТЕГІ ИНТЕГРАЛДЫҚ ГЕОМЕТРИЯ ЕСЕБІ ШЕШІМІНІҢ ЖАЛҒЫЗДЫҒЫ

Т. Б. Ділман, А. А. Абеева, М. С. Серікбол

Қорқыт Ата атындағы Қызылорда мемлекеттік университеті, Қызылорда, Қазақстан

Тірек сөздер: интегралдық геометрия, қисықтар үйірі, интегралдық теңдеу, шешім, жалғыздық.

Аннотация. Мақалада интегралдық геометрия есептерінің келесі класы қарастырылады: белгілі бір қисықтар үйірі бойынша алынған интегралдар арқылы интеграл астындағы функция ізделінеді. Бұл есептер қолданыстағы көптеген есептермен тығыз байланысты. Сейсмикалық барлаудың нәтижелерін түсіндіру мәселесінде Жердің ішкі құрылымын зерттеу үшін оның бетінде бетінде жарылыстар жасалынады. Әрбір жарылыс кезінде арнаулы құралдармен Жер қыртысында пайда болған тербелістер өлшенеді. Зерттеу мақсаты – құралдар көрсеткіштері бойынша сейсмикалық толқындардың таралу заңдылықтарымен байланысты физикалық параметрлерді анықтау. Құрал көрсеткіштерінің негізгі функционалы ретінде сейсмикалық толқындардың келу уақыттары алынады. Сейсмикалық барлаудың нәтижелерін түсіндірудің сызықтандырылған есебі интегралдық геометрия есебі екені белгілі. Рентгендік түсірілімдерді түсіндіріп беру мәселесі қарастырылған интегралдық геометрия есептеріне келтіреді. Пленкадағы қоюлану рентгендік сәуленің қайнар көзінен пленкадағы нүктеге дейінгі алынған жұтылу интегралымен функционалды байланыста болады. Сонымен кеңістіктегі жұтылу коэффициентін анықтау мәселесі келесі интегралдық геометрия есебіне келтіріледі: сәулелер үйірі бойынша алынған интегралдар арқылы интеграл астындағы функцияны табу керек. Мақалада көп өлшемді кеңістіктегі қисықтар үйірі үшін интегралдық геометрия есебі зерттеліп, шешімнің жалғыздығы туралы теорема дәлелденеді.

Поступила 13.01.2016 г.

Publication Ethics and Publication Malpractice
in the journals of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan

For information on Ethics in publishing and Ethical guidelines for journal publication see http://www.elsevier.com/publishingethics and http://www.elsevier.com/journal-authors/ethics.

Submission of an article to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan implies that the described work has not been published previously (except in the form of an abstract or as part of a published lecture or academic thesis or as an electronic preprint, see http://www.elsevier.com/postingpolicy), that it is not under consideration for publication elsewhere, that its publication is approved by all authors and tacitly or explicitly by the responsible authorities where the work was carried out, and that, if accepted, it will not be published elsewhere in the same form, in English or in any other language, including electronically without the written consent of the copyright-holder. In particular, translations into English of papers already published in another language are not accepted.

No other forms of scientific misconduct are allowed, such as plagiarism, falsification, fraudulent data, incorrect interpretation of other works, incorrect citations, etc. The National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan follows the Code of Conduct of the Committee on Publication Ethics (COPE), and follows the COPE Flowcharts for Resolving Cases of Suspected Misconduct (http://publicationethics.org/files/u2/New_Code.pdf). To verify originality, your article may be checked by the Cross Check originality detection service http://www.elsevier.com/editors/plagdetect.

The authors are obliged to participate in peer review process and be ready to provide corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. All authors of a paper should have significantly contributed to the research.

The reviewers should provide objective judgments and should point out relevant published works which are not yet cited. Reviewed articles should be treated confidentially. The reviewers will be chosen in such a way that there is no conflict of interests with respect to the research, the authors and/or the research funders.

The editors have complete responsibility and authority to reject or accept a paper, and they will only accept a paper when reasonably certain. They will preserve anonymity of reviewers and promote publication of corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. The acceptance of a paper automatically implies the copyright transfer to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.

The Editorial Board of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan will monitor and safeguard publishing ethics.

Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайте:

www:nauka-nanrk.kz

http://www.physics-mathematics.kz

Редактор *М. С. Ахметова*
Верстка на компьютере *Д. Н. Калкабековой*

Подписано в печать 16.01.2016.
Формат 60х881/8. Бумага офсетная. Печать – ризограф.
10,7 п.л. Тираж 300. Заказ 1.

Национальная академия наук РК
050010, Алматы, ул. Шевченко, 28, т. 272-13-18, 272-13-19