

ISSN 1991-346X

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ

Х А Б А Р Л А Р Ы

ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА
СЕРИЯСЫ**



СЕРИЯ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ



**PHYSICO-MATHEMATICAL
SERIES**

2 (306)

НАУРЫЗ – СӘУІР 2016 ж.

МАРТ – АПРЕЛЬ 2016 г.

MARCH – APRIL 2016

1963 ЖЫЛДЫҢ ҚАҢТАР АЙЫНАН ШЫҒА БАСТАҒАН
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1963 ГОДА
PUBLISHED SINCE JANUARY 1963

ЖЫЛЫНА 6 РЕТ ШЫҒАДЫ
ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД
PUBLISHED 6 TIMES A YEAR

АЛМАТЫ, ҚР ҰҒА
АЛМАТЫ, НАН РК
ALMATY, NAS RK

Б а с р е д а к т о р

ҚР ҰҒА академигі,

Мұтанов Г. М.

Р е д а к ц и я а л қ а с ы:

физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Әшімов А.А.**; техн. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Байғұнчечков Ж.Ж.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Жұмаділдаев А.С.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Қалменов Т.Ш.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Мұқашев Б.Н.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Өтелбаев М.О.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Тәкібаев Н.Ж.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Харин С.Н.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Әбішев М.Е.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Жантаев Ж.Ш.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Қалимолдаев М.Н.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Косов В.Н.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Мұсабаев Т.А.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Ойнаров Р.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Рамазанов Т.С.** (бас редактордың орынбасары); физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Темірбеков Н.М.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Өмірбаев У.У.**

Р е д а к ц и я к ең е с і:

Украинаның ҰҒА академигі **И.Н. Вишневский** (Украина); Украинаның ҰҒА академигі **А.М. Ковалев** (Украина); Беларусь Республикасының ҰҒА академигі **А.А. Михалевич** (Беларусь); Әзірбайжан ҰҒА академигі **А. Пашаев** (Әзірбайжан); Молдова Республикасының ҰҒА академигі **И. Тигиняну** (Молдова); мед. ғ. докторы, проф. **Иозеф Банас** (Польша)

Главный редактор

академик НАН РК

Г. М. Мутанов

Редакционная коллегия:

доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **А.А. Ашимов**; доктор техн. наук, проф., академик НАН РК **Ж.Ж. Байгунчеков**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **А.С. Джумадильдаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **Т.Ш. Кальменов**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **Б.Н. Мукашев**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **М.О. Отелбаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **Н.Ж. Такибаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **С.Н. Харин**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **М.Е. Абишев**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Ж.Ш. Жантаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **М.Н. Калимолдаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **В.Н. Косов**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Т.А. Мусабаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Р. Ойнаров**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Т.С. Рамазанов** (заместитель главного редактора); доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Н.М. Темирбеков**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **У.У. Умирбаев**

Редакционный совет:

академик НАН Украины **И.Н. Вишневский** (Украина); академик НАН Украины **А.М. Ковалев** (Украина); академик НАН Республики Беларусь **А.А. Михалевич** (Беларусь); академик НАН Азербайджанской Республики **А. Пашаев** (Азербайджан); академик НАН Республики Молдова **И. Тигиняну** (Молдова); д. мед. н., проф. **Иозеф Банас** (Польша)

«Известия НАН РК. Серия физико-математическая». ISSN 1991-346X

Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы)

Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации и архивов Министерства культуры и информации Республики Казахстан №5543-Ж, выданное 01.06.2006 г.

Периодичность: 6 раз в год.

Тираж: 300 экземпляров.

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, ком. 219, 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,

www.nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

© Национальная академия наук Республики Казахстан, 2016

Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75.

Editor in chief

G. M. Mutanov,
academician of NAS RK

Editorial board:

A.A. Ashimov, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **Zh.Zh. Baigunchekov**, dr. eng. sc., prof., academician of NAS RK; **A.S. Dzhumadildayev**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **T.S. Kalmenov**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **B.N. Mukhashev**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **M.O. Otelbayev**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **N.Zh. Takibayev**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **S.N. Kharin**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **M.Ye. Abishev**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **Zh.Sh. Zhantayev**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **M.N. Kalimoldayev**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **V.N. Kosov**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **T.A. Mussabayev**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **R. Oinarov**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **T.S. Ramazanov**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK (deputy editor); **N.M. Temirbekov**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **U.U. Umirbayev**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK

Editorial staff:

I.N. Vishnievski, NAS Ukraine academician (Ukraine); **A.M. Kovalev**, NAS Ukraine academician (Ukraine); **A.A. Mikhalevich**, NAS Belarus academician (Belarus); **A. Pashayev**, NAS Azerbaijan academician (Azerbaijan); **I. Tighineanu**, NAS Moldova academician (Moldova); **Joseph Banas**, prof. (Poland).

News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physical-mathematical series.
ISSN 1991-346X

Owner: RPA "National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan" (Almaty)

The certificate of registration of a periodic printed publication in the Committee of information and archives of the Ministry of culture and information of the Republic of Kazakhstan N 5543-Ж, issued 01.06.2006

Periodicity: 6 times a year

Circulation: 300 copies

Editorial address: 28, Shevchenko str., of. 219, 220, Almaty, 050010, tel. 272-13-19, 272-13-18,
www.nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

© National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, 2016

Address of printing house: ST "Aruna", 75, Muratbayev str, Almaty

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 306 (2016), 153–158

ON AN INEQUALITY FOR SCHATTEN p -NORMS

D.Suragan

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling
Almaty, Kazakhstan

suragan@list.ru

Keywords: singular values, Schatten classes, Simon's conjecture.**Abstract.** In this note, we prove an abstract inequality for Schatten p -norm of compact operators. Our result gives an answer to B. Simon's conjecture on Schatten p -norm domination of integral operators in terms of completely monotonic functions.**Introduction**

Let H be a separable Hilbert space. We denote the class of compact operators $P : H \rightarrow H$ by $S^\infty(H)$. Recall that the singular values $\{s_n\}$ of $P \in S^\infty(H)$ are the eigenvalues of the positive operator $(P^*P)^{1/2}$ (see e.g. Gohberg and Krein [7]). The Schatten p -classes are defined as

$$S^p(H) := \{P \in S^\infty(H) : \{s_n\} \in \ell^p\}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

In $S^p(H)$ the Schatten p -norm of the operator P is defined as

$$\|P\|_p := \left(\sum_{n=1}^{\infty} s_n^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty. \quad (1.1)$$

For $p = \infty$, we can set

$$\|P\|_\infty := \|P\|$$

to be the operator norm of P on H . In B. Simon's Trace ideals and their applications book (p. 24, [17]), there are formulated two conjectures related to Schatten p -norm dominations. In Theorem 2.13 ([17], the first edition of the book was published in 1979) it is shown that the abstract notion of domination implies the Schatten p -norms of even integer order satisfy a domination inequality. And the first conjecture was that Theorem 2.13 is valid for not only even integer order, but also it is valid for all Schatten p -norms. However, Peller [18] has shown, using Hankel operators, that this conjecture is wrong; see Addendum E in the book [17]. Our main result (2.1) gives an answer to B. Simon's second conjecture on Schatten p -norm domination of integral operators in terms of completely monotonic functions.

B. Simon's conjecture: If f^* is the symmetric decreasing rearrangement of f , then for $p \geq 2$, the Schatten p -norm of the operator with kernel $f^*(x-y)g^*(y)$ dominates the Schatten p -norm of the one with kernel $f(x-y)g(y)$.

The positivity of a certain inverse Laplace transform and properties of completely monotonic functions play a key role in our proof. A function F is said to be completely monotonic in $(0, \infty)$, if F has derivatives of all orders and satisfies

$$(-1)^k F^k(\zeta) \geq 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.2)$$

for all $\zeta > 0$. If the function F can be extended to be continuous at $\zeta = 0$ it is said to be completely monotonic in $[0, \infty)$. The definition of a completely monotonic function was introduced by F. Hausdorff [8]. In his work these functions were called as 'total monotonic' functions. Later Bernstein proved (Bernstein's theorem) that F is completely monotonic if and only if it has the representation

$$F(\zeta) = \int_0^\infty e^{-\zeta t} d\mu(t),$$

where $\mu(t)$ is a nonnegative measure on $[0, \infty)$ such that the integral converges for all $\zeta > 0$. Dubourdieu [5] proved that if a completely monotonic function F is not a constant then strict inequality holds in (1.2). For more discussions on completely monotonic functions we refer [6] and references therein.

In Section (2) we present the main result of this paper. Its proof will be given in Section (3).

Main result and examples.

As outlined in the introduction, let H be a separable Hilbert space. Let A, B operators belong to the Schatten class $S^q(H)$. Define the function

$$F_{AB}(\zeta) := \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{\mu_j^{q-1}(A)(\mu_j(A) + \zeta)} - \frac{1}{\mu_j^{q-1}(B)(\mu_j(B) + \zeta)}, \quad \zeta \geq 0,$$

where $\mu_j(A)$ and $\mu_j(B)$ are the inverses of the j th singular values of operators A and B , respectively. Clearly, the function F_{AB} is analytic in $[0, \infty)$.

Theorem 2.1. *Let $A, B \in S^q(H)$. If the function F_{AB} is completely monotonic in $[0, \infty)$, then*

$$\|A\|_p \geq \|B\|_p \quad (2.1)$$

for all $p \geq q$.

Let us take

$$Au := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)u(y)dy,$$

$$Bu := \int_{\mathbb{R}^d} f^*(x-y)g^*(y)u(y)dy.$$

Then from Theorem 2.1 we see that B. Simon's conjecture is correct for any Schatten p -class if the corresponding F_{AB} function is completely monotonic. Obviously, an essential question is: How can we check that the function F_{AB} is completely monotonic? An answer depends on the formula of F_{AB} . One may use Bernstein's theorem as we mentioned in the introduction. However, this theorem is not always applicable. Therefore, one might choose other methods (cf. [11]). Let f be strictly symmetric decreasing

function, that is, the function $f(|x|)$ is a real, positive and decreasing, i.e. that the function $f : [0, \infty] \rightarrow R$ satisfies

$$f(\rho) > 0 \quad \text{for any } \rho \geq 0, \tag{2.2}$$

and

$$f(\rho_1) > f(\rho_2) \quad \text{if } \rho_1 < \rho_2, \tag{2.3}$$

let g be a characteristic function of Euclidean domain $\Omega \subset R^d$ i.e.

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{2.4}$$

This implies that f and g do not change their formulae under the symmetric-decreasing rearrangement, see e.g. Lieb and Loss [10]. Therefore, we have

$$Au := \int_{\Omega} f(|x - y|)u(y)dy,$$

$$Bu := \int_{\Omega^*} f(|x - y|)u(y)dy,$$

where Ω^* is the symmetric rearrangement of Ω , that is, Ω^* is a centred ball with $|\Omega^*| = |\Omega|$. Here by $|\Omega|$ we denote the Lebesgue measure of Ω .

If one shows that F_{AB} is completely monotonic, then in this special case B. Simon's conjecture is correct.

Here we give some related examples for further motivations. In a bounded open domain $\Omega \subset R^3$ let us consider the Newton potential on $L^2(\Omega)$ as an example, i.e. let

$$N_{\Omega}f(x) := \int_{\Omega} \frac{1}{4\pi|x - y|} f(y)dy, \quad f \in L^2(\Omega), \tag{2.5}$$

where $|x - y|$ is the standard Euclidian distance between x and y . Note that the operator N_{Ω} is the inverse to the Laplacian (see [9]). It is not difficult to show that the Newton potential operator is a Hilbert-Schmidt operator. It can be also followed from the properties of the N_{Ω} operator kernel see e.g. the criteria for Schatten classes in terms of the regularity of the kernel in [4]. We obtain:

Example 2.2 [13] *Let $B \equiv U$ be the unit 3-ball. Then by Theorem (2.1) we have*

$$\|N_{\Omega}\|_p \leq \|N_U\|_p = \left(\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2l+1}{j_{l-\frac{1}{2},m}^{2p}} \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{2.6}$$

for any integer $2 \leq p < \infty$ and any bounded open domain Ω with $|\Omega| = |U|$. Here j_{km} denotes the m^{th} positive zero of the Bessel function J_k of the first kind of order k .

Example 2.3 [13] Let $B \equiv U$ be the unit 3-ball. In particular, for the Hilbert-Schmidt norm we have

$$\|N_\Omega\|_2 \leq \|N_U\|_2 = \sqrt{\frac{7}{48}}, \quad (2.7)$$

for any bounded open domain Ω with $|\Omega|=|U|$.

The above examples justify the constants for the Newton potential that were also announced in [15]. We omit the routine technical calculation.

Lemma 3.1. *If the function F_{AB} is completely monotonic in $[0, \infty)$, then*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-\mu_j(A)t}}{\mu_j^{p-1}(A)} \geq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-\mu_j(B)t}}{\mu_j^{p-1}(B)}, \quad \forall t > 0, \quad (3.1)$$

for any $p \geq q$

Proof of Lemma (3.1). Since F_{AB} is completely monotonic it is non-negative, that is,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_j^{q-1}(A)(\mu_j(A) + \zeta)} \geq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_j^{q-1}(B)(\mu_j(B) + \zeta)} \quad (3.2)$$

for all $\zeta \geq 0$.

Let L be the Laplace transform

$$L\{f(t)\}(\zeta) = \int_0^{\infty} e^{-\zeta t} f(t) dt.$$

Using the inverse Laplace transform (exponential decay) we have

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{\mu_j + \zeta}\right\} = e^{-\mu_j t}, \quad t > 0. \quad (3.3)$$

for $\zeta > -\mu_j$. By applying L^{-1} to both sides of (3.2) we obtain (3.1) (see Lemma (3.3)).

One might have a question concerning the proof of Lemma (3.1), that is, why does the inverse Laplace transform preserve the inequality (3.1)? In other words, why is the inverse Laplace transform of a positive function positive? Of course, this is not true in general. However, for the Laplace transform

$$L\{f(t)\}(\zeta) = \int_0^{\infty} e^{-\zeta t} f(t) dt,$$

the inverse Laplace transform of a positive function is positive for some classes of functions, that is, the following theorem is valid (see Theorem 2.3 in [3]).

Theorem 3.2 [3] *Let f be a continuous function on the interval $[0, \infty)$ which is of exponential order, that is, for some $b \in \mathbb{R}$ it satisfies*

$$\sup_{t>0} \frac{|f(t)|}{e^{bt}} < \infty,$$

and let $F = Lf$. Then f is non-negative if and only if

$$(-1)^k F^{(k)}(s) \geq 0 \quad \text{for all } k \geq 0 \text{ and all } s > b. \quad (3.4)$$

In fact this positivity result implies directly from Post's inversion formula [12]

$$f(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{k}{t}\right)^{k+1} F_1^{(k)}\left(\frac{k}{t}\right) \quad (3.5)$$

for $t > 0$. If (3.4) is valid then the expression on the right hand side of (3.5) is non-negative. Therefore, the limit $f(t)$ is necessarily non-negative for all t .

Lemma 3.3 *The inverse Laplace transform preserves the inequality (3.2).*

Proof of Lemma 3.3. In our case we have

$$F(\zeta) = F_{AB}(\zeta) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|\mu_j(B)|^{p-1} (|\mu_j(B)| + \zeta)} - \frac{1}{|\mu_j(\Omega)|^{p-1} (|\mu_j(\Omega)| + \zeta)}, \zeta \geq 0.$$

To show positivity of $f(t)$ it is sufficient to check the conditions (3.4) for F_{AB} . By definition of a completely monotonic function we have

$$0 \leq (-1)^{(k)} F_{AB}^{(k)}(\zeta), k = 0, 1, 2, \dots,$$

for all $\zeta > 0$, which proves the positivity of f (by Theorem (3.2)), that is, $f(t) \geq 0$ for all $t > 0$. This confirms that the inverse Laplace transform preserves the inequality (3.2).

Proof of Theorem 2.1. The proof of Theorem 2.1 now follows directly from Lemma 3.1. Applying the Mellin transform

$$\frac{1}{\mu_j^l} = \frac{1}{\Gamma(l)} \int_0^{\infty} \exp(-\mu_j t) t^{l-1} dt, \quad \text{for any real } l > 1,$$

to the inequality (3.1) leads to

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_j^{q-1+l}(A)} \geq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_j^{q-1+l}(B)} \quad (3.6)$$

for any real $l > 1$. Then since l is arbitrary real number > 1 , from (3.6) we obtain

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_j^p(A)} \geq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_j^p(B)} \quad (3.7)$$

for any real $p > q$. In addition, from (3.2) when $\zeta = 0$ we get that the inequality is also true when $p = q$. This completes the proof of Theorem 2.1.

REFERENCES

- [1] H. J. Brascamp, E. H. Lieb, and J. M. Luttinger. A general rearrangement inequality for multiple integrals. *J. Funct. Anal.*, 17:227-237, 1974.
- [2] S.N. Bernstein. Sur les fonctions absolument monotones. *Acta Mathematica*, 52:1-66, 1928.
- [3] K. M. Bryan. Elementary inversion of the Laplace transform. Mathematical Sciences Technical Reports (MSTR). Paper 114, 1999. http://scholar.rose-hulman.edu/math_mstr/114.
- [4] J. Delgado and M. Ruzhansky. Schatten classes on compact manifolds: kernel conditions. *J. Funct. Anal.*, 267(3):772-798, 2014.
- [5] J. Dubourdieu. Sur un th eor eme de M.S. Bernstein relatif a la transformation de Laplace-Stieltjes. *Compositio Math.*, 7:96-111, 1939.
- [6] A.Z. Grinshpan and E.H. Ismail. Completely monotonic functions involving the gamma and q-gamma functions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 134(4):1153-1160, 2006.
- [7] I. C. Gohberg and M. G. Krein. *Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators*. Translated from the Russian by A. Feinstein. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 18. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1969.
- [8] F. Hausdorff. Summationionsmethoden und Momentfolgen I. *Math. Z.*, 9:74-109, 1921.
- [9] T. Sh. Kal'menov and D. Suragan. To spectral problems for the volume potential. *Doklady Mathematics*, 80(2):646-649, 2009.

- [10] E. H. Lieb and M. Loss. *Analysis*, volume 14 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2001.
- [11] H. Pollard. A new criterion for completely monotonic functions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 55(3):457-464, 1944.
- [12] E. Post. Generalized Differentiation. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 32:723-781, 1930.
- [13] M. Ruzhansky and D. Suragan. On Schatten norms of intergral operators of convolution type. *to appear in Russian Math. Surveys*, 2016.
- [14] M. Ruzhansky and D. Suragan. Isoperimetric inequalities for the logarithmic potential operator. *J. Math. Anal. Appl.*, 434(2):1676-1689, 2016.
- [15] G. Rozenblum, M. Ruzhansky and D. Suragan. Isoperimetric inequalities for Schatten norms of Riesz potentials. *arXiv:1506.06355*, 2015.
- [16] B. Simon. Analysis with weak trace ideals and the number of bound states of Schrodinger operators. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 224(2):367-380, 1976.
- [17] B. Simon. *Trace ideals and their applications*, Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 120, AMS, 2005.
- [18] V. V. Peller. A description of Hankel operators of class σ_p for $p > 0$, an investigation of the rate of rational approximation, and other applications. *Mat. Sb. (N.S.)*, 122(164):481-510, 1983.

ШАТТЕН p -НОРМАСЫ ҮШІН БІР ТЕҢСІЗДІК ТУРАЛЫ

Д. Сураган

ҚР БҒМ Математика және математикалық моделдеу институты, Алматы қ.

Түйін сөздер: сингулярлық мәндер, Шаттен классы, Саймонның гипотезасы.

Аннотация. Бұл жұмыста Шаттен p -нормасы үшін абстрактті теңсіздікті дәлелдедік. Бұл жұмыс Б.Саймонның гипотезасына толықтай монотондық функциялар мағынасындағы интегралдық операторлардың басыңқысын Шаттен p -нормасы үшін жауап береді.

ОБ ОДНОМ НЕРАВЕНСТВЕ p -НОРМЫ В КЛАССЕ ШАТТЕНА

Д. Сураган

Институт математики и математического моделирования МОН РК, г. Алматы

Ключевые слова: сингулярные значения, Шаттен классы, гипотеза Саймона.

Аннотация. В статье авторы доказывают абстрактное неравенство для p -норм в классе Шаттена для компактного оператора.

Поступила 13.03.2016 г.

МАЗМҰНЫ

Теориялық және тәжірибелік зерттеулер

<i>Буртебаев Н., Дүйсебаев А., Керимкулов Ж.К., Алимов Д.К., Юшков А.В., Жолдыбаев Т.К., Садықов Б., Мухамеджанов Е.С., Джансейтов Д.М., Сакута С.Б.</i> 50 және 60 МэВ энергиялы ^3He иондарының ^{14}N ядроларынан серпімді шашырауын зерттеу.....	5
<i>Алтынбеков Ш.</i> Өртекті топырақ консолидациясының бірөлшемді квазисызықты есебін напордың бастапқы градиенті әсерінде шешу әдісі туралы және оның шөгуді анықтау.....	10
<i>Асқарова А.С., Болегенова С.А., Болегенова С.А., Максимов В.Ю., Ергалиева А.Б., Габитова З.Х., Боранбаева А.Е.</i> 3-D Модельдеу әдістерімен жану процесіне көмірдің ылғалдылығының зиянын зерттеу.....	21
<i>Асқарова Ә.С., Болегенова С.Ә., Болегенова С.Ә., Максимов В.Ю., Бекетаева М.Т.</i> ЖЭС жану камерасында көмірдің жануы кезінде NO_x түзілуі мен жойылуын екі кинетикалық механизм бойынша сандық моделдеу.....	29
<i>Асқарова Ә.С., Болегенова С.Ә., Болегенова С.Ә., Максимов В.Ю., Бекетаева М.Т.</i> Жану камерасының қабырға температурасы үшін берілген шекаралық шартының жану процесінің температуралық сипаттамаларына әсерін зерттеу.....	35
<i>Асқарова Ә., Болегенова С., Гороховский М., Оспанова Ш., Нұғьманова А., Утелов С.</i> Өр түрлі сұйық отындардың бүрку, тұтану және жану процестерін зерттеу	40
<i>Сапрыгина М.Б., Байсейтова У.С., Шалданбаев А.Ш., Оразов И.О.</i> Толқын теңдеуінің шартарапты есебінің тұрлауы шешілуі туралы.....	48
<i>Буртебаев Н., Керимкулов Ж.К., Демьянова А.С., Данилов А.Н., Джансейтов Д.М., Жолдыбаев Т.К., Алимов Д.К.</i> Оптикалық және фолдинг модельдер АЯСЫНДА 50 және 60 МЭВ энергияларда ^3He иондарының ^{13}C ядроларында серпімді шашырау процесстерін зерттеу.....	55
<i>Жұмбаев Д.С., Бакирова Э.А.</i> Импульс әсері бар фредгольм интегралдық- дифференциалдық теңдеулер үшін сызықты шеттік есептің бірімәнді шешілімділігінің коэффициенттік белгілері	61
<i>Өтебаев Ұ.Б., Есентаев Қ.Ө., Дархан Н.Д.</i> WEB -формалар құрудың технологиялары.....	72
<i>Жунусова Л.Х., Жунусов К.Х.</i> Тор теңдеулерінің итерациялық әдіспен шығару.....	79
<i>Қабылбеков К.А., Саидахметов П.А., Омаишова Г.Ш., Серикбаева Г.С., Сүйерқұлова Ж.Н.</i> Еркін механикалық тербелістерді зерттеуге арналған компьютерлік зертханалық жұмысты ұйымдастырудың бланкі үлгісі.....	84
<i>Қабылбеков К.А., Саидахметов П.А., Омаишова Г.Ш., Сүттібаева Д.И., Қозыбақова Г.Н.</i> Изобаралық процесті зерттеуге арналған компьютерлік зертханалық жұмысты ұйымдастырудың бланкі үлгісі.....	92
<i>Қабылбеков К.А., Омаишова Г.Ш., Саидахметов П.А., Нұрұллаев М.А., Артыгалин Н.А.</i> Карно циклімен жұмыс атқаратын қозғалтқышты зерттеуге арналған компьютерлік зертханалық жұмысты ұйымдастырудың бланкі үлгісі.....	98
<i>Түгелбаева Г.Т., Канибекова А. Е.</i> Білім негіздерін физика сабақтарына енгізу әдісін жүйелік талдау.....	104
<i>Қойишева Т.К., Қожамқұлова Ж.Ж., Базарбаева А.И., Бегимбетова Х.А.</i> Объектіге-бағытталған жүйе болашақ маманның ақпараттық-логикалық құзыреттілігін қалыптастыру факторы ретінде.....	108
<i>Қойишева Т.К., Байтерекова А.И., Салғараева М.И.</i> Болашақ мұғалімдерді кәсіби дайындауда қолданылатын объектілі-бағдарлы жобалаудың теориялық негіздері.....	116
<i>Литвиненко Н.</i> Бағдарламалық R ортаның C# ортасына біріктірілуі.....	123
<i>Мақышов С.</i> Тұрақты м-туындаған сандар.....	128
<i>Минглибаев М.Ж., Прокопья А.Н., Бекетауов Б.А.</i> Массалары айнымалы шектелген үш дене мәселесінің эволюциялық теңдеуінің нақты шешімдері.....	133
<i>Орынбаев С.А., Молдахметов С.С., Байбутанов Б.К., Ешметов М.Б., Ауесжанов Д.С.</i> Жазықтық-импульстік модуляция негізінде көпдеңгейлі инвертор сатыларының қосылу әдістемелерін зерттеу	139
<i>Сапрыгина М.Б., Шалданбаев А.Ш., Оразов И.О., Байсейтова У.С.</i> Толқын теңдеуінің шартарапты есебінің вөлтерлі болуының үзілді – кесілді шарты.....	147
<i>Сураган Д.</i> Шаттен р-нормасы үшін бір теңсіздік туралы	153
<i>Темирбеков Н.М., Тураров А.К.</i> Газлифт үрдісінің бір өлшемді моделінің сандық шешімі	159
<i>Ахметова С.Т., Шалданбаев А.Ш., Шомабаева М.Т.</i> Аргументі ауытқыған жылу теңдеуінің шекаралық коши-нейман есебіне сәйкес оператордың спектрінің құрамы туралы.....	169
<i>Шомабаева М.Т., Шалданбаев А.Ш., Ахметова С.Т.</i> Аргументі ауытқыған жылу теңдеуінің жарталай бекітілген шекаралық есебіне сәйкес оператордың үзіксіз спектрі туралы	180
<i>Ұлағатты ұстаз туралы. Шерәлі Біләл.</i>	191

СОДЕРЖАНИЕ

Теоретические и экспериментальные исследования

<i>Буртебаев Н., Дуйсебаев А., Керимкулов Ж.К., Алимов Д.К., Юшков А.В., Жолдыбаев Т.К., Садыков Б., Мухамеджанов Е.С., Джансейтов Д.М., Сакута С.Б.</i> Исследование упругого рассеяния ионов ^3He на ядрах ^{14}N при энергиях 50 и 60 МэВ.....	5
<i>Алтынбеков Ш.</i> О методике решения одномерной квазилинейной задачи консолидации неоднородного грунта с учетом начального градиента напора и определение его осадка.....	10
<i>Аскарова А.С., Болегенова С.А., Болегенова С.А., Максимов В.Ю., Ергалиева А.Б., Габитова З.Х., Боранбаева А.Е.</i> Исследование влияния влажности угля на процесс горения методами 3-d моделирования.....	21
<i>Аскарова А.С., Болегенова С.А., Болегенова С.А., Максимов В.Ю., Бекетаева М.Т.</i> Численное моделирование образования и разложения NO_x по двум кинетическим механизмам при горении угольного топлива в топочной камере ТЭЦ.....	29
<i>Аскарова А.С., Болегенова С.А., Болегенова С.А., Максимов В.Ю., Бекетаева М.Т.</i> Исследование влияния граничного условия для температуры на стенках топочной камеры на температурные характеристики процесса горения.....	35
<i>Аскарова А., Болегенова С., Гороховский М., Оспанова Ш., Нугьманова А., Утелов С.</i> Исследование процессов распыла, воспламенения и горения различного вида жидкого топлива.....	40
<i>Сапрыгина М.Б., Байсейтова У.С., Шалданбаев А.Ш., Оразов И.О.</i> Толкын тендеуінің шартарапты есебінің тұрлаулы шешілуі туралы.....	48
<i>Буртебаев Н., Керимкулов Ж.К., Демьянова А.С., Данилов А.Н., Джансейтов Д.М., Жолдыбаев Т.К., Алимов Д.К.</i> Исследование процессов упругого рассеяния ионов ^3He на ядрах ^{13}C при энергиях 50 и 60 МэВ в рамках оптического и фолдинг моделей.....	55
<i>Джумабаев Д.С., Бакирова Э.А.</i> Коэффициентные признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для интегро-дифференциальных уравнений фредгольма с импульсными воздействиями.....	61
<i>Утебаев У.Б., Есентаев К.У., Дархан Н.Д.</i> Технология создания web-форм.....	72
<i>Жунусова Л.Х., Жунусов К.Х.</i> Итерационные методы решения сеточных уравнений.....	79
<i>Кабылбеков К.А., Саидахметов П.А., Омашова Г.Ш., Серикбаева Г.С., Суйеркулова Ж.Н.</i> Модель бланка организации компьютерной лабораторной работы по исследованию свободных механических колебаний.....	84
<i>Кабылбеков К.А., Саидахметов П.А., Омашова Г.Ш., Суттибаева Д.И., Козыбакова Г.Н.</i> Модель бланка организации компьютерной лабораторной работы по исследованию изобарического процесса.....	92
<i>Кабылбеков К.А., Омашова Г.Ш., Саидахметов П.А., Нураллаев М.А., Артыгалин Н.А.</i> Модель бланка организации компьютерной лабораторной работы по исследованию двигателя, совершающего цикл Карно.....	98
<i>Түгелбаева Г.Т., Канибекова А. Е.</i> Системное обсуждение способов внедрения в уроки по физике основ знаний по экологии.....	104
<i>Койшиева Т.К., Кожамкулова Ж.Ж., Базарбаева А.И., Бегимбетова Х.А.</i> Объектно-ориентированные системы как фактор формирования информационно-логической компетентности будущих специалистов.....	108
<i>Койшиева Т.К., Байтерекова А.И., Салгараева М.И.</i> Теоретические основы объектно-ориентированного проектирования, применимые для профессиональной подготовки будущих учителей.....	116
<i>Литвиненко Н.</i> Интеграция программной среды R в среду C#.....	123
<i>Макышов С.</i> Неподвижные m-порожденные числа.....	128
<i>Минглибаев М.Ж., Прокопья А.Н., Бекетауов Б.А.</i> Точные решения эволюционных уравнений в ограниченной задаче трех тел с переменными массами.....	133
<i>Орынбаев С.А., Молдахметов С.С., Байбутанов Б.К., Ешметов М.Б., Ауесжанов Д.С.</i> Исследование методик коммутации ступеней многоуровневого инвертора на основе широтно-импульсной модуляции.....	139
<i>Сапрыгина М.Б., Шалданбаев А.Ш., Оразов И.О., Байсейтова У.С.</i> Критерии вольтерровости нелокальной краевой задачи волнового уравнения.....	147
<i>Сураган Д.</i> Об одном неравенстве p-нормы в классе Шаттена.....	153
<i>Темірбеков Н. М., Тураров А. К.</i> Численное решение одномерной модели газлифтного процесса.....	159
<i>Ахметова С.Т., Шалданбаев А.Ш., Шомабаева М.Т.</i> О структуре спектра краевой задачи Коши-неймана для уравнения теплопроводности с отклоняющимся аргументом.....	169
<i>Шомабаева М.Т., Шалданбаев А.Ш., Ахметова С.Т.</i> О непрерывном спектре оператора полужакопленной краевой задачи для уравнения теплопроводности с отклоняющимся аргументом.....	180
<i>Юбилей Ашуралиев Аллаберен</i>	191

CONTENTS

Theoretical and experimental researches

<i>Burtebayev N., Duisebayev A., Kerimkulov Zh.K., Alimov D.K., Yushkov A.V., Zholdybayev T.K., Sadikov B., Mukhamejanov Y.S., Janseitov D.M., Sakuta S.B.</i> Investigation of the elastic scattering of ^3He ions on ^{14}N at energies 50 and 60 MeV.....	5
<i>Altynbekov Sh.</i> On the method of solving one-dimensional quasilinear problem of consolidation of non homogeneous soil with the initial gradient of pressure and determination of its sediment.....	10
<i>Askarova. A., Bolegenova S., Bolegenova S., Maximov V., Yergaliyeva A., Gabitova Z., Boranbaeva A.</i> Study of coal moisture on the combustion process by 3d modeling.....	21
<i>Askarova A.S., Bolegenova S.A., Bolegenova S.A., Maximov V.Yu., Beketayeva M.T.</i> Numerical modeling of formation and destruction of NO_x by TWO kinetic mechanisms during combustion of fossil fuel in the furnace of CHP.....	29
<i>Askarova A.S., Bolegenova S.A., Bolegenova S.A., Maximov V.Yu., Beketayeva M.T.</i> Study of the boundary conditions influence for the temperature on the walls of the combustion chamber in the temperature characteristics of the burning process.....	35
<i>Askarova A., Bolegenova S., Gorokhovski M., Ospanova Sh., Nugymanova A., Utelov S.</i> Investigation of atomization, ignition and combustion processes of different types of liquid fuel.....	40
<i>Saprygina M.B., Bayseytova U.S., Shaldanbayev A.Sh., Orazov I.O.</i> About regular resolvability of nonlocal boundary value problem of the wave equation.....	48
<i>Burtebayev N., Kerimkulov Zh.K., Demyanova A.S., Danilov A.N., Janseitov D.M., Zholdybayev T.K., Alimov D.K.</i> Investigation of elastic scattering of ^3He ions from ^{13}C nuclei at 50 and 60 MeV in optical and folding model.....	55
<i>Dzhumabaev D.S., Bakirova E.A.</i> Coefficient conditions for the unique solvability of linear boundary value problem for fredholm integro-differential equation with impulse effects.....	61
<i>Utebaev U.B., Yessentayev K.U., Darkhan N.D.</i> Technology of creation of web-form.....	72
<i>Zhunussova L., Zhunussov K.</i> Iterative methods for solving difference equations.....	79
<i>Kabyrbekov K.A., Saidakhmetov P.A., Omashova G.SH., Serikbaeva G.S., Suyerkulova ZH.N.</i> Model of the form of the organisation of computer laboratory operation of the free mechanical oscillations.....	84
<i>Kabyrbekov K.A., Saidakhmetov P.A., Omashova G.SH., Suttibaeva D.I., Kozybakova G.N.</i> Model of the form of the organisation of computer laboratory operation of isobaric process.....	92
<i>Kabyrbekov K.A., Omashova G.SH., Saidakhmetov P.A., Nurullaev M.A., Artygalin N.A.</i> Model of the form of the organization of computer laboratory operation on examination of the drive making the carnot cycle.....	98
<i>Tygelbaeva G.T., Kanibekova A. E.</i> System discussion of methods of introduction in lessons on physics bases of knowledge on ecology.....	104
<i>Koishieva T.K., Kozhamkulova Zh.Zh., Bazarbaeva A.I., Begimbetova A.</i> Object-oriented system as the factor of formation of information-logical competence of future professionals.....	108
<i>Koishieva T.K., Baiterekova A.I., Salgaraeva M.I.</i> Theoretical bases of object-oriented design, applicable for vocational training of future teachers.....	116
<i>Litvinenko N.</i> Integration of R software environment in C# software environment.....	123
<i>Makyshov S.</i> Stationary m-digitaddition numbers.....	128
<i>Minglibayev M.Dzh., Prokopenya A.N., Beketauov B.A.</i> Exact solutions of evolution equations in restricted three-body problem with variable mass.....	133
<i>Orynbayev S.A., Moldakhmetov S.S., Baibutanov B.K., Jeshmetov M.B., Aueszhanov D.S.</i> Methods of switching angles based on pulse width modulation for multilevel inverter.....	139
<i>Saprygina M.B., Shaldanbayev A.Sh., Orazov I.O., Bayseytova U.S.</i> Criteria Volterra of nonlocal boundary value problem of the wave equation.....	147
<i>Suragan D.</i> On an inequality for schatten P -norms.....	153
<i>Temirbekov N. M., Turarov A. K.</i> Numerical solution of the one dimensional model of gas-lift process.....	159
<i>Achmetova S.T., Shaldanbayev A.Sh., Shomabayeva M. T.</i> About structure of the range of the regional task of cauchy - neumann for the heat conductivity equation with the deviating argument.....	169
<i>Shomanbayeva M. T., Shaldanbayev A.Sh., Achmetova S.T.</i> About the continuous range of the operator of the semi-fixed regional task for the heat conductivity equation with the deviating argument.....	180
Anniversary of Ashuraliev Allaberen.....	191

**Publication Ethics and Publication Malpractice
in the journals of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan**

For information on Ethics in publishing and Ethical guidelines for journal publication see <http://www.elsevier.com/publishingethics> and <http://www.elsevier.com/journal-authors/ethics>.

Submission of an article to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan implies that the described work has not been published previously (except in the form of an abstract or as part of a published lecture or academic thesis or as an electronic preprint, see <http://www.elsevier.com/postingpolicy>), that it is not under consideration for publication elsewhere, that its publication is approved by all authors and tacitly or explicitly by the responsible authorities where the work was carried out, and that, if accepted, it will not be published elsewhere in the same form, in English or in any other language, including electronically without the written consent of the copyright-holder. In particular, translations into English of papers already published in another language are not accepted.

No other forms of scientific misconduct are allowed, such as plagiarism, falsification, fraudulent data, incorrect interpretation of other works, incorrect citations, etc. The National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan follows the Code of Conduct of the Committee on Publication Ethics (COPE), and follows the COPE Flowcharts for Resolving Cases of Suspected Misconduct (http://publicationethics.org/files/u2/New_Code.pdf). To verify originality, your article may be checked by the Cross Check originality detection service <http://www.elsevier.com/editors/plagdetect>.

The authors are obliged to participate in peer review process and be ready to provide corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. All authors of a paper should have significantly contributed to the research.

The reviewers should provide objective judgments and should point out relevant published works which are not yet cited. Reviewed articles should be treated confidentially. The reviewers will be chosen in such a way that there is no conflict of interests with respect to the research, the authors and/or the research funders.

The editors have complete responsibility and authority to reject or accept a paper, and they will only accept a paper when reasonably certain. They will preserve anonymity of reviewers and promote publication of corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. The acceptance of a paper automatically implies the copyright transfer to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.

The Editorial Board of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan will monitor and safeguard publishing ethics.

Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайте:

www.nauka-nanrk.kz

<http://www.physics-mathematics.kz>

Редактор *М. С. Ахметова*

Верстка на компьютере *А.М. Кульгинбаевой*

Подписано в печать 24.03.2016.

Формат 60x881/8. Бумага офсетная. Печать – ризограф.

11,3 п.л. Тираж 300. Заказ 2.