

ISSN 1991-346X

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ  
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ

# Х А Б А Р Л А Р Ы

---

---

## ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК  
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES  
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА  
СЕРИЯСЫ**



**СЕРИЯ**

**ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ**



**PHYSICO-MATHEMATICAL  
SERIES**

**2 (306)**

**НАУРЫЗ – СӘУІР 2016 ж.**

**МАРТ – АПРЕЛЬ 2016 г.**

**MARCH – APRIL 2016**

1963 ЖЫЛДЫҢ ҚАҢТАР АЙЫНАН ШЫҒА БАСТАҒАН  
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1963 ГОДА  
PUBLISHED SINCE JANUARY 1963

ЖЫЛЫНА 6 РЕТ ШЫҒАДЫ  
ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД  
PUBLISHED 6 TIMES A YEAR

АЛМАТЫ, ҚР ҰҒА  
АЛМАТЫ, НАН РК  
ALMATY, NAS RK

Б а с р е д а к т о р

ҚР ҰҒА академигі,

**Мұтанов Г. М.**

Р е д а к ц и я а л қ а с ы:

физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Әшімов А.А.**; техн. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Байғұнчеков Ж.Ж.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Жұмаділдаев А.С.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Қалменов Т.Ш.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Мұқашев Б.Н.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Өтелбаев М.О.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Тәкібаев Н.Ж.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Харин С.Н.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Әбішев М.Е.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Жантаев Ж.Ш.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Қалимолдаев М.Н.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Косов В.Н.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Мұсабаев Т.А.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Ойнаров Р.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Рамазанов Т.С.** (бас редактордың орынбасары); физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Темірбеков Н.М.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Өмірбаев У.У.**

Р е д а к ц и я к ең е с і:

Украинаның ҰҒА академигі **И.Н. Вишневский** (Украина); Украинаның ҰҒА академигі **А.М. Ковалев** (Украина); Беларусь Республикасының ҰҒА академигі **А.А. Михалевич** (Беларусь); Әзірбайжан ҰҒА академигі **А. Пашаев** (Әзірбайжан); Молдова Республикасының ҰҒА академигі **И. Тигиняну** (Молдова); мед. ғ. докторы, проф. **Иозеф Банас** (Польша)

Главный редактор

академик НАН РК

**Г. М. Мутанов**

Редакционная коллегия:

доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **А.А. Ашимов**; доктор техн. наук, проф., академик НАН РК **Ж.Ж. Байгунчеков**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **А.С. Джумадильдаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **Т.Ш. Кальменов**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **Б.Н. Мукашев**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **М.О. Отелбаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **Н.Ж. Такибаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **С.Н. Харин**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **М.Е. Абишев**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Ж.Ш. Жантаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **М.Н. Калимолдаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **В.Н. Косов**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Т.А. Мусабаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Р. Ойнаров**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Т.С. Рамазанов** (заместитель главного редактора); доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Н.М. Темирбеков**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **У.У. Умирбаев**

Редакционный совет:

академик НАН Украины **И.Н. Вишневский** (Украина); академик НАН Украины **А.М. Ковалев** (Украина); академик НАН Республики Беларусь **А.А. Михалевич** (Беларусь); академик НАН Азербайджанской Республики **А. Пашаев** (Азербайджан); академик НАН Республики Молдова **И. Тигиняну** (Молдова); д. мед. н., проф. **Иозеф Банас** (Польша)

«Известия НАН РК. Серия физико-математическая». ISSN 1991-346X

Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы)

Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации и архивов Министерства культуры и информации Республики Казахстан №5543-Ж, выданное 01.06.2006 г.

Периодичность: 6 раз в год.

Тираж: 300 экземпляров.

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, ком. 219, 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,

[www.nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz](http://www.nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz)

---

© Национальная академия наук Республики Казахстан, 2016

Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75.

Editor in chief

**G. M. Mutanov**,  
academician of NAS RK

Editorial board:

**A.A. Ashimov**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **Zh.Zh. Baigunchekov**, dr. eng. sc., prof., academician of NAS RK; **A.S. Dzhumadildayev**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **T.S. Kalmenov**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **B.N. Mukhashev**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **M.O. Otelbayev**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **N.Zh. Takibayev**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **S.N. Kharin**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **M.Ye. Abishev**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **Zh.Sh. Zhantayev**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **M.N. Kalimoldayev**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **V.N. Kosov**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **T.A. Mussabayev**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **R. Oinarov**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **T.S. Ramazanov**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK (deputy editor); **N.M. Temirbekov**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **U.U. Umirbayev**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK

Editorial staff:

**I.N. Vishnievski**, NAS Ukraine academician (Ukraine); **A.M. Kovalev**, NAS Ukraine academician (Ukraine); **A.A. Mikhalevich**, NAS Belarus academician (Belarus); **A. Pashayev**, NAS Azerbaijan academician (Azerbaijan); **I. Tighineanu**, NAS Moldova academician (Moldova); **Joseph Banas**, prof. (Poland).

**News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physical-mathematical series.**  
**ISSN 1991-346X**

Owner: RPA "National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan" (Almaty)

The certificate of registration of a periodic printed publication in the Committee of information and archives of the Ministry of culture and information of the Republic of Kazakhstan N 5543-Ж, issued 01.06.2006

Periodicity: 6 times a year

Circulation: 300 copies

Editorial address: 28, Shevchenko str., of. 219, 220, Almaty, 050010, tel. 272-13-19, 272-13-18,  
[www.nauka-nanrk.kz](http://www.nauka-nanrk.kz) / [physics-mathematics.kz](http://physics-mathematics.kz)

---

© National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, 2016

Address of printing house: ST "Aruna", 75, Muratbayev str, Almaty

**NEWS**

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES**

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 306 (2016), 180–190

UDC 517.929

**ABOUT THE CONTINUOUS RANGE OF THE OPERATOR  
OF THE SEMI-FIXED REGIONAL TASK FOR THE HEAT  
CONDUCTIVITY EQUATION WITH THE DEVIATING ARGUMENT**

**M. T. Shomanbayeva, A.Sh.Shaldanbayev, S.T.Achmetova**

YuKGU of M. Auyezov, Shymkent

**Keywords:** the deviating arguments, a continuous range, a singular range, absolutely continuous range, spectral decomposition, function of the Cantor.

**Abstract.** In this work the spectral theory of the operator corresponding to the semi-fixed regional task for the heat conductivity equation with the deviating argument is constructed, own functions are found, their completeness and a basisness is shown, spectral decomposition is received, the structure of a range is in details investigated, in particular, absence absolutely continuous components and presence singular function components of the Cantor predicted earlier by N. Winer is proved.

УДК 517.929

**О НЕПРЕРЫВНОМ СПЕКТРЕ ОПЕРАТОРА ПОЛУЗАКРЕПЛЕННОЙ  
КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ  
С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ**

**М.Т.Шоманбаева, А.Ш.Шалданбаев, С.Т.Ахметова**

ЮКГУ им. М.Ауезова, г. Шымкент

**Ключевые слова:** отклоняющийся аргумент, непрерывный спектр, сингулярный спектр, абсолютно непрерывный спектр, спектральное разложение, функция Кантора.

**Аннотация.** В данной работе построена спектральная теория оператора соответствующего полужакопленной краевой задаче для уравнения теплопроводности с отклоняющимся аргументом, найдены собственные функции, показана их полнота и базисность, получено спектральное разложение, детально исследован состав спектра, в частности, доказано отсутствие абсолютно непрерывной компоненты и присутствие сингулярной компоненты типа функции Кантора, предсказанного ранее Н. Винером.

**1. Введение.**

Спектральную теорию линейных операторов можно считать, завершенной, поскольку, для таких операторов получено спектральное разложение, следующего вида

$$A = \int \lambda dE(\lambda),$$

где  $dE(\lambda)$  – так называемая спектральная функция, которая разлагается на сумму трех функций

$$dE(\lambda) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t), (*)$$

где  $f_1$  - скачкообразная функция,  $f_2$  абсолютно непрерывна, а  $f_3$  сингулярно непрерывна. Функция  $f_2$  равна интегралу Лебега от своей производной, а производная  $f_3$  равна нулю почти для всех  $t$  (функция Кантора является функцией типа  $f_3$ ). В интервалах, где  $f_1$  и  $f_3$  - константы,  $f$  является абсолютно непрерывной. Пусть теперь  $\{E_t\}$  - разложение единицы для самосопряженного оператора  $A$ . Для любого  $v$  в гильбертовом пространстве  $(v, E_t v)$  является неубывающей функцией  $t$ , а значит, для нее возможна декомпозиция (\*). Скачки  $f_1$  происходят в собственных значениях оператора  $A$ . Спектр  $A$  называется абсолютно непрерывным в интервале  $I$ , если  $(v, E_t v)$  - абсолютно непрерывная функция в  $I$  для каждого  $v$  в гильбертовом пространстве; в противном случае спектр будет кусочным.

Кажется разумным предположение, что спектры гамильтониана атомов и молекул, исключая собственные значения, всегда абсолютно непрерывны, иначе говоря, декомпозиция произведения  $(v, E_t v)$  всегда состоит из первых двух членов (\*). Однако, это не доказано, кроме некоторых случаев, подобных атому водорода, для которых известно явное выражение для  $E_t$ .

Хотелось бы иметь возможность сказать, что для атома нет никаких собственных значений в непрерывном спектре, т.е. выше уровня ионизации. Для некоторых атомов не существует истинных собственных значений полного гамильтониана для энергии  $\lambda$  выше уровня ионизации. Всегда ли это верно – вопрос открытый.

Точечным спектром  $P\sigma(A)$  называют множество собственных значений оператора  $A$ , т.е.

$$P\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}: Au = \lambda u \text{ для некоторого ненулевого } u \in H\}.$$

Непрерывным спектром  $C\sigma(A)$  оператора  $A$  называется множество

$C\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}: A - \lambda I \text{ имеет неограниченный обратный оператор с плотной в } H \text{ областью определения}\}$ , а остаточным спектром  $R\sigma(A)$  – множество

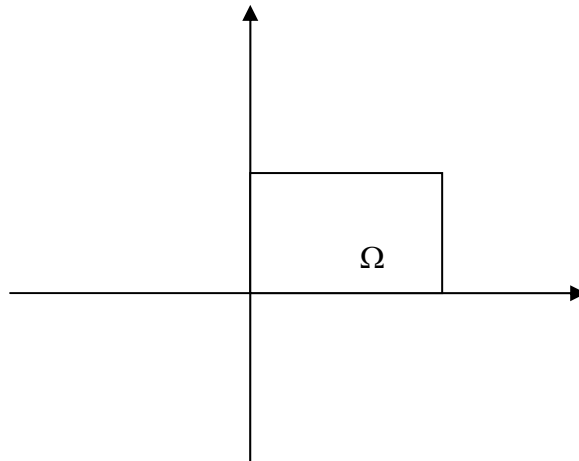
$R\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}: A - \lambda I \text{ - имеет обратный (ограниченный или неограниченный) оператор, область определения которого не плотна в } H\}$ .

Для большинства представляющих интерес операторов (включая все самосопряженные, унитарные и вообще нормальные) остаточный спектр пуст, и поэтому непрерывный спектр можно представить себе состоящим из таких  $\lambda$ , для которых можно построить с наперед заданной точностью приближенный собственный вектор, не являющийся, однако, точным собственным вектором. [1. с.174-175].

К теме настоящей работы посвящены много численные исследования отечественных и зарубежных ученых, подробные сведения о которых можно найти в монографиях [2-9].

В данной работе, мы покажем, что абсолютный спектр отсутствует, поэтому спектр состоит из собственных значений и сингулярной компоненты, вроде функции Кантора.

**Постановка задачи.** Пусть  $\Omega \subset R^2$  – прямоугольник ограниченный отрезками:  $AB: 0 \leq t \leq T, x = 0$ ;  $BC: 0 \leq x \leq l, t = T$ ;  $CD: 0 \leq t \leq T, x = l$ ;  $DA: 0 \leq x \leq l, y = 0$ ; /см. Рис. 1/.



Через  $C^{1,2}(\Omega)$  – обозначим множество функции  $u(x, t)$  единожды непрерывно дифференцируемых по  $t$  и дважды непрерывно дифференцируемых по  $x$  в области  $\Omega$ . Под границей области понимаем совокупность отрезков  $\Gamma = AB \cup AD \cup CD$ .

**Полузакрепленная задача.** Найти решения уравнения

$$Lu = u_t(x, T-t) + u_{xx}(x, t) = f(x, t) \quad (1)$$

удовлетворяющие граничным условиям

$$u|_{t=0} = u|_{x=0} = u_x|_{x=l} = 0; \quad (2)$$

**Определение 1.1.** Регулярным решением задачи (1)+(2) будем понимать функцию  $u(x, t) \in C^{1,2}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ , обращающую в тождество уравнения (1) и краевые условия (2).

**Определение 1.2.** Функция  $u \in L^2(\Omega)$  называют сильным решением задачи, если существует последовательность функции  $\{u_n\} \in C^{1,2}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  и удовлетворяющая краевым условиям задачи такая, что  $\{u_n\}$  и  $\{Lu_n\}$  сходятся в  $L^2(\Omega)$  соответственно к  $u$  и  $f$ .

**Определение 1.3.** Краевая задача (1)+(2) называется сильно разрешимой, если сильное решение задачи существует для любой правой части  $f(x, t) \in L^2(\Omega)$  и единственно.

**Определение 1.4.** Точечным спектром  $P\sigma(A)$  называют множество собственных значений оператора  $A$ , т.е.

$$P\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}: Au = \lambda u \text{ для некоторого ненулевого } u \in H\}.$$

Непрерывным спектром  $C\sigma(A)$  оператора  $A$  называется множество

$C\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}: A - \lambda I \text{ имеет неограниченный обратный оператор с плотной в } H \text{ областью определения}\}$ , а остаточным спектром  $R\sigma(A)$  – множество

$R\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}: A - \lambda I - \text{ имеет обратный (ограниченный или неограниченный) оператор, область определения которого не плотна в } H\}$ .

Целью данной работы является, исследование спектральных свойств линейного оператора соответствующего краевой задаче (1)+(2), изучение структуры спектра этого оператора, и с помощью спектрального разложения показать сильную разрешимость краевой задачи (1)+(2) в пространстве  $L^2(\Omega)$ .

## 2. Методы исследований.

Краевая задача (1)+(2), не относится к числу классических краевых задач математической физики, поэтому широко известные методы не применимы.

Для решения поставленной задачи применяем методы теории линейных операторов [2,3] и анализ Фурье [10-12], при исследовании непрерывного спектра была существенно использованы результаты одной работы Вейля об равномерном распределении [13]. Следует отметить, что теорию возмущения непрерывного спектра линейных операторов посвящены многочисленные работы []

## 3. Результаты исследований.

### Теорема 3.1.

(а) Если  $\frac{T\pi}{2l^2}$  – иррациональное число, то спектр оператора

$$Lu = u_t(x, T-t) + u_{xx}(x, t), \\ u|_{t=0} = u|_{x=0} = u_x|_{x=l} = 0$$

совпадает с числовой осью  $(-\infty, +\infty)$ . Спектр состоит из бесконечного числа собственных значений отличных от нуля и из предельных точек собственных значений. Оператор  $\bar{L}$  – самосопряжен и обратим, но  $\bar{L}^{-1}$  – неограничен.

(б) Если  $\frac{T\pi}{2l^2}$  – рациональное число и  $\frac{1}{4} \notin \left( \left( m + \frac{1}{2} \right)^2 \frac{T\pi}{2l^2} \right)$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ , то оператор  $\bar{L}$  –

самосопряжен и ограниченно обратим. Спектр оператора  $\bar{L}$  состоит из бесконечного множества собственных значений и их предельных точек, которые также бесконечны и не имеет предельных точек, точнее на каждом ограниченном сегменте содержится лишь конечное число предельных точек множества собственных значений  $\{\lambda_{mn}\}$ ,  $m, n = 0, 1, 2, \dots$ . Оператор  $\bar{L}^{-1}$  – ограничен, но не компактен.

(в) Если  $\frac{T\pi}{2l^2}$  – рациональное число и  $\frac{1}{4} \in \left( \left( m + \frac{1}{2} \right)^2 \frac{T\pi}{2l^2} \right)$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ , то обратный

оператор  $\bar{L}^{-1}$  не существует,  $\lambda = 0$  является собственным значением (возможно бесконечнократным). Спектр состоит из бесконечного множества собственных значений и их предельных точек, которые также бесконечны и разбросаны от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Каждый ограниченный замкнутый сегмент содержит лишь конечное число предельных точек собственных значений  $\{\lambda_{mn}\}$ ,  $m, n = 0, 1, 2, \dots$ .

Предельный спектр состоит из бесконечнократных собственных значений.

**Теорема 3.2.** Для существования и единственности сильного решения краевой задачи

$$Lu = u_t(x, T-t) + u_{xx}(x, t) = f(x, t),$$

$$u|_{t=0} = u|_{x=0} = u_x|_{x=l} = 0$$

необходимо и достаточно выполнения условия

$$\frac{\pi T}{l^2} \neq \frac{2n + \frac{1}{2}}{\left( m + \frac{1}{2} \right)^2}, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

При выполнении этого условия сильное решение задачи существует и имеет вид

$$u(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(f, u_{mn})}{\lambda_{mn}} u_{mn}(x, t)$$

для всех  $f(x, t) \in L^2(\Omega)$  удовлетворяющих условию

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{(f, u_{mn})}{\lambda_{mn}} \right|^2 < +\infty,$$

где

$$\lambda_{mn} = (-1)^n \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{T} - \left( m + \frac{1}{2} \right)^2 \frac{\pi^2}{l^2}, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots;$$

$$u_{mn}(x, t) = \frac{2}{\sqrt{Tl}} \sin \left( m + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi x}{l} \cdot \sin \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{T}, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

#### 4. Обсуждение результатов исследований.

##### Лемма 4.1.

(а) Оператор  $L$  соответствующий краевой задаче (1)+(2) симметричный.

(б) Спектральная задача

$$\dot{v}(T-t) = \mu \cdot v(t),$$



$$v(0) = 0;$$

имеет бесконечное множество собственных значений:

$$\mu_n = (-1)^n \left( n + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{\pi}{T}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

и соответствующих им собственных функций

$$v_n(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{T}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

которые образуют ортонормированный базис пространства  $L^2(0, T)$ .

(с) Полузакрепленная спектральная задача

$$\begin{aligned} -w''(x) &= v^2 w(x), \\ w(0) &= w'(l) = 0 \end{aligned}$$

имеет бесконечное множество собственных значений:

$$\nu_m = \left( m + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{\pi}{l}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

и соответствующих им собственных функций

$$w_m(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \left( m + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi x}{l}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

которые образуют ортонормированный базис пространства  $L^2(0, l)$ .

(d) Если система функций  $\{\varphi_m(x)\}, m = 1, 2, \dots$  образует ортонормированный базис пространства  $L^2(0, l)$ , а система функций  $\{\psi_n(t)\}, n = 1, 2, \dots$  образует ортонормированный базис пространства  $L^2(0, T)$ , то система функций  $u_{mn}(x, t) = \varphi_m(x) \cdot \psi_n(t), m, n = 1, 2, \dots$  образует ортонормированный базис пространства  $L^2(\Omega)$ , где  $\Omega = [0, l] \times [0, T]$ .

Из полученных выше формул следует, что собственными функциями спектральной задачи (4)+(5) являются функций

$$u_{mn}(x, t) = \frac{2}{\sqrt{Tl}} \sin \left( m + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi x}{l} \cdot \sin \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{T}, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

которые в силу леммы 4.4 образуют ортонормированный базис пространства  $L^2(\Omega)$ ,  $\Omega = [0, l] \times [0, T]$ .

**Теорема 4.1.** Спектральная задача

$$u_t(x, T-t) + u_{xx}(x, t) = \lambda u(x, t) \tag{3}$$

$$u|_{t=0} = u|_{x=0} = u_x|_{x=l} = 0 \tag{4}$$

имеет бесконечное множество собственных значений

$$\lambda_{mn} = \mu_n - \nu_m^2 = (-1)^n \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{T} - \left( m + \frac{1}{2} \right)^2 \frac{\pi^2}{l^2}, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots \quad \text{и соответствующих им}$$

собственных функций:

$$y_{mn}(x, t) = \frac{2}{\sqrt{Tl}} \sin \left( m + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi x}{l} \cdot \sin \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{T}, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

которые образуют ортонормированный базис пространства  $L^2(\Omega)$ , где  $\Omega = [0, l] \times [0, T]$ .

**Лемма 4.2.** Если симметрический оператор  $A$  имеет полную систему собственных векторов, то замыкание этого оператора  $\bar{A}$  самосопряжен в  $H$ , иначе говоря, оператор  $A$  самосопряжен в существенном.

**Теорема 4.2.**

(а) Оператор

$$Lu = u_t(x, T-t) + u_{xx}(x, t),$$

$$u|_{t=0} = u|_{x=0} = u_x|_{x=l} = 0$$

самосопряжен в существенном, в пространстве  $H = L^2(\Omega)$ , где  $\Omega = [0, l] \times [0, T]$  прямоугольник, лежащий на верхней полуплоскости  $(x, t) \in R^2$ ;

(б) Если

$$\frac{\pi T}{l^2} \neq \frac{2n + \frac{1}{2}}{\left(m + \frac{1}{2}\right)^2}, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

то существует обратный оператор  $\bar{L}^{-1}$ , который также самосопряжен.

**Доказательство теоремы 3.1.**

Пусть на вещественной прямой отмечено бесконечное число точек

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots;$$

мы покрываем прямую на некоторую окружность длины 1 и ставим вопрос о том, будут ли при этом находящиеся на отмеченных местах точки  $\alpha_n$  покрывать окружность с равномерной плотностью. Так будет в том случае, когда число  $n_\alpha$  тех из первых  $n$  отмеченных точек  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , которые при накручивании попадают на дугу  $\alpha$ , асимптотически задается в виде  $|\alpha|n$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_\alpha}{n} = |\alpha|;$$

при этом  $|\alpha|$  означает длину дуги  $\alpha$ . О равномерной плотности распределения отмеченных точек на окружности мы будем говорить в том и только в том случае, когда это предельное равенство будет выполняться для каждой дуги  $\alpha$ . Накручивание прямой на окружность означает, что вещественные числа рассматриваются по модулю 1, т.е. что два числа считаются равными в том случае, когда они отличаются на некоторое целое число. Среди чисел  $x$ , которые сравнимы по модулю 1 с некоторым заданным числом  $\alpha$  имеется одно и только одно такое для которого выполняется неравенство  $0 \leq x \leq 1$ ; это число сравнимое с  $\alpha$  по модулю 1, будет обозначаться  $(\alpha)$ .

**Первая теорема Вейля.** Если  $\xi$  – некоторое иррациональное число, то последовательность точек

$$1 \cdot \xi, 4 \cdot \xi, 9 \cdot \xi, 16 \cdot \xi, 25 \cdot \xi, \dots$$

при накручивании числовой прямой на окружность длины 1 покрывает ее всюду равномерно плотно. То же самое будет выполняться, если квадраты чисел заменить на их кубы или четвертые степени и т.д.

В связи с этой теоремой Вейля возникает вопрос: "А не уплотняются ли собственные значения нашего оператора с ростом индексов  $m, n$ ".

Найденные нами собственные значения имеют вид

$$\lambda_{mn} = (-1)^n \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{T} - \left( m + \frac{1}{2} \right)^2 \frac{\pi^2}{l^2}, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

Нас особо интересует окрестность нулевой точки, если она окажется предельной точкой для множества собственных значений, то обратной оператор  $\bar{L}^{-1}$  окажется неограниченным.

Если,  $n = 2k + 1, k = 0, 1, 2, \dots$  т.е. является нечетным числом, то

$$\lambda_{m, 2k+1} = -\left(2k + \frac{3}{2}\right) \frac{\pi}{T} - \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi^2}{l^2}, \quad k, m = 0, 1, 2, \dots$$

Поэтому  $|\lambda_{m, 2k+1}| \geq \frac{3\pi}{2T}, \quad k, m = 0, 1, 2, \dots$

Если  $n = 2k, k, m = 0, 1, 2, \dots$  т.е. является четным числом, то

$$\lambda_{m, 2k} = \left(2k + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{T} - \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi^2}{l^2}, \quad k, m = 0, 1, 2, \dots$$

Тогда  $|\lambda_{m, 2k}| = \frac{\pi}{T} \left| 2k + \frac{1}{2} - \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{T\pi}{l^2} \right| = \frac{2\pi}{T} \left| k + \frac{1}{4} - \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{T\pi}{2l^2} \right|$ .

Пусть  $[x]$  — означает целую часть числа  $x$ , тогда имеет место неравенство

$$\left[ \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{T\pi}{2l^2} \right] \leq \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{T\pi}{2l^2} \leq \left[ \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{T\pi}{2l^2} \right] + 1.$$

Полагая,  $k = \left[ \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{T\pi}{2l^2} \right]$  имеем

$$|\lambda_{m, 2k}| = \frac{2\pi}{T} \left[ \left| \frac{1}{4} - \left[ \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{T\pi}{2l^2} \right] \right| \right],$$

где  $(x)$  — означает дробную часть числа  $x$ . Имеет место следующая теорема (вторая теорема Вейля).

**Вторая теорема Вейля.** Если  $\varphi(z)$  — некоторый многочлен со свободным членом  $\alpha_0$  и у  $\varphi(z) - \alpha_0$  не все коэффициенты рациональны, то последовательность чисел

$$\varphi(1), \varphi(2), \varphi(3) \dots$$

распределена всюду равномерно плотно.

Если  $\frac{T\pi}{2l^2}$  иррациональное число в силу теоремы Вейля числа  $\left( \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{T\pi}{2l^2} \right)$  всюду плотны в отрезке  $[0, 1]$ , а это означает, что существует подпоследовательность последовательности  $\left( \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{T\pi}{2l^2} \right), \quad m = 0, 1, 2, \dots$  которая сходится к  $\frac{1}{4}$ , т.е.  $\{\lambda_{m, 2k}\} \rightarrow 0$ . Следовательно, обратный

оператор  $\bar{L}^{-1}$  неограничен в пространстве  $L^2(\Omega)$ . Более того замыкание множества  $\left( \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{T\pi}{2l^2} \right),$

$m = 0, 1, 2, \dots$  совпадает с отрезком  $[0, 1]$ . Таким образом, оператор  $\bar{L}$  обладает непрерывным спектром который содержит отрезок  $\left[ -\frac{3\pi}{2T}, \frac{\pi}{2T} \right]$ .

Полагая,  $k = \left[ \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{T\pi}{2l^2} \right] + 1$  имеем

$$\lambda_{m,2k} = \frac{2\pi}{T} \left[ \frac{1}{4} + 1 - \left( \left( m + \frac{1}{2} \right)^2 \frac{T\pi}{2l^2} \right) \right] \succ \frac{\pi}{2T}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Замыкание этого множества  $\{\lambda_{m,2k}\}$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ ;  $k = \left[ \left( m + \frac{1}{2} \right)^2 \frac{T\pi}{2l^2} \right] + 1$  совпадает с отрезком  $\left[ \frac{\pi}{2T}, \frac{5\pi}{2T} \right]$ .

Далее полагая  $k = \left[ \left( m + \frac{1}{2} \right)^2 \frac{T\pi}{2l^2} \right] + 2$ ,  $k = \left[ \left( m + \frac{1}{2} \right)^2 \frac{T\pi}{2l^2} \right] + 3$  и т.д. видим, что замыкание множество  $\{\lambda_{m,2k}\}$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$  покрывает всю полуось  $\left[ -\frac{3\pi}{2T}, +\infty \right)$ .

Пусть теперь  $\left[ \left( m + \frac{1}{2} \right)^2 \frac{T\pi}{2l^2} \right] - 1 \succ 0$ , очевидно, что начиная с некоторого номера это неравенство выполняется.

Полагая

$$k = \left[ \left( m + \frac{1}{2} \right)^2 \frac{T\pi}{2l^2} \right] - 1$$

имеем

$$\lambda_{m,2k} = \frac{2\pi}{T} \left[ \frac{1}{4} - 1 - \left( \left( m + \frac{1}{2} \right)^2 \frac{T\pi}{2l^2} \right) \right], \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Следовательно  $\overline{\{\lambda_{m,2k}\}} = \left[ -\frac{7\pi}{2T}, \frac{-3\pi}{2T} \right]$ , где

$$k = \left[ \left( m + \frac{1}{2} \right)^2 \frac{T\pi}{2l^2} \right] - 1, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

От прибавления или отнятия конечного числа элементов, множества не изменится, поэтому имеет место равенства

$$\overline{\left( \left( m + \frac{1}{2} \right)^2 \frac{T\pi}{2l^2} \right)} = \overline{\left( \left( m + \frac{1}{2} + i \right)^2 \frac{T\pi}{2l^2} \right)}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

для любого натурального числа  $i$ . При выводе последнего равенства мы воспользовались этим фактом.

Полагая,

$$k = \left[ \left( m + \frac{1}{2} \right)^2 \frac{T\pi}{2l^2} \right] - 2 \succ 0, \quad k = \left[ \left( m + \frac{1}{2} \right)^2 \frac{T\pi}{2l^2} \right] - 3 \succ 0, \dots$$

и т.д. мы видим, что  $\overline{\{\lambda_{m,2k}\}} = (-\infty, +\infty)$ ,  $k, m = 0, 1, 2, \dots$

Спектр оператора  $\bar{L}$  состоит из собственных значений  $\{\lambda_{mn}\}$ ,  $m, n = 0, 1, 2, \dots$  и непрерывного спектра покрывающего всю числовую ось.

Если  $\frac{T\pi}{2l^2}$  – рациональное число, то множество  $\left( \left( m + \frac{1}{2} \right)^2 \frac{T\pi}{2l^2} \right)$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$  состоит из конечного числа элементов, поэтому хотя бы один из них повторяется бесконечное число раз при

изменений индекса  $m$ . Следовательно, множество  $\left( \left( m + \frac{1}{2} \right)^2 \frac{T\pi}{2l^2} \right)$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$  имеет хотя бы одну предельную точку лежащую в сегменте  $[0, 1]$ , тогда последовательность

$$\lambda_{m, 2k} = \frac{2\pi}{T} \left[ \frac{1}{4} - \left( \left( m + \frac{1}{2} \right)^2 \frac{T\pi}{2l^2} \right) \right], k = \left[ \left( m + \frac{1}{2} \right)^2 \frac{T\pi}{2l^2} \right], m = 0, 1, 2, \dots$$

имеет хотя бы одну и не более конечного числа предельных точек лежащих в сегменте  $\left[ -\frac{3\pi}{2T}, \frac{\pi}{2T} \right]$ .

Продолжая это рассуждение, аналогично иррациональному случаю, заметим, что в каждом сегменте длиной  $\frac{2\pi}{T}$  содержится не более конечного и не менее одного числа предельных точек последовательности  $\{\lambda_{m, 2k}\}$ ,  $m, k = 0, 1, 2, \dots$ . Это говорит о том, что предельный спектр состоит из счетного множества изолированных точек разбросанных на всей числовой оси от  $-\infty$  до  $+\infty$ . В частности точка  $\lambda = 0$  может оказаться бесконечномерным собственным значением.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Нетрудно заметить, что каждый элемент предельного спектра является в самом деле бесконечнократным собственным значением.

### 5. Выводы.

Для одноэлектронной задачи по физическим соображениям можно ожидать, что если  $V(x) \rightarrow 0$  при  $|x| \rightarrow \infty$ , то непрерывный спектр  $H$  также заполнит  $[0, \infty)$ , поскольку частица на очень больших расстояниях практически свободна, а свободная частица может иметь любую положительную энергию. Эта гипотеза подтверждена большим вычислительным опытом, но более точные утверждения нуждаются в некотором спектральном понятии. Именно, существенный спектр оператора состоит из всех точек спектра, за исключением изолированных собственных значений конечной кратности. Таким образом, мы добавляем к непрерывному спектру: (1) любые собственные значения, лежащие в нем или на его краях, (2) любые предельные точки спектра, (3) собственные значения бесконечной кратности, если они существуют.

Путем проверки различных случаев устанавливается, что точки существенного спектра можно характеризовать приближенными собственными векторами (возможно, включая истинные собственные векторы) следующим образом:  $\lambda$  принадлежит существенному спектру оператора  $H$  тогда и только тогда, когда существует последовательность  $\{v_j\}_1^\infty$  линейно независимых (или, если угодно, взаимно ортогональных) единичных векторов, таких, что  $\|Hv_j - \lambda v_j\| \rightarrow 0$  при  $j \rightarrow \infty$ .

Теоремы, полученные до сего времени, не в состоянии дать вполне удовлетворительную характеристику спектра по следующей причине: можно определить некий самосопряженный оператор, собственные значения которого составят счетное всюду плотное множество в интервале  $I$  (конечном или бесконечном), а собственные векторы образуют полную систему. Ясно, это не то, что обычно называют «непрерывный спектр», так как, например, в разложении по собственным функциям не появится никаких «собственных функций непрерывного спектра», а спектральный проектор  $E_t$  не будет непрерывным по  $t$  в любой точке  $I$ . Тем не менее, весь интервал  $I$  представляет собой существенный спектр (некоторые его участки принадлежат непрерывному спектру).

Известные до сего времени теоремы не исключают возможность того, что существенный спектр оператора Шредингера является спектром такого рода. Более того, теорема Вейля и фон Неймана утверждает, что чисто непрерывный спектр (т.е. такой, на котором  $E_t$  непрерывен) может быть преобразован в спектр описанного вида при помощи произвольно малого относительно компактного возмущения (на самом деле с помощью возмущения  $V$  типа Гамильтона-Шмидта с произвольно малой нормой Гильберта-Шмидта).

Даже если  $E_t$  непрерывен, спектр может все еще быть кусочным в некотором смысле. Напомним, что любая неубывающая функция (или любая функция  $f(t)$  локально ограниченной вариации) может быть представлена в виде

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t), \quad (*)$$

где  $f_1$  - скачкообразная функция,  $f_2$  абсолютно непрерывна, а  $f_3$  сингулярно непрерывна. Функция  $f_2$  равна интегралу Лебега от своей производной, а производная  $f_3$  равна нулю почти для всех  $t$  (функция Кантора является функцией типа  $f_3$ ). В интервалах, где  $f_1$  и  $f_3$  - константы,  $f$  является абсолютно непрерывной. Пусть теперь  $\{E_t\}$  - разложение единицы для самосопряженного оператора  $H$ . Для любого  $v$  в гильбертовом пространстве  $(v, E_t v)$  является неубывающей функцией  $t$ , а значит, для нее возможна декомпозиция (\*). Скачки  $f_1$  происходят в собственных значениях оператора  $H$ . Спектр  $H$  называется абсолютно непрерывным в интервале  $I$ , если  $(v, E_t v)$  - абсолютно непрерывная функция в  $I$  для каждого  $v$  в гильбертовом пространстве; в противном случае спектр будет кусочным [1.с.268].

Наконец, следует упомянуть другой пример, приведенный Винером [21] со ссылкой на К.Малера [22], в котором появляется так называемый сингулярный непрерывный спектр. Напомним, что неубывающая функция  $S(\omega)$  может быть представлена в виде суммы трех слагаемых: функции скачков со счетным числом последних, абсолютно непрерывной функции и непрерывной функции, имеющей равную нулю производную почти всюду, как функция Кантора [1.с.88]

Наши результаты подтверждают точку зрения Н.Винера. Мы утверждаем, что в разложении

$dE(\lambda) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t)$ , отсутствует абсолютно непрерывная компонента и доминирует сингулярная составляющая, где  $dE(\lambda)$  спектральная мера оператора, это резко контрастирует с известными на сегодняшний день фактами.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Рихтмайер Р. Принципы современной математической физики. – М. Мир, 1982.
- [2] Ахиезер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1966. – 544с.
- [3] Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы, спектральная теория. – М.: Мир, 1974.
- [4] Friedrichs К.О. On the perturbation of continuous spectra, Comm. Pure Appl. Math., vol.III, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1965.
- [5] Фаддеев Л.Д. Строение резольвенты оператора Шредингера системы трех частиц с парным взаимодействием, ДАН СССР, 138:3 (1961), 565-567.
- [6] Фаддеев Л.Д., Строение резольвенты оператора Шредингера системы трех частиц, и задача рассеяния, ДАН СССР, 145:2(1962), 301-304.
- [7] Фаддеев Л.Д., Математические вопросы квантовой теории рассеяния для системы трех частиц, Тр. МИАН СССР им.Стеклова, 69(1963), 1-122.
- [8] Lax P.D., Phillips R.S., Scattering theory. Academic Press, New York, 1967.
- [9] Kato T. Perturbation theory for linear operators, Springer, New York, 1966.
- [10] Мизохата С. Теория уравнений с частными производными. – М.: Мир, 1977.
- [11] Шалданбаев А.Ш., Ахметова С.Т. О полноте собственных векторов задачи Коши. - Республиканский научный журнал «Наука и образования ЮК» № 27, 2002. с. 58-62.
- [12] Кальменов Т.Ш., Шалданбаев А.Ш., Ахметова С.Т. К спектральной теории уравнения с отклоняющимися аргументами. - Институт математики МО и Н РК «Математический журнал». - Алматы 2004, т. 4, №3 (13) с. 41-48.
- [13] Вейль Г. Избранные труды. - М.: Наука, 1984. – 510с.
- [14] Кальменов Т.Ш. Краевые задачи для линейных уравнений в частных производных гиперболического типа. – Шымкент: Ғылым, 1993. – 328с.
- [15] Шалданбаев А.Ш., Рустемова К. О периодической задаче для уравнения первого порядка с отклоняющимся аргументом. - Научный журнал Мин Образ/я и Науки «Поиск», № 4/2009, г. Алматы, с. 204-209.
- [16] Шалданбаев А.Ш. Критерии вольтерровости дифференциального оператора первого порядка с отклоняющимся аргументом. - Вестник Карагандинского Университета, серия «Математика», № 3(47)/2007, с.39-43.
- [17] Марченко В.А. Операторы Штурма – Лиувилля и их приложения. – Киев: Наукова думка, 1977. – 332с.
- [18] Кальменов Т.Ш., Шалданбаев А.Ш. О структуре спектра краевой задачи Штурма – Лиувилля на конечном отрезке времени. // Известия НАН РК, серия физ. – мат. – Алматы, 2000. – с.29-34.
- [19] Шалданбаев А.Ш. Формулы следов для периодической и антипериодической задач Штурма–Лиувилля // Вестник МГУ. Серия 1. Математика-механика. 1982. - №3. - с. 6–11.
- [20] Спектральные разложения корректных-некорректных начально краевых задач для некоторых классов дифференциальных уравнений. 193с. Монография. LAP LAMBERT Academic Publishing. <http://dnb.d-nb.de>. Email:info@lap-publishing.com,Saarbrucken 2011,Germanu.
- [21] Wiener N., Generalized harmonic analysis.-Acta Math.,v.55,p.117-258.

[22] Mahler K. On the Translation Properties of a simple Class of Arithmetical Functions., Journ. Math. Phys. M.I.T.6 (1927). 158-164.

#### REFERENCES

- [1] R. Rikhtmayer. Principles of modern mathematical physics. M. Mir, 1982.
- [2] Akhiezer N. I., Glazman I.M. The theory of linear operators in Hilbert space. M.: Science, 1966. 544 pages.
- [3] Danford N., Schwartz Dzh. T. Linear operators, spectral theory. M.: World, 1974.
- [4] Friedrichs K.O., On the perturbation of continuous spectra, Comm.Pure Appl.Math., vol.III, Amer.Math.Soc., Providence, R.I., 1965.
- [5] Faddeev L.D., the Structure of a rezolventa of the operator Schrödinger of system of three particles with pair interaction, SSSR,138:3(1961),565-567 is GIVEN.
- [6] Faddeev L.D., the Structure of a rezolventa of the operator Schrödinger of system of three particles, and a zalacha of dispersion, SSSR,145:2(1962),301-304 is GIVEN.
- [7] Faddeev L.D., Mathematical questions of the kvanrovy theory of dispersion for system of three particles, Tr. MIAN USSR of Steklov, 69(1963),1-122.
- [8] Lax P.D., Phillips R.S., Scattering theory, Academic Press, New York, 1967.
- [9] Kato T. Perturbation theory for linear operators, Springer, New York, 1966.
- [10] Mizokhata S. The theory of the equations with private derivatives. M.: World, 1977.
- [11] Shaldanbayev A.Sh., Akhmetova S. T. About completeness of own vectors of a task of Cauchy. - Republican scientific magazine "Science and Formations of YuK" No. 27, 2002. page 58-62.
- [12] Kalmenov T.Sh., Shaldanbayev A.Sh., Akhmetova S. T. To the spectral theory of the equation with the deviating arguments. Institute of mathematics of MO and N of RK "Mathematical Magazine". Almaty 2004, t. 4, No. 3 (13) of page 41-48.
- [13] Veil G. Chosen works. - M.: Science, 1984. - 510 pages.
- [14] Kalmenov T.Sh. Regional tasks for the linear equations in private derivatives of hyperbolic type. Shymkent: □yly, 1993. - 328 pages.
- [15] Shaldanbayev A.Sh., Rustemova K. About a periodic task for the equation of the first order with the deviating argument. Image Min scientific magazine / I and Sciences "Search", No. 4/2009, Almaty, page 204-209.
- [16] Shaldanbayev A.Sh. Criteria of a volterrovost of the differential operator of the first order with the deviating argument. - Bulletin of the Karaganda University, Mathematics series, No. 3(47)/2007, page 39-43.
- [17] Marchenko V.A. Operators of Storm – Liouville and their appendix. Kiev: Naukova thought, 1977. 332 pages.
- [18] Kalmenov T.Sh., Shaldanbayev A.Sh. About structure of a range of a regional problem of Storm – Liouville on a final piece времени.//NAN RK'S News, a series physical. mat. Almaty, 2000. page 29-34.
- [19] Shaldanbayev A.Sh. Formulas of traces for periodic and anti-periodic problems of Storm Liouville//the Bulletin of MSU. Series 1. Mathematician-mechanic. 1982. No. 3. page 6-11.
- [20] Spectral decomposition of regional tasks correct-incorrect nachalno for some classes of the differential equations. - 193c, Monograph. LAP LAMBERT Academic Publishing. <http://dnb.d-nb.de>. Email:info@lap-publishing.com,Saarbrucken 2011, Germanu.
- [21] Wiener N., Generalized harmonic analysis. Acta Math., v.55, p.117-258.
- [22] Mahler K. On the Translation Properties of a simple Class of Arithmetical Functions., Journ. Math. Phys. M.I. T.6 (1927). 158-164.

### АРГУМЕНТІ АУЫТҚЫҒАН ЖЫЛУ ТЕҢДЕУІНІҢ ЖАРТАЛАЙ БЕКІТІЛГЕН ШЕКАРАЛЫҚ ЕСЕБІНЕ СӘЙКЕС ОПЕРАТОРДЫҢ ҮЗІКСІЗ СПЕКТРІ ТУРАЛЫ

М.Т.Шоманбаева, А.Ш.Шалданбаев, С.Т.Ахметова

ЮКГУ им. М.Ауезова, г. Шымкент

**Сырлы сөздер:** ауытқыған аргумент, үзіксіз спектр, сингулярлы спектр, абсолютті үзіксіз спектр, спектралді таралым, Кантордың функциясы.

**Аннотация.** Бұл еңбекте аргументі ауытқыған жылу теңдеуінің жартылай бекіген шекаралық есебіне сәйкес оператордың спектралді теориясы тұрғызылды, меншікті мәндері табылды, оларға сәйкес меншікті функциялар табылып, олардың толымдылығы мен базистігі дәлелденді, спектралді таралымы алынды, сонымен бірге, спектрінің құрамы егжей-тегжей зерттелді, нәтижесінде абсолютті мүшенің жоқ екені, оның есесіне сингуляр мүшенің басымдылығы айқындалды. Мұндай спектрдің болуы мүмкін екеніне алғаш рет Н. Винер назар аударған, ол Кантордың функциясына ұқсайды.

Поступила 13.03.2016 г.

## МАЗМҰНЫ

## Теориялық және тәжірибелік зерттеулер

<i>Буртебаев Н., Дүйсебаев А., Керимкулов Ж.К., Алимов Д.К., Юшков А.В., Жолдыбаев Т.К., Садыков Б., Мухамеджанов Е.С., Джансейтов Д.М., Сакута С.Б.</i> 50 және 60 МэВ энергиялы $^3\text{He}$ иондарының $^{14}\text{N}$ ядроларынан серпімді шашырауын зерттеу.....	5
<i>Алтынбеков Ш.</i> Өртекті топырақ консолидациясының бірөлшемді квазисызықты есебін напордың бастапқы градиенті әсерінде шешу әдісі туралы және оның шөгуді анықтау.....	10
<i>Асқарова А.С., Болегенова С.А., Болегенова С.А., Максимов В.Ю., Ергалиева А.Б., Габитова З.Х., Боранбаева А.Е.</i> 3-D Модельдеу әдістерімен жану процесіне көмірдің ылғалдылығының зиянын зерттеу.....	21
<i>Асқарова Ә.С., Болегенова С.Ә., Болегенова С.Ә., Максимов В.Ю., Бекетаева М.Т.</i> ЖЭС жану камерасында көмірдің жануы кезінде $\text{NO}_x$ түзілуі мен жойылуын екі кинетикалық механизм бойынша сандық моделдеу.....	29
<i>Асқарова Ә.С., Болегенова С.Ә., Болегенова С.Ә., Максимов В.Ю., Бекетаева М.Т.</i> Жану камерасының қабырға температурасы үшін берілген шекаралық шартының жану процесінің температуралық сипаттамаларына әсерін зерттеу.....	35
<i>Асқарова Ә., Болегенова С., Гороховский М., Оспанова Ш., Нұғьманова А., Утелов С.</i> Өр түрлі сұйық отындардың бүрку, тұтану және жану процестерін зерттеу .....	40
<i>Сапрыгина М.Б., Байсейтова У.С., Шалданбаев А.Ш., Оразов И.О.</i> Толқын теңдеуінің шартарапты есебінің тұрлауы шешілуі туралы.....	48
<i>Буртебаев Н., Керимкулов Ж.К., Демьянова А.С., Данилов А.Н., Джансейтов Д.М., Жолдыбаев Т.К., Алимов Д.К.</i> Оптикалық және фолдинг модельдер АЯСЫНДА 50 және 60 МЭВ энергияларда $^3\text{He}$ иондарының $^{13}\text{C}$ ядроларында серпімді шашырау процесстерін зерттеу.....	55
<i>Жұмбаев Д.С., Бакирова Э.А.</i> Импульс әсері бар фредгольм интегралдық- дифференциалдық теңдеулер үшін сызықты шеттік есептің бірімәнді шешілімділігінің коэффициенттік белгілері .....	61
<i>Өтебаев Ұ.Б., Есентаев Қ.Ө., Дархан Н.Д.</i> WEB -формалар құрудың технологиялары.....	72
<i>Жунусова Л.Х., Жунусов К.Х.</i> Тор теңдеулерінің итерациялық әдіспен шығару.....	79
<i>Қабылбеков К.А., Саидахметов П.А., Омаишова Г.Ш., Серикбаева Г.С., Сүйерқұлова Ж.Н.</i> Еркін механикалық тербелістерді зерттеуге арналған компьютерлік зертханалық жұмысты ұйымдастырудың бланкі үлгісі.....	84
<i>Қабылбеков К.А., Саидахметов П.А., Омаишова Г.Ш., Сүттібаева Д.И., Қозыбақова Г.Н.</i> Изобаралық процесті зерттеуге арналған компьютерлік зертханалық жұмысты ұйымдастырудың бланкі үлгісі.....	92
<i>Қабылбеков К.А., Омаишова Г.Ш., Саидахметов П.А., Нұрұллаев М.А., Артыгалин Н.А.</i> Карно циклімен жұмыс атқаратын қозғалтқышты зерттеуге арналған компьютерлік зертханалық жұмысты ұйымдастырудың бланкі үлгісі.....	98
<i>Түгелбаева Г.Т., Канибекова А. Е.</i> Білім негіздерін физика сабақтарына енгізу әдісін жүйелік талдау.....	104
<i>Қойишева Т.К., Қожамқұлова Ж.Ж., Базарбаева А.И., Бегимбетова Х.А.</i> Объектіге-бағытталған жүйе болашақ маманның ақпараттық-логикалық құзыреттілігін қалыптастыру факторы ретінде.....	108
<i>Қойишева Т.К., Байтерекова А.И., Салғараева М.И.</i> Болашақ мұғалімдерді кәсіби дайындауда қолданылатын объектілі-бағдарлы жобалаудың теориялық негіздері.....	116
<i>Литвиненко Н.</i> Бағдарламалық R ортаның C# ортасына біріктірілуі.....	123
<i>Мақышов С.</i> Тұрақты м-туындаған сандар.....	128
<i>Минглибаев М.Ж., Прокопья А.Н., Бекетауов Б.А.</i> Массалары айнымалы шектелген үш дене мәселесінің эволюциялық теңдеуінің нақты шешімдері.....	133
<i>Орынбаев С.А., Молдахметов С.С., Байбутанов Б.К., Ешметов М.Б., Ауесжанов Д.С.</i> Жазықтық-импульстік модуляция негізінде көпдеңгейлі инвертор сатыларының қосылу әдістемелерін зерттеу .....	139
<i>Сапрыгина М.Б., Шалданбаев А.Ш., Оразов И.О., Байсейтова У.С.</i> Толқын теңдеуінің шартарапты есебінің вөлтерлі болуының үзілді – кесілді шарты.....	147
<i>Сураган Д.</i> Шаттен р-нормасы үшін бір теңсіздік туралы .....	153
<i>Темірбеков Н.М., Тураров А.К.</i> Газлифт үрдісінің бір өлшемді моделінің сандық шешімі .....	159
<i>Ахметова С.Т., Шалданбаев А.Ш., Шомабаева М.Т.</i> Аргументі ауытқыған жылу теңдеуінің шекаралық коши-нейман есебіне сәйкес оператордың спектрінің құрамы туралы.....	169
<i>Шомабаева М.Т., Шалданбаев А.Ш., Ахметова С.Т.</i> Аргументі ауытқыған жылу теңдеуінің жарталай бекітілген шекаралық есебіне сәйкес оператордың үзіксіз спектрі туралы .....	180
<i>Ұлағатты ұстаз туралы. Шерәлі Біләл.</i> .....	191



СОДЕРЖАНИЕ

Теоретические и экспериментальные исследования

<i>Буртебаев Н., Дуйсебаев А., Керимкулов Ж.К., Алимов Д.К., Юшков А.В., Жолдыбаев Т.К., Садыков Б., Мухамеджанов Е.С., Джансейтов Д.М., Сакута С.Б.</i> Исследование упругого рассеяния ионов $^3\text{He}$ на ядрах $^{14}\text{N}$ при энергиях 50 и 60 МэВ.....	5
<i>Алтынбеков Ш.</i> О методике решения одномерной квазилинейной задачи консолидации неоднородного грунта с учетом начального градиента напора и определение его осадка.....	10
<i>Аскарова А.С., Болегенова С.А., Болегенова С.А., Максимов В.Ю., Ергалиева А.Б., Габитова З.Х., Боранбаева А.Е.</i> Исследование влияния влажности угля на процесс горения методами 3-d моделирования.....	21
<i>Аскарова А.С., Болегенова С.А., Болегенова С.А., Максимов В.Ю., Бекетаева М.Т.</i> Численное моделирование образования и разложения $\text{NO}_x$ по двум кинетическим механизмам при горении угольного топлива в топочной камере ТЭЦ.....	29
<i>Аскарова А.С., Болегенова С.А., Болегенова С.А., Максимов В.Ю., Бекетаева М.Т.</i> Исследование влияния граничного условия для температуры на стенках топочной камеры на температурные характеристики процесса горения.....	35
<i>Аскарова А., Болегенова С., Гороховский М., Оспанова Ш., Нугьманова А., Утелов С.</i> Исследование процессов распыла, воспламенения и горения различного вида жидкого топлива.....	40
<i>Сапрыгина М.Б., Байсейтова У.С., Шалданбаев А.Ш., Оразов И.О.</i> Толкын тендеуінің шартарапты есебінің тұрлаулы шешілуі туралы.....	48
<i>Буртебаев Н., Керимкулов Ж.К., Демьянова А.С., Данилов А.Н., Джансейтов Д.М., Жолдыбаев Т.К., Алимов Д.К.</i> Исследование процессов упругого рассеяния ионов $^3\text{He}$ на ядрах $^{13}\text{C}$ при энергиях 50 и 60 МэВ в рамках оптического и фолдинг моделей.....	55
<i>Джумабаев Д.С., Бакирова Э.А.</i> Коэффициентные признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для интегро-дифференциальных уравнений фредгольма с импульсными воздействиями.....	61
<i>Утебаев У.Б., Есентаев К.У., Дархан Н.Д.</i> Технология создания web-форм.....	72
<i>Жунусова Л.Х., Жунусов К.Х.</i> Итерационные методы решения сеточных уравнений.....	79
<i>Кабылбеков К.А., Саидахметов П.А., Омашова Г.Ш., Серикбаева Г.С., Суйеркулова Ж.Н.</i> Модель бланка организации компьютерной лабораторной работы по исследованию свободных механических колебаний.....	84
<i>Кабылбеков К.А., Саидахметов П.А., Омашова Г.Ш., Суттибаева Д.И., Козыбакова Г.Н.</i> Модель бланка организации компьютерной лабораторной работы по исследованию изобарического процесса.....	92
<i>Кабылбеков К.А., Омашова Г.Ш., Саидахметов П.А., Нураллаев М.А., Артыгалин Н.А.</i> Модель бланка организации компьютерной лабораторной работы по исследованию двигателя, совершающего цикл Карно.....	98
<i>Түгелбаева Г.Т., Канибекова А. Е.</i> Системное обсуждение способов внедрения в уроки по физике основ знаний по экологии.....	104
<i>Койшиева Т.К., Кожамкулова Ж.Ж., Базарбаева А.И., Бегимбетова Х.А.</i> Объектно-ориентированные системы как фактор формирования информационно-логической компетентности будущих специалистов.....	108
<i>Койшиева Т.К., Байтерекова А.И., Салгараева М.И.</i> Теоретические основы объектно-ориентированного проектирования, применимые для профессиональной подготовки будущих учителей.....	116
<i>Литвиненко Н.</i> Интеграция программной среды R в среду C#.....	123
<i>Макышов С.</i> Неподвижные m-порожденные числа.....	128
<i>Минглибаев М.Ж., Прокопья А.Н., Бекетауов Б.А.</i> Точные решения эволюционных уравнений в ограниченной задаче трех тел с переменными массами.....	133
<i>Орынбаев С.А., Молдахметов С.С., Байбутанов Б.К., Ешметов М.Б., Ауесжанов Д.С.</i> Исследование методик коммутации ступеней многоуровневого инвертора на основе широтно-импульсной модуляции.....	139
<i>Сапрыгина М.Б., Шалданбаев А.Ш., Оразов И.О., Байсейтова У.С.</i> Критерии вольтерровости нелокальной краевой задачи волнового уравнения.....	147
<i>Сураган Д.</i> Об одном неравенстве p-нормы в классе Шаттена.....	153
<i>Темірбеков Н. М., Тураров А. К.</i> Численное решение одномерной модели газлифтного процесса.....	159
<i>Ахметова С.Т., Шалданбаев А.Ш., Шомабаева М.Т.</i> О структуре спектра краевой задачи Коши-неймана для уравнения теплопроводности с отклоняющимся аргументом.....	169
<i>Шомабаева М.Т., Шалданбаев А.Ш., Ахметова С.Т.</i> О непрерывном спектре оператора полужакрепленной краевой задачи для уравнения теплопроводности с отклоняющимся аргументом.....	180
<i>Юбилей Ашуралиев Аллаберен</i> .....	191

## CONTENTS

## Theoretical and experimental researches

<i>Burtebayev N., Duisebayev A., Kerimkulov Zh.K., Alimov D.K., Yushkov A.V., Zholdybayev T.K., Sadikov B., Mukhamejanov Y.S., Janseitov D.M., Sakuta S.B.</i> Investigation of the elastic scattering of $^3\text{He}$ ions on $^{14}\text{N}$ at energies 50 and 60 MeV.....	5
<i>Altynbekov Sh.</i> On the method of solving one-dimensional quasilinear problem of consolidation of non homogeneous soil with the initial gradient of pressure and determination of its sediment.....	10
<i>Askarova. A., Bolegenova S., Bolegenova S., Maximov V., Yergaliyeva A., Gabitova Z., Boranbaeva A.</i> Study of coal moisture on the combustion process by 3d modeling.....	21
<i>Askarova A.S., Bolegenova S.A., Bolegenova S.A., Maximov V.Yu., Beketayeva M.T.</i> Numerical modeling of formation and destruction of $\text{NO}_x$ by TWO kinetic mechanisms during combustion of fossil fuel in the furnace of CHP.....	29
<i>Askarova A.S., Bolegenova S.A., Bolegenova S.A., Maximov V.Yu., Beketayeva M.T.</i> Study of the boundary conditions influence for the temperature on the walls of the combustion chamber in the temperature characteristics of the burning process.....	35
<i>Askarova A., Bolegenova S., Gorokhovski M., Ospanova Sh., Nugymanova A., Utelov S.</i> Investigation of atomization, ignition and combustion processes of different types of liquid fuel.....	40
<i>Saprygina M.B., Bayseytova U.S., Shaldanbayev A.Sh., Orazov I.O.</i> About regular resolvability of nonlocal boundary value problem of the wave equation.....	48
<i>Burtebayev N., Kerimkulov Zh.K., Demyanova A.S., Danilov A.N., Janseitov D.M., Zholdybayev T.K., Alimov D.K.</i> Investigation of elastic scattering of $^3\text{He}$ ions from $^{13}\text{C}$ nuclei at 50 and 60 MeV in optical and folding model.....	55
<i>Dzhumabaev D.S., Bakirova E.A.</i> Coefficient conditions for the unique solvability of linear boundary value problem for fredholm integro-differential equation with impulse effects.....	61
<i>Utebaev U.B., Yessentayev K.U., Darkhan N.D.</i> Technology of creation of web-form.....	72
<i>Zhunussova L., Zhunussov K.</i> Iterative methods for solving difference equations.....	79
<i>Kabyrbekov K.A., Saidakhmetov P.A., Omashova G.SH., Serikbaeva G.S., Suyerkulova ZH.N.</i> Model of the form of the organisation of computer laboratory operation of the free mechanical oscillations.....	84
<i>Kabyrbekov K.A., Saidakhmetov P.A., Omashova G.SH., Suttibaeva D.I., Kozybakova G.N.</i> Model of the form of the organisation of computer laboratory operation of isobaric process.....	92
<i>Kabyrbekov K.A., Omashova G.SH., Saidakhmetov P.A., Nurullaev M.A., Artygalin N.A.</i> Model of the form of the organization of computer laboratory operation on examination of the drive making the carnot cycle.....	98
<i>Tygelbaeva G.T., Kanibekova A. E.</i> System discussion of methods of introduction in lessons on physics bases of knowledge on ecology.....	104
<i>Koishieva T.K., Kozhamkulova Zh.Zh., Bazarbaeva A.I., Begimbetova A.</i> Object-oriented system as the factor of formation of information-logical competence of future professionals.....	108
<i>Koishieva T.K., Baiterekova A.I., Salgaraeva M.I.</i> Theoretical bases of object-oriented design, applicable for vocational training of future teachers.....	116
<i>Litvinenko N.</i> Integration of R software environment in C# software environment.....	123
<i>Makyshov S.</i> Stationary m-digitaddition numbers.....	128
<i>Minglibayev M.Dzh., Prokopenya A.N., Beketauov B.A.</i> Exact solutions of evolution equations in restricted three-body problem with variable mass.....	133
<i>Orynbayev S.A., Moldakhmetov S.S., Baibutanov B.K., Jeshmetov M.B., Aueszhanov D.S.</i> Methods of switching angles based on pulse width modulation for multilevel inverter.....	139
<i>Saprygina M.B., Shaldanbayev A.Sh., Orazov I.O., Bayseytova U.S.</i> Criteria Volterra of nonlocal boundary value problem of the wave equation.....	147
<i>Suragan D.</i> On an inequality for schatten $P$ -norms.....	153
<i>Temirbekov N. M., Turarov A. K.</i> Numerical solution of the one dimensional model of gas-lift process.....	159
<i>Achmetova S.T., Shaldanbayev A.Sh., Shomabayeva M. T.</i> About structure of the range of the regional task of cauchy - neumann for the heat conductivity equation with the deviating argument.....	169
<i>Shomanbayeva M. T., Shaldanbayev A.Sh., Achmetova S.T.</i> About the continuous range of the operator of the semi-fixed regional task for the heat conductivity equation with the deviating argument.....	180
Anniversary of Ashuraliev Allaberen.....	191

**Publication Ethics and Publication Malpractice  
in the journals of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan**

For information on Ethics in publishing and Ethical guidelines for journal publication see <http://www.elsevier.com/publishingethics> and <http://www.elsevier.com/journal-authors/ethics>.

Submission of an article to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan implies that the described work has not been published previously (except in the form of an abstract or as part of a published lecture or academic thesis or as an electronic preprint, see <http://www.elsevier.com/postingpolicy>), that it is not under consideration for publication elsewhere, that its publication is approved by all authors and tacitly or explicitly by the responsible authorities where the work was carried out, and that, if accepted, it will not be published elsewhere in the same form, in English or in any other language, including electronically without the written consent of the copyright-holder. In particular, translations into English of papers already published in another language are not accepted.

No other forms of scientific misconduct are allowed, such as plagiarism, falsification, fraudulent data, incorrect interpretation of other works, incorrect citations, etc. The National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan follows the Code of Conduct of the Committee on Publication Ethics (COPE), and follows the COPE Flowcharts for Resolving Cases of Suspected Misconduct ([http://publicationethics.org/files/u2/New\\_Code.pdf](http://publicationethics.org/files/u2/New_Code.pdf)). To verify originality, your article may be checked by the Cross Check originality detection service <http://www.elsevier.com/editors/plagdetect>.

The authors are obliged to participate in peer review process and be ready to provide corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. All authors of a paper should have significantly contributed to the research.

The reviewers should provide objective judgments and should point out relevant published works which are not yet cited. Reviewed articles should be treated confidentially. The reviewers will be chosen in such a way that there is no conflict of interests with respect to the research, the authors and/or the research funders.

The editors have complete responsibility and authority to reject or accept a paper, and they will only accept a paper when reasonably certain. They will preserve anonymity of reviewers and promote publication of corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. The acceptance of a paper automatically implies the copyright transfer to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.

The Editorial Board of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan will monitor and safeguard publishing ethics.

Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайте:

[www.nauka-nanrk.kz](http://www.nauka-nanrk.kz)

<http://www.physics-mathematics.kz>

Редактор *М. С. Ахметова*

Верстка на компьютере *А.М. Кульгинбаевой*

Подписано в печать 24.03.2016.

Формат 60x881/8. Бумага офсетная. Печать – ризограф.

11,3 п.л. Тираж 300. Заказ 2.