ISSN 1991-346X

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ

Х А Б А Р Л А Р Ы

ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

N E W S

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА СЕРИЯСЫ

♦

СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

♦

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

3 (307)

МАМЫР – МАУСЫМ 2016 ж.
МАЙ – ИЮНЬ 2016 г.
MAY – JUNE 2016

1963 ЖЫЛДЫҢ ҚАҢТАР АЙЫНАН ШЫҒА БАСТАҒАН
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1963 ГОДА
PUBLISHED SINCE JANUARY 1963

ЖЫЛЫНА 6 РЕТ ШЫҒАДЫ
ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД
PUBLISHED 6 TIMES A YEAR

АЛМАТЫ, ҚР ҰҒА
АЛМАТЫ, НАН РК
ALMATY, NAS RK

«Известия НАН РК. Серия физико-математическая». ISSN 1991-346X
Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы)
Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации и архивов Министерства культуры и информации Республики Казахстан **№5543-Ж**, выданное 01.06.2006 г.

Периодичность: 6 раз в год.
Тираж: 300 экземпляров.

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, ком. 219, 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18, www:nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75.

News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physical-mathematical series.
ISSN 1991-346X
Owner: RPA "National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan" (Almaty)
The certificate of registration of a periodic printed publication in the Committee of information and archives of the Ministry of culture and information of the Republic of Kazakhstan N 5543-Ж, issued 01.06.2006

Periodicity: 6 times a year
Circulation: 300 copies

Editorial address: 28, Shevchenko str., of. 219, 220, Almaty, 050010, tel. 272-13-19, 272-13-18,
www:nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

Address of printing house: ST "Aruna", 75, Muratbayev str, Almaty

N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 3, Number 307 (2016), 92 – 98

ASYMPTOTICS OF SOLUTION OF SINGULARLY PERTURBED GENERAL BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH BOUNDARY JUMPS

D.N. Nurgabyl[1], A.B.Uaisov[2], B.Nussipkhanuly[1]

[1]Zhetysu State University named after I. Zhansugurov, Taldykorgan,
[2]Kazakh national university named after Al-Farabi, Almaty
kebek.kz@mail.ru, uaisov.alpamys@mail.ru

Key words: asymptotic, boundary value problem, additional characteristic equation, perturbed, no perturbed problems, initial jump phenomenon.

Abstract. In this paper, we consider a general boundary value problem for a linear system of ordinary differential equations with a small parameter at some derivatives. There is a method for constructing an asymptotic expansion of the solution of singularly perturbed general boundary value problems for the case, when the root of the degenerate equation is conditionally stable, i.e. corresponding to it the roots of the characteristic equation have real parts of opposite signs. The asymptotic expansion of the solution of the singularly perturbed problem includes one regular rank and the two boundary ranks. There was formulated the degenerated problem, herewith the boundary conditions for the solution $y_0(t)$ of the degenerate equation found from the boundary conditions of the original perturbed problem by removing the values of the derivatives at the points $t=0$ and $t=1$. There was constructed approximate solution of a singularly perturbed a general boundary value problem up to an arbitrary order at tending small parameter to zero. We prove a theorem on the existence, uniqueness and of equity asymptotic approximation of solution singularly perturbed a general boundary value problem. There growth of the derivatives solutions perturbed boundary value problem was set with $\varepsilon \to 0$. Described the phenomenon of boundary jump, it is proved that jump appears in a neighborhood of both ends of the viewed segment. There was found magnitude of boundary jumps.

УДК 517.928.2

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ОБЩЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ГРАНИЧНЫМИ СКАЧКАМИ

Д.Н.Нургабыл[1], А.Б.Уаисов[2], Б. Нусипханулы[1]

[1]Жетысуский государственный университет им. И. Жансугурова, г.Талдыкорган,
[2]Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г.Алматы

Ключевые слова: асимптотика, краевая задача, дополнительное характеристическое уравнение, возмущенные задачи, невозмущенные задачи, явление начального скачка.

Аннотация. В данной работе рассмотрена общая краевая задача для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при части производных. Предложен метод построения асимптотического разложения решения сингулярно возмущенной общей краевой задачи для случая, когда корень вырожденного уравнения является условно устойчивым, т.е. отвечающие ему корни характеристического уравнения имеют действительные части разных знаков. Асимптотическое разложение решения рассматриваемой сингулярно возмущенной задачи содержит регулярный ряд и два пограничного ряда. Сформулирована вырожденная задача, причем краевое условие для решения $y_0(t)$ вырожденного уравнения найдено из краевых условий исходной возмущенной задачи путем исключения значения

производных в точках $t=0$ и $t=1$. Построено приближенное решение сингулярно возмущенной общей разделенной краевой задачи с точностью до произвольного порядка при стремлении малого параметра к нулю.

Доказана теорема о существовании, единственности и справедливости асимптотического приближения решения сингулярно возмущенной общей разделенной краевой задачи. Установлен рост производных решения возмущенной краевой задачи при $\varepsilon \to 0$. Описано явление граничного скачка, при этом доказано, что скачок появляется в окрестности обеих концов рассматриваемого отрезка. Найдены величины граничных скачков.

1 Постановка задачи. В [1-6] было исследовано асимптотическое поведение решений сингулярно возмущенных краевых и начальных задач с начальными скачками в случае, когда дополнительное характеристическое уравнение наряду с нулевым корнем имело только корни с отрицательными вещественными частями. Этот случай называется устойчивым. В данной работе рассматривается случай, когда дополнительное характеристическое уравнение наряду с $\mu=0$ имеет корни $\operatorname{Re}\mu<0, \operatorname{Re}\mu>0$.

Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$L_\varepsilon y \equiv \varepsilon^2 y''' + \varepsilon A(t) y'' + B(t) y' + C(t) y = F(t), \tag{1}$$

$$\begin{gathered} L_1 y \equiv \alpha_{10} y(0,\varepsilon) + \alpha_{11} y'(0,\varepsilon) + \beta_{10} y(1,\varepsilon) = a_1, \\ L_2 y \equiv \alpha_{20} y(0,\varepsilon) + \alpha_{21} y'(0,\varepsilon) + \beta_{20} y(1,\varepsilon) + \beta_{21} y'(1,\varepsilon) = a_2, \\ L_3 y \equiv \alpha_{30} y(0,\varepsilon) + \beta_{30} y(1,\varepsilon) + \beta_{31} y'(1,\varepsilon) = a_3, \end{gathered} \tag{2}$$

где $\varepsilon>0$- малый параметр, α_{ij} , β_{ij} $(i,j=0,1,2,3)$ – известные постоянные.

В работе [7] были установлены следующие предельные равенства:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} y(t,\varepsilon) = \bar{y}(t), \quad 0\le t\le 1, \ \lim_{\varepsilon\to 0} y^{(j)}(t,\varepsilon) = \bar{y}^{(j)}(t), \ 0<t<1, \ j=1,2 \tag{3}$$

где $y(t,\varepsilon)$ решение задачи (1), (2), $\bar{y}(t)$ решение соответствующей вырожденной задачи. Из (3) видно, что $\bar{y}^{(j)}(t), \ j=1,2$ можно использовать в качестве асимптотического приближения к $y^{(j)}(t,\varepsilon), j=1,2$ только на промежутке $0<t_0(\varepsilon)\le t\le t_1(\varepsilon)<1$, причем эти предельные равенства ничего не говорят о точности этих приближений. Естественно поставить вопрос о получении равномерного приближения с любой точностью по малому параметру.

2 Построение асимптотического разложения решения краевой задачи. Для построения асимптотики решения задачи (1), (2) потребуем выполнения следующих условий:

I. Пусть коэффициенты $A(t), B(t), C(t)$ *и правая часть* $F(t)$ *уравнения* (1) *доста-точное число раз дифференцируемы на отрезке* $0\le t\le 1$.

II. Пусть $B(t)\ne 0$ *при* $t\in[0,1]$. (4)

III. Дополнительное характеристическое уравнение

$$\mu^3 + A(t)\mu^2 + B(t)\mu = 0 \tag{5}$$

имеет различные корни $\mu_1=0, \ \mu_2, \ \mu_3$, *причем* $\operatorname{Re}\mu_2<0, \operatorname{Re}\mu_3>0$.

Исходя из теоремы 5 работы [6], заключаем, что асимптотическое разложение решения задачи (1), (2) следует искать в виде:

$$y(t,\varepsilon) = y_\varepsilon(t) + \varepsilon u_\varepsilon(\tau) + \varepsilon w_\varepsilon(s), \quad \tau=\frac{t}{\varepsilon}\ge 0, \ s=\frac{t-1}{\varepsilon}\le 0, \ \ 0\le t\le 1. \tag{6}$$

Подставим (6) в (1):

$$\varepsilon^2 y_\varepsilon'''(t) + \frac{d^3u_\varepsilon}{d\tau^3} + \frac{d^3w_\varepsilon}{ds^3} + \varepsilon A(t)\left(y_\varepsilon''(t) + \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2}\frac{d^2u_\varepsilon}{d\tau^2} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2}\frac{d^2w_\varepsilon}{ds^2}\right) +$$

$$+B(t)\left(y'_\varepsilon(t)+\frac{du_\varepsilon}{d\tau}+\frac{dw_\varepsilon}{ds}\right)+C(t)\big(y_\varepsilon(t)+\varepsilon u_\varepsilon(\tau)+\varepsilon w_\varepsilon(s)\big)=F(t). \qquad (7)$$

Теперь, приравнивая в (7) выражения, зависящие от t, s и τ по отдельности, получаем

$$\varepsilon^2 y'''_\varepsilon(t)+\varepsilon A(t)y''_\varepsilon(t)+B(t)y'_\varepsilon(t)+C(t)y_\varepsilon(t)=F(t), \qquad (8)$$

$$\frac{d^3u_\varepsilon}{d\tau^3}+A(\varepsilon\tau)\frac{d^2u_\varepsilon}{d\tau^2}+B(\varepsilon\tau)\frac{du_\varepsilon}{d\tau}+\varepsilon C(\varepsilon\tau)u_\varepsilon(\tau)=0\,, \qquad (9)$$

$$\frac{d^3w_\varepsilon}{ds^3}+A(1+\varepsilon s)\frac{d^2w_\varepsilon}{ds^2}+B(1+\varepsilon s)\frac{dw_\varepsilon}{ds}+\varepsilon C(1+\varepsilon s)w_\varepsilon(s)=0\,. \qquad (10)$$

Решение уравнения (8) ищем в виде разложения

$$y_\varepsilon(t)=y_0(t)+\varepsilon y_1(t)+\varepsilon^2 y_2(t)+\ldots, \qquad (11)$$

а решения (9) и (10) в виде

$$u_\varepsilon(\tau)=u_0(\tau)+\varepsilon u_1(\tau)+\varepsilon^2 u_2(\tau)+\ldots, \qquad (12)$$

$$w_\varepsilon(s)=w_0(s)+\varepsilon w_1(s)+\varepsilon^2 w_2(s)+\ldots\,. \qquad (13)$$

Подставляя (11) в (8) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем

$$B(t)y'_0(t)+C(t)y_0(t)=F(t), \qquad (14)_0$$

$$B(t)y'_k(t)+C(t)y_k(t)=-A(t)y''_{k-1}(t)-y'''_{k-2}(t), \qquad (14)_k$$

Теперь, подставляя (12) в (9), (13) в (10), представляя $A(\varepsilon\tau), B(\varepsilon\tau), C(\varepsilon\tau)$, $A(1+\varepsilon s)$, $B(1+\varepsilon s)$, $C(1+\varepsilon s)$ в ряды по степеням ε и приравнивая выражения стоящих при одинаковых степенях ε, находим:

$$\frac{d^3u_0}{d\tau^3}+A(0)\frac{d^2u_0}{d\tau^2}+B(0)\frac{du_0}{d\tau}=0\,, \qquad (15)_0$$

$$\frac{d^3u_k}{d\tau^3}+A(0)\frac{d^2u_k}{d\tau^2}+B(0)\frac{du_k}{d\tau}=\Phi_k(\tau)\,,\quad k=3,4,\ldots, \qquad (15)_k$$

$$\frac{d^3w_0}{ds^3}+A(1)\frac{d^2w_0}{ds^2}+B(1)\frac{dw_0}{ds}=0\,, \qquad (16)_0$$

$$\frac{d^3w_k}{ds^3}+A(1)\frac{d^2w_k}{ds^2}+B(1)\frac{dw_k}{ds}=P_k(s)\,,\ k=3,4,\ldots, \qquad (16)_k$$

где $\Phi_k(\tau)$ выражается через $\overset{(j)}{u}_i(\tau)$ $(j=0,1,2;\ i<k)$, $P_k(s)$ выражается через $\overset{(j)}{w}_i(s)$ $(j=0,1,2;\ i<k)$

Для однозначного определения $y_k(t)$, $u_k(\tau)$, $w_k(\mathrm{s})$ подставим разложения (11), (12), (13) в краевые условия (2) и приравняем выражения стоящих при одинаковых степенях ε:

$$\alpha_{10}y_0(0)+\alpha_{11}\big[y'_0(0)+\dot u_0(0)\big]+\beta_{10}y_0(1)=a_1, \qquad (17)$$

$$\alpha_{20}y_0(0)+\alpha_{21}\big[y'_0(0)+\dot u_0(0)\big]+\beta_{20}y_0(1)+\beta_{21}\big[y'_0(1)+\dot w_0(0)\big]=a_2, \qquad (18)$$

$$\alpha_{30}y_0(0)+\beta_{30}y_0(1)+\beta_{31}\big[y'_0(1)+\dot w_0(0)\big]=a_3, \qquad (19)$$

$$\alpha_{10}\big[y_k(0)+u_{k-1}(0)\big]+\alpha_{11}\big[y'_k(0)+\dot u_k(0)\big]+\beta_{10}\big[y_k(1)+w_{k-1}(0)\big]=0, \qquad (20)$$

$$\alpha_{20}\big[y_k(0)+u_{k-1}(0)\big]+\alpha_{21}\big[y'_k(0)+\dot u_k(0)\big]+\beta_{20}\big[y_k(1)+w_{k-1}(0)\big]+ \qquad (21)$$
$$+\beta_{21}\big[y'_k(1)+\dot w_k(0)\big]=0,$$

$$\alpha_{30}\left[y_k(0)+u_{k-1}(0)\right]+\beta_{30}\left[y_k(1)+w_{k-14}(0)\right]+\beta_{31}\left[y'_k(1)+\dot{w}_k(0)\right]=0, \tag{22}$$

Теперь определим вырожденную задачу. Без каких-либо дополнительных соображений мы не можем сформулировать краевые условия для невозмущенного (вырожденного) уравнения $(14)_0$:

$$B(t)y'_0(t)+C(t)y_0(t)=F(t), \tag{23}$$

получаемого из (1) при $\varepsilon=0$. Такие дополнительные соображения мы можем получить из теоремы 1 работы [7]. Из этой теоремы следует, что предельная функция для $y(t,\varepsilon)$ при $\varepsilon\to 0$ будет содержать линейную комбинацию величин a_i $(i=1,2,3)$, так как коэффициенты при a_i $(i=1,2,3)$ имеют порядок $O(1)$ при $\varepsilon\to 0$. Следовательно, краевые условия для решения $y_0(t)$ вырожденного уравнения (23) можно будет получить из (2) путем исключения коэффициентов $y'_0(0)+\dot{u}_0(0)$, $y'_0(1)+\dot{w}_0(0)$ из (17)-(19), т.е.

$$Hy_0\equiv\tilde{\alpha}y_0(0)+\tilde{\beta}y_0(1)=\tilde{a} \tag{24}$$

где

$$\begin{gathered}\tilde{\alpha}=\alpha_{11}\alpha_{30}\beta_{21}-\alpha_{11}\alpha_{20}\beta_{31}+\alpha_{21}\alpha_{10}\beta_{31},\\ \tilde{\beta}=\left(\beta_{21}\beta_{30}\alpha_{11}-\beta_{31}\beta_{20}\alpha_{11}+\beta_{31}\beta_{10}\alpha_{21}\right),\\ \tilde{a}=\alpha_{21}\beta_{31}a_1-\alpha_{11}\beta_{31}a_2+\alpha_{11}\beta_{21}a_3,\end{gathered} \tag{25}$$

Условия I) и (4) позволяют определить решение $y_0(t)$ задачи (23), (24) однозначно на отрезке $0\le t\le 1$:

$$y_0(t)=y_0(0)\exp\left(-\int_0^t\frac{C(x)}{B(x)}dx\right)+\int_0^t\frac{F(s)}{B(s)}\exp\left(-\int_s^t\frac{C(x)}{B(x)}dx\right)ds, \tag{26}$$

где

$$y_0(0)=\frac{\tilde{a}-\tilde{\beta}\displaystyle\int_0^1\frac{F(s)}{B(s)}\exp\left(-\int_s^1\frac{C(x)}{B(x)}dx\right)ds}{\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}\exp\left(-\displaystyle\int_0^1\frac{C(x)}{B(x)}dx\right)}. \tag{27}$$

IV. Пусть: $a_1-L_1y_0\neq 0$ $\quad a_3-L_3y_0\neq 0.$

Из (17) находим:

$$\dot{u}_0(0)=\frac{a_1-\alpha_{10}y_0(0)-\alpha_{11}y'_0(0)-\beta_{10}y_0(1)}{\alpha_{11}}=\frac{a_1-L_1y_0}{\alpha_{11}} \tag{28}$$

Обратимся теперь к уравнению $(2.15)_0$ и начальному условию (28). Решим задачу $(2.15)_0$ (28), используя корень $\mu=\mu_2$, где $\operatorname{Re}\mu_2<0$. Тогда имеем

$$\dot{u}_0(\tau)=\frac{a_1-L_1y_0}{\alpha_{11}}\cdot e^{\mu_2(0)\tau},\ \tau\ge 0. \tag{29}$$

Откуда, используя требования $u_0(\tau)\to 0$, при $\tau\to+\infty$, получим

$$u_0(\tau)=\frac{a_1-L_1y_0}{\alpha_{11}\mu_2(0)}e^{\mu_2(0)\tau},\ \tau\ge 0,\quad u_0(0)=\frac{a_1-L_1y_0}{\alpha_{11}\mu_2(0)} \tag{30}$$

Тогда из $(2.16)_0$, используя корень $\mu=\mu_3$ $(\operatorname{Re}\mu_3>0)$, требование $w_0(s)\to 0$ ($s\to-\infty$), а также условие (19), получаем

$$\dot{w}_0(s)=\frac{a_3-L_3y_0}{\beta_{31}}.e^{\mu_3(1)s},\ s\le 0,\tag{31}$$

$$w_0(s)=\frac{a_3-L_3y_0}{\beta_{31}\mu_3(1)}.e^{\mu_3(1)s},\ s\le 0,\ \ w_0(0)=\frac{a_3-L_3y_0}{\beta_{31}\mu_3(1)}\tag{32}$$

Из формул (29)-(32) получим экспоненциальные оценки:

$$\left|\overset{(j)}{u}_0(\tau)\right|\le Ke^{\overline{\mu}_2(0)\tau},\ \tau\ge 0,\ \left|\overset{(j)}{w}_0(s)\right|\le Ke^{\overline{\mu}_3(1)s},\ s\le 0,\quad j=0,1,2.$$

Итак, построены члены асимптотики нулевого порядка.

Определение следующих членов асимптотики проходит по такой же схеме для любого $k\ge 2$. Тогда из $(2.14)_k$ и из условий (21),(22) получим задачу

$$B(t)y_k'(t)+C(t)y_k(t)=-A(t)y_{k-1}''(t)-y_{k-2}'''(t),$$

$$Hy_k\equiv\widetilde{\alpha}y_k(0)+\widetilde{\beta}y_k(1)=-\widetilde{\alpha}u_{k-1}(0)-\widetilde{\beta}w_{k-1}(0).$$

Отсюда однозначно определяется $y_k(t)$ при $0\le t\le 1$.

Из $(15)_k$, $(16)_k$ получаем следующие уравнения

$$\frac{d^3u_k}{d\tau^3}+A(0)\frac{d^2u_k}{d\tau^2}+B(0)\frac{du_k}{d\tau}=e^{\mu_2(0)\tau}\,\widetilde{\Phi}_k(\tau),\ \ \tau\ge 0\ ,\tag{33}$$

$$\frac{d^3w_k}{ds^3}+A(1)\frac{d^2w_k}{ds^2}+B(1)\frac{dw_k}{ds}=\widetilde{P}_k(s)e^{\mu_3(1)s},\ \ s\le 0.\tag{34}$$

Решая (33), (34) с учетом условий

$$\dot{u}_k(0)=\frac{-\alpha_{10}u_{k-1}(0)-\beta_{10}w_{k-1}(0)-L_1y_k}{\alpha_{11}},\quad u_k(\tau)\to 0\ \text{при}\ \tau\to+\infty,$$

$$\dot{w}_k(0)=\frac{-\alpha_{30}u_{k-1}(0)-\beta_{30}w_{k-1}(0)-L_3y_k}{\beta_{31}},\quad w_k(s)\to 0\ \text{при}\ s\to-\infty,$$

получаем

$$\dot{u}_k(\tau)=\dot{u}_k(0)e^{\mu_2(0)\tau}+\tau\,x_k(\tau)e^{\mu_2(0)\tau},\quad \tau\ge 0,\tag{35}$$

$$\dot{w}_k(s)=\dot{w}_k(0)e^{\mu_3(1)s}+s\,z_k(s)e^{\mu_3(1)s},\quad s\le 0.\tag{36}$$

$$u_k(\tau)=\frac{\dot{u}_k(0)}{\mu_2(0)}e^{\mu_2(0)\tau}-\int_\tau^\infty p\,x_k(p)e^{\mu_2(0)p}dp,\ \ \tau\ge 0,$$

$$w_k(s)=\frac{\dot{w}_k(0)}{\mu_3(1)}e^{\mu_3(1)s}-\int_s^{-\infty} p\,z_k(p)e^{\mu_3(1)p}dp,\ \ s\le 0\tag{37}$$

и начальные условия

$$w_k(0)=\frac{\dot{w}_k(0)}{\mu_3(1)}-\int_0^{-\infty} p\,z_k(p)e^{\mu_3(1)p}dp,\ \ u_k(0)=\frac{\dot{u}_k(0)}{\mu_2(0)}-\int_0^{\infty} p\,x_k(p)e^{\mu_2(0)p}dp,$$

Из (35), (36), (37) вытекает справедливость следующих оценок

$$\left|\overset{(j)}{u}_k(\tau)\right|\le Ke^{\overline{\mu}_2(0)\tau},\ \tau\ge 0,\ \left|\overset{(j)}{w}_k(s)\right|\le Ke^{\overline{\mu}_3(1)s},\ s\le 0,\quad j=0,1,2$$

Таким образом, члены разложения (6) при всех $k=1,2,...$ построены.

3 Доказательство справедливости асимптотического разложения решения краевой задачи. Для доказательства справедливости асимптотического разложения решения задачи (1), (2) определим члены разложения (2.6), (11) - (13) до номера N включительно и образуем частичную сумму $Y_N(t,\varepsilon)$ разложения (6):

$$Y_N(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{N}\varepsilon^k y_k(t)+\varepsilon\sum_{k=0}^{N}u_k\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\varepsilon^k+\varepsilon\sum_{k=0}^{N}w_k\left(\frac{t-1}{\varepsilon}\right)\varepsilon^k. \qquad (38)$$

Теорема 1. Пусть выполнены условия 1^0-4^0. Тогда при достаточно малых $\varepsilon>0$ на сегменте $0\le t\le 1$ решение задачи (1),(2) существует, единственно и удовлетворяет оценке $y(t,\varepsilon)=Y_N(t,\varepsilon)+O\left(\varepsilon^{N+1}\right),\ 0\le t\le 1.$

Из (38) следует, что в точках $t=0$ и $t=1$ производная $y''(t,\varepsilon)$ имеет полюсы по ε: $y''(0,\varepsilon)=O\left(\frac{\Delta_0}{\varepsilon}\right)$, $y''(1,\varepsilon)=O\left(\frac{\Delta_1}{\varepsilon}\right)$, а решение $y(t,\varepsilon)$ обладает явлением граничного скачка первого порядка: $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}y'(0,\varepsilon)-y_0'(0)=\Delta_0$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}y'(1,\varepsilon)-y_0'(1)=\Delta_1$, где

$$\Delta_0=\frac{a_1-L_1y_0}{\alpha_{11}},\qquad \Delta_1=\frac{a_3-L_3y_0}{\beta_{31}},$$

Причем $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}y(t,\varepsilon)=y_0(t),\ 0\le t\le 1,\ \lim\limits_{\varepsilon\to 0}y^{(j)}(t,\varepsilon)=y_0^{(j)}(t),\ 0<t<1,\ j=1,2.$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Касымов К.А., Нургабыл Д.Н. Асимптотическое поведение решений линейных сингулярно возмущенных общих неразделенных краевых задач, имеющих начальный скачок // Украинский. матем. журнал.- 2003.- Т. 55. - №11, С. 1496-1508

[2] Касымов К.А., Нургабыл Д.Н. Асимптотические оценки решения сингулярно возмущенной краевой задачи с начальным скачком для линейных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения -2004. -Т.40. - № 4, С. 597-607

[3] Нургабыл Д.Н. Построение решения сингулярно возмущенной краевой задачи имеющего начальный скачок // Вестник Кыргызского государственного национального университета. -2001. -Т.3, - №.6, С.173-177.

[4] Дауылбаев М.К. Асимптотические оценки решений интегро-дифференциальных уравнений с малым параметром. // Математический журнал. Институт математики МОН РК. -2008,-№4,-Т.8, С. 78-83.

[5] Касымов К.А., Дауылбаев М.К., Атахан Н. Асимптотическая сходимость решения краевых задач для сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнений. // Вестник КазНУ им. аль-Фараби, серия математика, механика, информатика, № 3 (74). 2012. С. 28-34

[6] Duisebek Nurgabyl. Asymptotic estimates for the Solution of a Restoration Problem with Initial Jump// Journal of Applied Mathematics. Vol. 2014 (2014), Article ID 956402, 11 pages

[7] Нургабыл Д.Н., Нургабылов Е.Д. Об одном явлении граничного скачка сингулярно возмущенной краевой задачи // Вестник КарГУ им. Букетова, серия Математика, -2014, №2. С.91-95.

REFERENCES

[1] Kasymov K.A., Nurgabyl D.N. Asymptotic Behavior of Solutions of Linear Singularly Perturbed General Separated Boundary-Value Problems with Initial Jump // Ukrainian Mathematical Journal. -2003,-Vol. 55, -No. 11, pp. 1777-1792

[2] Kasymov K.A., Nurgabyl D.N. Asymptotic estimates of the solution of a singularly perturbed boundary value problem with initial jump for linear differential equations, Differential equations, -2004,-Vol. 40 -No. 4 . pp. 597-607.

[3] Nurgabyl D. N. Construction of solution of the singularly perturbed boundary problem with initial jump // Bulletin of the Kirghiz State National University. – 2001. – Vol.3., №6. – C.173-177

[4] Dauylbaev M.K. Asymptotic estimates of solutions of the integro-differential equations with small parameter // Mathematical Journal. -2008, -Vol.8. -No4

[5] Kasymov K.A., Dauylbaev M.K., Atahan N. Asymptotic convergence of the solution of a singularly perturbed boundary value problem integro-differential equations // Bulletin of the KazNU. Ser. math., mech. Almaty, No 3(2012). -pp. 28-34

[6] Duisebek Nurgabyl. Asymptotic estimates for the Solution of a Restoration Problem with Initial Jump// Journal of Applied Mathematics. Vol. 2014 (2014), Article ID 956402, 11 pages

[7] Nurgabyl D., Nurgabylov E.D. A phenomenon of the jump boundary singularly perturbed boundary value problem // Bulletin of the KarGU, Series Mathematics, -2014, -№2.-S.91-95.

ШЕКАРАЛЫҚ СЕКІРІСІ БАР ЕРЕКШЕ АУЫТҚЫҒАН ЖАЛПЫ ШЕКАРАЛЫҚ ЕСЕП ШЕШІМІНІҢ АСИМПТОТИКАСЫ

Д.Н. Нұрғабыл[1], А.Б. Уаисов[2], Б. Нүсіпханұлы[1]

[1]І.Жансүгіров атындағы Жетісу мемлекеттік университеті, Талдықорған,
[2]Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы

Түйін сөздер: асимптотика, шекаралық есеп, қосымша сипаттамалық теңдеу, туындалған, ауытқыған есептер, бастапқы секіріс құбылысы.

Аннотация. Бұл жұмыста кейбір туындыларының алдында кішкене параметрі бар сызықты жай дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін жалпы шекаралық есеп қарастырылған. Ауытқымаған теңдеудің түбірі шартты орнықты болған жағдайда, яғни оған сәйкес келетін қосымша сипаттамалық теңдеудің түбірлерінің нақты бөліктерінің таңбаларының қарама қарсы болуы шартында ерекше ауытқыған жалпы шекаралық есеп шешімінің асимптотикасын құру әдісі ұсынылған. Қарастырылып отырған ерекше ауытқыған шекаралық есеп шешімінің асимптотикалық жіктелісі регуляр қатардан және екі шеттік қатардан тұратыны көрсетілген. Туындалған есеп шешімі үшін шекаралық шарт берілген шекаралық есептің шекаралық шарттарынан туындылардың $t=0$ және $t=1$ нуктелеріндегі мәндерін шығарып тастау арқылы табылған. Аз параметрі нөлге ұмтылғанда жалпы шекаралық есеп шешімінің асимптотикалық жуықтауы кезкелген дәлдікке дейін құрылған.

Жалпы шекаралық есеп шешімінің бар болуы, жалғыздығы және бірқалыпты асимптотикалық жуықтауының ақиқаттылығы туралы теорема дәлелденген. Ауытқыған шекаралық есеп шешімінің туындыларының өсуі $\varepsilon \to 0$ анықталған. Шекаралық секіріс құбылысы сипатталған, секірістің қарастырылып отырған кесіндінің екі шетінде де пайда болатыны дәлелденген. Шекаралық секірістің шамалары анықталған.

Поступила 04.04.2016 г.

Publication Ethics and Publication Malpractice in the journals of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan

For information on Ethics in publishing and Ethical guidelines for journal publication see http://www.elsevier.com/publishingethics and http://www.elsevier.com/journal-authors/ethics.

Submission of an article to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan implies that the described work has not been published previously (except in the form of an abstract or as part of a published lecture or academic thesis or as an electronic preprint, see http://www.elsevier.com/postingpolicy), that it is not under consideration for publication elsewhere, that its publication is approved by all authors and tacitly or explicitly by the responsible authorities where the work was carried out, and that, if accepted, it will not be published elsewhere in the same form, in English or in any other language, including electronically without the written consent of the copyright-holder. In particular, translations into English of papers already published in another language are not accepted.

No other forms of scientific misconduct are allowed, such as plagiarism, falsification, fraudulent data, incorrect interpretation of other works, incorrect citations, etc. The National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan follows the Code of Conduct of the Committee on Publication Ethics (COPE), and follows the COPE Flowcharts for Resolving Cases of Suspected Misconduct (http://publicationethics.org/files/u2/New_Code.pdf). To verify originality, your article may be checked by the Cross Check originality detection service http://www.elsevier.com/editors/plagdetect.

The authors are obliged to participate in peer review process and be ready to provide corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. All authors of a paper should have significantly contributed to the research.

The reviewers should provide objective judgments and should point out relevant published works which are not yet cited. Reviewed articles should be treated confidentially. The reviewers will be chosen in such a way that there is no conflict of interests with respect to the research, the authors and/or the research funders.

The editors have complete responsibility and authority to reject or accept a paper, and they will only accept a paper when reasonably certain. They will preserve anonymity of reviewers and promote publication of corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. The acceptance of a paper automatically implies the copyright transfer to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.

The Editorial Board of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan will monitor and safeguard publishing ethics.

Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайте:

www:nauka-nanrk.kz

http://www.physics-mathematics.kz

Редактор *М. С. Ахметова*
Верстка на компьютере *А.М. Кульгинбаевой*

Подписано в печать 25.05.2016.
Формат 60x881/8. Бумага офсетная. Печать – ризограф.
10 п.л. Тираж 300. Заказ 3.

Национальная академия наук РК
050010, Алматы, ул. Шевченко, 28, т. 272-13-18, 272-13-19