ISSN 1991-346X

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ

Х А Б А Р Л А Р Ы

ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

N E W S

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА СЕРИЯСЫ

♦

СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

♦

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

4 (308)

ШІЛДЕ – ТАМЫЗ 2016 ж.
ИЮЛЬ – АВГУСТ 2016 г.
JULY – AUGUST 2016

1963 ЖЫЛДЫҢ ҚАҢТАР АЙЫНАН ШЫҒА БАСТАҒАН
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1963 ГОДА
PUBLISHED SINCE JANUARY 1963

ЖЫЛЫНА 6 РЕТ ШЫҒАДЫ
ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД
PUBLISHED 6 TIMES A YEAR

АЛМАТЫ, ҚР ҰҒА
АЛМАТЫ, НАН РК
ALMATY, NAS RK

«Известия НАН РК. Серия физико-математическая». ISSN 1991-346X
Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы)
Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации и архивов Министерства культуры и информации Республики Казахстан **№5543-Ж**, выданное 01.06.2006 г.

Периодичность: 6 раз в год.
Тираж: 300 экземпляров.

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, ком. 219, 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18, www:nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

---

Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75.

News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physical-mathematical series.
ISSN 1991-346X
Owner: RPA "National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan" (Almaty)
The certificate of registration of a periodic printed publication in the Committee of information and archives of the Ministry of culture and information of the Republic of Kazakhstan N 5543-Ж, issued 01.06.2006

Periodicity: 6 times a year
Circulation: 300 copies

Editorial address: 28, Shevchenko str., of. 219, 220, Almaty, 050010, tel. 272-13-19, 272-13-18,
www:nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

Address of printing house: ST "Aruna", 75, Muratbayev str, Almaty

N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 3, Number 307 (2016), 101 – 109

ABOUT OF THE DISCRETE INEQUALITIES

K.B. Bapaev [1], S.S. Slamzhanova[2], G.B. Isaeva[3]

[1] Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
[2]Zhetysu State University after I.Zhansugurov, Taldykorgan, Kazakhstan
[3]Kaspian Public University, Taldykorgan, Kazakhstan

Keywords: discrete inequality, subadditive property, submultiplicativity.

Abstract. In the study of the behavior of solutions of discrete dynamical systems, many problems lead us to the resolution of some type of discrete inequalities. This led us to the discretization of differential, integral, integro-differential inequalities and inequalities in the study of discrete investigations appear when discrete dynamical systems.

It is known that in the study of various properties of discrete-dynamical systems solutions (DDS), the problem is often reduced to the evaluation of functions that satisfy one or another discrete inequalities. Research Success often depends on the ability to "solve" the corresponding inequality, i.e. to obtain an estimate of functions satisfying a discrete inequality, in terms of known parameters and functions included in it. This leads to the sampling differential integral and integro - differential inequalities, which have received development howling even in fundamental works Gronuoll 1919, S.A. Chiaplygin 1932, T.Vazhevskii 1948 and other), And on the study of discrete inequalities appearing when studies of discrete dynamical systems. Theorems of discrete inequalities, as the theorem on continuous inequalities, estimates turned out to be an inexhaustible source of convenience in constructing algorithms for qualitative and quantitative analysis of real processes.

The artistic heritage of the scientists working in this field, summarized in a number of works (Ravi Agarwal 2000., B.Gr. Pachpatte 2006).

In the present work we obtained a number of new solutions of nonlinear discrete inequalities, when the right part satisfies certain conditions such as subadditive and submultiplicative.

УДК 517.849

О ДИСКРЕТНЫХ НЕРАВЕНСТВАХ

К.Б. Бапаев [1] , С.С. Сламжанова[2], Г.Б.Исаева[3]

[1]Институт математики и математического моделирования МОН РК;
[2]Жетысуский государственный университет им. И.Жансугурова;
[3]Каспийский общественный университет

Ключевые слова: дискретные неравенства, субаддитивность, субмультипликативность.

Аннотация. При изучении поведения решений дискретных динамических систем многие задачи приводят нас к разрешению того или иного типа дискретных неравенств. Это привело нас к дискретизации дифференциальных, интегральных, интегро-дифференциальных неравенств и на исследование дискретных неравенств появляющихся при исследований дискретных динамических систем.

Известно, что при исследовании различных свойств решений дискретно-динамических систем (ДДС) задача часто сводится к оценке функций, удовлетворяющих тем или иным дискретным неравенствам. Успех исследования нередко зависит от возможности «разрешить» соответствующее неравенство, т.е. получить оценку функций, удовлетворяющей дискретному неравенству, через известные параметры и функции, входящие в него. Это приводит к дискретизации дифференциальных интегральных и интегро - дифференциальных неравенств, которые получили свое развитие еще в фундаментальных трудах Гроноулла 1919г. С.А. Чаплыгина 1932 г., Т.Важевского 1948 г. и др.), и на исследование дискретных неравенств, появляющихся при исследований дискретных динамических систем. Теоремы о дискретных неравенствах как теоремы о непрерывных неравенствах оказались неисчерпаемым источником оценок удобных при построении алгоритмов качественного и количественного анализа реальных процессов.

Творческое наследие ученых, работающих в этой области, подытожено в ряде работает (Ravi Agarwal 2000 г., B.Gr.Pachpatte 2006 г).

В предлагаемой работе нами получены решения нескольких новых нелинейных дискретных неравенств, когда правые части удовлетворяют определенные условия типа субаддитивности и субмультипликативности.

При изучении поведения решений дискретных динамических системах многие задачи приводят нас к решению того или иного типа дискретных неравенств. В связи с этим, начиная с 60-го года XX-века, математики обратили внимание [2, 3, 5, 6–14] на дискретизацию дифференциальных, интегральных и интегро-дифференциальных неравенств, [1,4,15,17] и на исследование дискретных неравенств появляющихся при исследовании дискретных динамических систем.

В этой работе нами получены несколько новых дискретных неравенств.

Для изложения результатов в начале приведем некоторые основные понятия и определения заимствованные из [9].

Пусть $N_0 = \{0,1,...\}$, выражение $\sum_{s=0}^{n-1} f(s)$ представляет собой решение линейных дискретных уравнений вида $\Delta x(n) = f(n)$, $\forall n \in N_0$ с начальным условием $x(0) = x_0 = 0$, где Δ - разностный оператор. Здесь предполагается, что $\sum_{s=0}^{0-1} f(s) = 0$.

Выражение $\prod_{s=0}^{0-1} \varphi(s)$ представляет собой решение линейных дискретных уравнений вида $x_{n+1} = \varphi(n) x_n$, для $\forall n / n \in N_0$ с начальным условием $x_0 = 1$; здесь предполагается, что $\prod_{s=1}^{0-1} \varphi(s) = 1$.

Нам в дальнейшем понадобится следующая

Лемма 1 (Дискретный аналог неравенства Гронуолла-Беллмана).

Пусть $\omega(m)$- положительная, монотонно-неубывающая и $x_n, f(n)$- неотрицательная, монотонно-неубывающая, непрерывные функции для $\forall n,\ n \in N_0$.

Если выполняется неравенство

$$x_n \le \omega(n) + \sum_{s=0}^{n-1} f(s) x_s,\ \forall n \in N_0 \tag{1}$$

Тогда справедливо следующее неравенство

$$x_n = \omega(n) \prod_{s=0}^{n-1} \left[1 + f(s)\right],\ \forall n \in N_0 \tag{2}$$

доказательство приведено в [9].

В дальнейшем мы займемся различными нелинейными обобщениями леммы 1 для определенного класса функций.

Определение [15, 20]. Говорят, что функция $H : N_o \to [0, \infty)$ из класса *F*(т.е. $H \in F$), если

1) $H(n)$ положительная, неубывающая, непрерывная для $\forall n / n \in N_0$;

2) $\frac{1}{\nu} H(n) \le H\left(\frac{u}{\nu}\right)$, для $u > 1,\ \nu > 1/u,\ \nu \in N$

следующая теорема является нелинейным обобщением леммы 1.

Теорема 1. Пусть $x_n, f(n)$ и $g(n)$: $N_o \to [0,\infty)$ непрерывные функции $\omega(n)$ положительная, монотонно-неубывающая, непрерывная функция, определенная в N_0 и $H \in F$. Если выполняется следующее неравенство

$$x_n \le \omega(n) + \sum_{s=0}^{n-1} f(s)x_s + \sum f(s)H\left(x_s + \sum_{t=0}^{s} g(t)H(x_t H(x_t t))\right), \tag{3}$$

тогда справедливо неравенство

$$x_n \le \omega(n)\left[1 + \sum_{s=1}^{n-1} f(s)H\left(G^{-1}\left[G(1) + \sum_{t=0}^{s}(f(s)+g(s))\right]\right)\right] \tag{4}$$

Для $\forall n \in N_0$, при которых

$$G(1)\sum_{s=0}^{n-1}(f(s)+g(s)) \in Dom(G^{-1}) \tag{5}$$

где $G(s) = \int_{s_0}^{t_0} \frac{H}{H(t)}, \quad s \ge s_0 > 0$.

Доказательство. Поскольку $\omega(n)$ положительная, монотонно-неубывающая функция и $H \in F$, то (3) можно переписать в виде

$$\frac{x_n}{\omega(n)} \le 1 + \sum_{s=0}^{n-1} f(s)H\left(\frac{x_s}{\omega(n)} + \sum_{t=0}^{s} g(t)H\left(\frac{x_t}{\omega(n)}\right)\right) \tag{6}$$

Обозначим правую часть (6) через u_n; Тогда $\Delta u_n = f(n)H\left(\frac{x_n}{\omega(n)} + \sum_{t=0}^{n-1} g(t)H\left(\frac{x_t}{\omega(t)}\right)\right)$, *u(0)*=1 из которого вытекает

$$\Delta u_n \le f(n)H\left(u_n + \sum_{t=0}^{n-1} g(t)H(u_n)\right) \tag{7}$$

Полагая

$$V_n = u_n + \sum_{t=0}^{n-1} g(t)H(u_t)\ ,\ V_0 = 0 \tag{8}$$

и учитывая, что $u_n \le V_n$, получим $\Delta V_n = \Delta u_n + g(n)H(u_n) \le (f(n)+g(n))H(V_n)$.Деля обе части последнего на $H(V_n)$, учитывая неравенство

$G(V_{n+1}) - G(V_n) = \int_{v_n}^{v_{n+1}} \frac{ds}{H(s)} \le \frac{\Delta V_n}{H(V_n)}$ и суммируя полученное неравенство по n от 0 по $n-1$.

Имеем $$G(V_n) - G(V_0) \le \sum_{s=0}^{n-1}(f(s)+g(s))$$

или

$$v_n \le G^{-1}\left(G(1) + \sum_{s=0}^{n-1}(f(s)+g(s))\right) \tag{9}$$

Тогда из (6), (7) и (8) получим

$$\Delta u_n \le f(n)H\left(G^{-1}\left[G(1)+\sum_{s=0}^{n-1}\left[f(s)+g(s)\right]\right]\right). \tag{10}$$

Суммируя обе части (10) по n от 0 по $n-1$ и подставляя его в (6), получим неравенство (4).

Теорема 2. Пусть $x_n, f(n), g(n)$ и $h(n): N_0 \to [0,\infty)$ непрерывные функции, $H \in F$ и пусть $W(r)$положительная, непрерывная субмультипликативная [13], по монотонно-неубывающая функция для $\forall r \,/\, r \ge 0$, $r \in N_0$. Если выполняется неравенства

$$x_n \le x_0 + \sum_{s=0}^{n-1} f(s)H\left(x_n + \sum_{t=0}^{s} g(t)H(x_t)\right) + \sum_{s=0}^{n-1} h(s)W(x_s) \tag{11}$$

для $\forall n / n \in N_0$, где $x_0 = const > 0$, тогда справедливо неравенство

$$x_n \le \Omega^{-1}\left[\Omega(x_0) + \sum_{s=0}^{n-1} h(s)W\left(1+\sum_{s=0}^{s} f(t)H\left(G^{-1}\left[G(1)+\sum_{\tau=0}^{t}\left(f(\tau+g(\tau))\right)\right]\right)\right)\right]\cdot$$

$$\times\left[1+\sum_{s=0}^{n-1} f(s)H\left(G_\tau^{-1}\left[G_\tau(1)+\sum_{\tau=0}^{s}\left(f(s)+g(t)\right)\right]\right)\right] \tag{12}$$

для $\forall n / n \in N_0$, при которых $G(1)+\sum_{t=0}^{n-1}\left(f(t)+g(t)\right) \in Dom\left(G^{-1}\right)$и

$$\Omega\,(x_0) + \sum_{s=0}^{n-1} h(s)W\left(1+\sum_{t=0}^{s} f(t)H\left(G^{-1}\right)\right)\left[G(1)+\sum_{\tau=0}^{t}\left(f(\tau)+g(\tau)\right)\right]Dom\left(\Omega^{-1}\right)$$

Здесь G – функция, определенная в теореме 1, а Ω определяется из равенства

$$\Omega(\tau) = \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{ds}{W(s)},\ r \ge r_0 > 0. \tag{13}$$

Доказательство. Полагая $\omega(n) = x_0 + \sum_{s=0}^{n-0} h(s)w(x_s)$, $\omega(0) = x_0$ перепишем (11) в виде

$$x_n \le \omega(n) + \sum_{s=0}^{n-1} f(s)H\left(x_s + \sum_{t=0}^{s} g(t)H(x_t)\right) \tag{14}$$

тогда, учитывая, что $\omega(n)$, H удовлетворяют условиям теоремы 1 и применяя к (14) теорему 1, получим

$$x_n \le \omega(n)\left[1+\sum_{s=0}^{n-1} f(s)H\left(G^{-1}\left[G(1)+\sum_{t=0}^{s}\left(f(t)+g(t)\right)\right]\right)\right] \tag{15}$$

Отсюда по субмультипликативности функций Wмы имеем

$$W(x_n) \le W(\omega(n))W\left[1+\sum_{s=0}^{n-1} f(s)H\left(G^{-1}\left[G(1)+\sum_{t=0}^{s}\left(f(t)+g(t)\right)\right]\right)\right]$$

или:

$$\frac{h(n)W(x_n)}{W(\omega(n))} \le h(n)W\left(1+\sum_{s=0}^{n-1} f(s)H\left(G(1)+\sum_{t=0}^{s}\left(f(t)+g(t)\right)\right)\right) \tag{16}$$

Теперь учитывая неравенство

$$\Omega(\omega(n+1))-\Omega(\omega(n))=\int\limits_{\omega(n)}^{\omega(n+1)}\frac{ds}{W(s)}\leq\frac{h(n)W(x_n)}{W(\omega(n))}$$

(16) можно переписать ввиде

$$\Omega(\omega(n+1))-\Omega(\omega(n))\leq h(n)W\left(1+\sum_{s=0}^{n-1}f(s)H\left(G^{-1}\left[G(1)+\sum_{t=0}^{s}(f(t)+g(t))\right]\right)\right)$$

из которого после суммирования по n - от 0 по n-1вытекает неравенство

$$\omega(n)\leq\Omega^{-1}\left[\Omega(x_0)+\sum_{s=0}^{n-1}h(s)W\left(1+\sum_{\tau=0}^{t}(t(\tau)+g(\tau))\right)\right]$$

подставляя это значение $\omega(n)$ в (15) получим (12) тем самым теорема доказана.

Теорема 3. Пусть x_n, $f(n)$, $g(n)$ и $\omega(n)$ удовлетворяют условиям теоремы 1 и пусть *H(n)* положительная, непрерывная, монотонно-неубывающая субаддитивная [13], субмультипликативная функция для $\forall n / n\in N_0$, *H(0)=0* и H^{-1} обратная функция к *H*.

Если выполняется неравенство

$$x_n\leq\omega(n)+H^{-1}\left[\sum_{s=0}^{n-1}f(s)H(x_s)+\sum_{s=0}^{n-1}f(s)\left(\sum_{t=0}^{s}g(t)H(x_t)\right)\right]\tag{18}$$

для $\forall n / n\in N_0$, тогда справедливо неравенство:

$$x_n\leq\omega(n)+H^{-1}\left[1+\sum_{s=0}^{n-1}f(s)\prod_{t=0}^{s}[1+f(t)+g(t)]\right]\tag{19}$$

$\forall n / n\in N_0$ при которых

$$1+\sum_{s=0}^{n-1}f(s)\prod_{t=0}^{s}[1+f(t)+g(t)]\in Dom(H^{-1}).$$

Доказательство. Поскольку *H*- субаддитивная, субмультипликативная, то (18) можно переписать в виде

$$H(x_n)\leq H(\omega(n))+\sum_{s=0}^{n-1}f(s)H(x_s)+\sum_{s=0}^{n-1}f(s)\left(\sum_{t=0}^{s}g(t)H(x_t)\right)\tag{20}$$

Учитывая свойства $\omega(n)$ и *H* из (20), имеем

$$\frac{H(x_n)}{H(\omega(n))}\leq 1+\sum_{s=0}^{n-1}f(s)\frac{H(x_s)}{H(\omega(s))}+\sum_{s=0}^{n-1}f(s)\sum_{t=0}^{s}g(t)\frac{H(x_t)}{H(\omega(t))}\tag{21}$$

Теперь правую часть (21) обозначим через *u(n)*.

Тогда $\Delta u_n=f(n)\left[\frac{H(x_n)}{H(\omega(n))}+\sum_{s=0}^{n-1}g(t)\frac{H(x_t)}{H(\omega(t))}\right]$, *u(n)=u* из этого равенства вытекает

$$\Delta u_n\leq f(n)\left[u_n+\sum_{t=0}^{n-1}g(t)u(t)\right]\tag{22}$$

Полагая

$$V(n)=u(n)+\sum_{\tau=0}^{n-1}g(t)u(t),\ V(0)=1\tag{23}$$

из неравенства (22) и $u(n) \le V(n)$ получим $\Delta V(n) \le \left(f(n) + g(n)\right)V(n)$ из чего следует справедливость неравенства

$$V(n) \le \prod_{t=0}^{n-1}\left[1 + f(t) + g(t)\right] \tag{24}$$

учитывая (21), подставляя (24) в (22) и суммирую (по n от 0 по $n\text{-}1$) полученные при этом неравенства, мы приходим к

$$u(n) \le 1 + \sum_{s=0}^{n-1} f(s)\prod_{t=0}^{s}\left[1 + f(t) + g(t)\right]$$

подставляя это значение $u(n)$ в (21) и переходя обратно к H^{-1}, убеждаемся в справедливости теоремы.

Теорема 4. Пусть x_n, $f(n)$, $g(n)$, $h(n)$ и $\omega(n)$ функции, определенные по условиям теоремы 2 и H , H^{-1} по условиям теоремы 3.

Если выполняется неравенство

$$x_n \le x_0 + H^{-1}\left[\sum_{s=0}^{n-1} f(s)H(x_s) + \sum_{s=0}^{n-1} f(s)\left(\sum_{t=0}^{s} g(t)H(x_t)\right)\right] + \sum_{s=0}^{n-1} h(s)\omega(x_s), \;\; n/n \in N_0 \tag{25}$$

где $x_0 = const > 0$ тогда справедливо неравенство

$$x_n \le \Omega^{-1}\left[\Omega(x_0) + \sum_{s=0}^{n-1} h(s)W\left(H^{-1}\right)\left(1 + \sum_{t=0}^{s} f(t)\prod_{\varepsilon=0}^{t}\left[1 + f(t) + g(t)\right]\right)\right] \times$$
$$\times H^{-1}\left[1 + \sum_{s=0}^{n-1} f(s)\prod_{\varepsilon=0}^{t}\left[1 + f(t) + g(t)\right]\right] \tag{26}$$

для $n/n \in N_0$, при которых

$$1 + \sum_{s=0}^{n-1} f(s)\prod_{t=0}^{s}\left[1 + f(t) + g(t)\right]Dom\left(H^{-1}\right)$$

$$\Omega(x_0) + \sum_{s=0}^{n-1} h(s)w\left(H^{-1}\left[1 + \sum_{t=0}^{s} f(t)\prod_{\tau=0}^{s}\left[1 + f(\tau) + g(\tau)\right]\right]\right)Dom\left(\Omega^{-1}\right)$$

здесь Ω определяется по (13), а Ω^{-1} обратная к Ω.

Это теорема доказывается точно также как теорема 2, при этом используется некоторые аргументы теоремы 3.

Теорема 5. Пусть x_n, $f(n)$, и $\omega(n)$ функции удовлетворяющие условию Леммы 1, и пусть $H \in F$.

Если выполняется неравенство

$$x_n \le \omega(n) + \sum_{s=0}^{n-1} f(s)\left(x_s + \sum_{t=0}^{s} f(t)\sum_{\tau=0}^{t} f(\tau)H(x_\tau)\right), \; \forall n \in N_0 \tag{27}$$

$\forall n / n \in N_0$, то справедливо неравенство

$$x_n \le \omega(n)\left[1 + \sum_{s=0}^{n-1} f(s)\left(1 + \sum_{t=0}^{s} f(t)G(1) + \sum_{\tau=0}^{t} f(\tau)\right)\right], \quad \forall n \in N \tag{28}$$

для $\forall n / n \in N_0$, при которых

$$G(1)+\sum_{\tau=0}^{n-1} f(\tau) \in Dom\left(G^{-1}\right); \tag{29}$$

здесь $G(r)=\int\limits_{\tau_0}^{\tau} \frac{ds}{s+H(s)}$, $r \geq r_0 > 0$.

Доказательство. Поскольку $\omega(n)$ положительная, монотонно не убывающая, то (27) можно переписать в виде

$$\frac{x_n}{\omega(n)} \leq 1+\sum_{s=0}^{n-1} f(s)\left(\frac{x_s}{\omega(n)}+\sum_{t=0}^{s} f(t)\sum_{\tau=0}^{t} f(\tau) H\left(\frac{x_\tau}{\omega(\tau)}\right)\right) \tag{30}$$

Обозначим правые части неравенства через $u(n)$; Тогда

$$\Delta u(n)=f(n)\left(\frac{x_n}{\omega(n)}+\sum_{t=0}^{n-1} f(t)\sum_{\tau=0}^{t} f(\tau) H\left(\frac{x_\tau}{\omega(\tau)}\right)\right); \quad u(0)=1$$

Из которого вытекает

$$\Delta u(n) \leq f(n)\left(u(n)+\sum_{t=0}^{n-1} f(t)\sum_{\tau=0}^{t} f(\tau) H(u(\tau))\right) \tag{31}$$

Пологая, что

$$V(n)=u(n)+\sum_{t=0}^{n-1} f(t)\sum_{\tau=0}^{t} f(\tau) H(x_\tau);\ V(0)=1$$

Из неравенств (31) и $u(n) \leq V(n)$ получим

$$\Delta u(n) \leq f(n)\left(u(n)+\sum_{\tau=0}^{n-1} f(\tau) H(u(\tau))\right) \tag{32}$$

Обозначим далее

$$z_n=V(n)+\sum_{\tau=1}^{n-1} f(\tau) V(\tau); \quad z_0=1$$

тогда учитывая неравенство (32) и $z_n \geq V(n)$

Имеем: $\Delta z_n \leq f(n)\left[z_n+H(z_n)\right]$

Деля обе части последнего неравенства на $z_n+H(z_n)$ и учитывая неравенства на $z_n+H(z_n)$ и учитывая неравенства

$$G(z_{n+1})-G(z_n)=\int\limits_{z_n}^{z_{n+1}} \frac{dS}{S+H(S)} \leq \frac{\Delta z_n}{z_n+H(z_n)},$$

получим

$$z_n \leq G^{-1}\left[G(1)+\sum_{s=0}^{n-1} f(S)\right] \text{или}\ G(z_{n+1})-G(z_n) \leq f(n) \tag{33}$$

Подставляя (33) в (32) и суммируя его по *n*- от 0 по *n-1* для $V(n)$ имеем

$$V(n) \leq 1+\sum_{s=0}^{n-1} f(s) G^{-1}\left[G(1)+\sum_{t=0}^{s} f(t)\right]$$

подставляя последнее в (31) и суммируя его по *n* от 0 по *n*-1. Получим оценку для значения *u(n)*. Подставляя эту оценку в (30) и умножая обе части полученного неравенства на *w(n),* убедимся в справедливости неравенства (28) .

Теорема 6. Пусть $x_n, f(n), g(n)$ функции, удовлетворяющие условиям теоремы -1 $H \in F$, W-функция, определенная в теореме 2. Если выполняется неравенство

$$x_n \le x_0 + \sum_{s=0}^{n-1} f(s)(x_s + \sum_{t=0}^{s} f(t)(\sum_{\tau=0}^{t} f(\tau)H(x_\tau))) + \sum_{s=0}^{n-1} g(s)W(x_s), \quad \forall n \in N_0 \quad (34)$$

где $x_0 = const > 0,$ то справедливо неравенство:

$$x_n \le \Omega^{-1}\left[\Omega(x_0) + \sum_{s=0}^{n-1} g(s)W(1 + \sum_{t=0}^{s} f(t)(1 + \sum_{\tau=0}^{t} f(\tau)G^{-1}\left[G(1) + \sum_{k=0}^{t} f(k)\right])\right] \times$$
$$\left[1 + \sum_{s=0}^{n-1} f(s)(1 + \sum_{\tau=0}^{s} f(t)G^{-1})\left[G(\tau) + \sum_{\tau=0}^{t} f(\tau)\right]\right] \quad (35)$$

для $\forall n \in N_0$, при которых

$$G(1) + \sum_{k=0}^{n-1} f(k) \in Dom(G^{-1})$$

$$\Omega(x_0 + \sum_{s=0}^{n-1} g(s)W(1 + \sum_{\tau=0}^{t} f(\tau)G^{-1}\left[G(1 + \sum_{k=0}^{\tau} f(k)\right]) \in Dom(\Omega^{-1})$$

где G и G^{-1} функций, определенные в теореме 5, а Ω определяется по (13). Доказательство аналогично доказательству теоремы 5.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Беллман Р., Кук К.* Неравенства. М. Мир. 1967.
[2] *Быков Я. В., Линенко В.Г.* // Дифференциальные уравнения. 1973. Т.9, № 12. С. 349-354.
[3] *Мартынюк Д.И.* Лекции по качественной теории разностных уравнений. Киев: Наукова Думка. 1979. 270с.
[4] *Мартынюк А.А., Гутовский Р.Г.* Интегральные неравенства и устойчивость движения Киев, Наукова Думка. 1979, 270с.
[5] *Miller S.K.* Linear difference equations. N.W. Amsterdam 1968.
[6] *Pachpatte B.G.* One same discrete inequalities and their applications to a class at sum difference equation. An Sti Univ. lasi sec. A.t. 24, № 2.1978.
[7] *PachpatteB.G.* Finite difference inequalities and discrete time control systems // Indian T. Pure and Appl. Math. 1978. Vol.9. №12. P.1282-1290.
[8] *Pachpatte B.G.* One same new integral inequality and there discrete analogues // Indian T. Pure and Appl. Math. 1977. Vol.8. № 9. P.285-290.
[9] *Бапаев К.Б.* СБДУ Алма-Ата. 1981. С. 17-26.
[10] *Бапаев К.Б.* СБ ДУ Алма-Ата. 1987 стр 5-12.
[11] *Бапаев К.Б.* Univ Annual (Applied mathematics vol 18 Back 3) Sofya, Bolgarya. 1982 y P.91-100.
[12] *Бапаев К.Б.* О некоторых дискретных неравенствах ДУ // В кн.: ДУ и их приложения. Алма-Ата. 1981. С. 11-22.
[13] *Бапаев К.Б.* О некоторых нелинейных дискретных неравенствах // Тезисы докладов IV- ой Всесоюзного Четаевской конференции по устойчивости движ. аналитической механики управ. движ. Иркутск 1982 г. 43 с.
[14] *Бапаев К.Б.* Об одном линейном дискретном неравенстве // В кн.: ДУ и их приложения. Алма- Ата. 1985. С. 14-23.
[15] *Pachpatte B.G.* Inequalities for differential and integral equations. Acad Press. New York 1998.
[16] *Pachpatte B.G.* One same fundamental finite difference inequalities // Famkang J. Math. 2001. Vol. 32. p 217-223.
[17] *Lipovan O.A.* A retarded integral inequality and its applications I. // Math. Anal. Appl. 2003. Vol. 285. p. 436-443.
[18] *Agarwal R.P.* Difference equations and inequalities. Mareel Dekkerlns. New York. 1992.
[19] *Becsack P.R.* Gronwall inequalities. Springer-Verlag. Berlin New York 1965.
[20] *Pachpatte B.G.* Integral inequalities Bihari type. // Math Inequal. Appl. (2002. Vol. 5. P. 649-657.

REFERENCES

[1] Bellman R., Kuk K. Neravenstva. M. Mir. 1967.
[2] Bykov Ja. V., Linenko V.G. // Differencial'nye uravnenija. 1973. T.9, № 12. S. 349-354.
[3] Martynjuk D.I. Lekcii po kachestvennoj teorii raznostnyh uravnenij. Kiev: Naukova Dumka. 1979. 270s.
[4] Martynjuk A.A., Gutovskij R.G. Integral'nye neravenstva i ustojchivost' dvizhenija Kiev, Naukova Dumka. 1979, 270s.
[5] Miller S.K. Linear difference equations. N.W. Amsterdam 1968.
[6] Pachpatte B.G. One same discrete inequalities and their applications to a class at sum difference equation. An Sti Univ. lasi sec. A.t. 24, № 2.1978.

[7] PachpatteB.G. Finite difference inequalities and discrete time control systems // Indian T. Pure and Appl. Math. 1978. Vol.9. №12. P.1282-1290.

[8] Pachpatte B.G. One same new integral inequality and there discrete analogues // Indian T. Pure and Appl. Math. 1977. Vol.8. № 9. P.285-290.

[9] Bapaev K.B. SBDU Alma-Ata. 1981. S. 17-26.

[10] Bapaev K.B. SB DU Alma-Ata. 1987 str 5-12.

[11] Bapaev K.B. Univ Annual (Applied mathematics vol 18 Back 3) Sofya, Bolgarya. 1982 y P.91-100.

[12] Bapaev K.B. O nekotoryh diskretnyh neravenstvah DU // B kn.: DU i ih prilozhenija. Alma-Ata. 1981. S. 11-22.

[13] Bapaev K.B. O nekotoryh nelinejnyh diskretnyh neravenstvah // Tezisy dokladov IV- oj Vsesojuznogo Chetaevskoj konferencii po ustojchivosti dvizh. analiticheskoj mehaniki uprav. dvizh. Irkutsk 1982 g. 43 s.

[14] Bapaev K.B. Ob odnom linejnom diskretnom neravenstve // B kn.: DU i ih prilozhenija. Alma- Ata. 1985. C. 14-23.

[15] Pachpatte B.G. Inequalities for differential and integral equations. Acad Press. New York 1998.

[16] Pachpatte B.G. One same fundamental finite difference inequalities // Famkang J. Math. 2001. Vol. 32. p 217-223.

[17] Lipovan O.A. A retarded integral inequality and its applications I. // Math. Anal. Appl. 2003. Vol. 285. p. 436-443.

[18] Agarwal R.P. Difference equations and inequalities. Mareel Dekkerlns. New York. 1992.

[19] Becsack P.R. Gronwall inequalities. Springer-Verlag. Berlin New York 1965.

[20] Pachpatte B.G. Integral inequalities Bihari type. // Math Inequal. Appl. (2002. Vol. 5. P. 649-657.

ДИСКРЕТТІ ТЕҢСІЗДІКТЕР ТУРАЛЫ

К.Б. Бапаев [1] , С.С. Сламжанова[2], Г.Б. Исаева[3]

[1]ҚР БҒМ Математика және математикалық моделдеу институты, Алматы, Қазақстан;
[2]І.Жансүгіров атындағы Жетісу мемлекеттік университеті, Талдықорған, Қазақстан;
[3]Каспий қоғамдық университеті, Талдықорған, Қазақстан

Түйін сөздер: дискретті теңсіздіктер, субаддитивтік, субмультипликативтік.

Аннотация. Дискретті динамикалық жүйелер шешімдерінің қозғалысын зерттеуде көбінесе әртүрлі дискретті теңсіздіктер шешуге алып келеді. Бұл дифференциалдық, интегралдық, интегро-дифференциалдық теңсіздіктерге және дискретті динамикалық жүйелерді зерттеуде пайда болатын дискретті теңсіздіктерге алып келеді. Дискретті-динамикалық жүйелерінің әртүрлі қасиеттерін зерттегенде мәселе белгілі бір дискретті теңсіздіктерді қанағаттандыратын функцияларды бағалауға келтірілетіндігі белгілі. Сондықтанда зерттеу жетістігі дискретті теңсіздіктерді шешу болып есептелінеді. Міне осы қағида дискретті динамикалық жүйелерді зерттеушілерді дифференциалдық интегралдық және интегралды-дифференциалдық теңсіздіктерді (ол өздерінің дамуын Гроноулл 1919 ж., Чаплин С.А. 1932 ж., Т.Важевский 1948 ж. т.б. іргелі жұмыстарынан бастау алады) дескреттеу және дискретті динамикалық жүйелерді зерттеу барысында пайда болған теңсіздіктерді шешуге алып келді.

Дискретті теңсіздіктер жайындағы теоремалар үздіксіз теңсіздіктер жайындағы теоремалар сияқты ұшы–қиырсыз сандықтарда ол нақты үрдістердің сандық және сапалық алгоритмдерді жасағанда ыңғайлы бағалаулардың қайнар көзі болып есептелінеді.

Бұл салада жұмыс жасайтын ғалымдардың мұралары бірқатар (Ravi Agarwal 2000 ж., B.Gr.Pachpatte 2006 ж.) кітаптарда сараланым түйдектелінді.

Біз ұсынып отырған бұл жұмыста оң жағы субаддитивты және субмультипликативты функциялардан тұратын сызықты емес жаңа бірнеше теңсіздіктер шешілді.

Поступила 17.06.2016 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Процессы в околоземном космическом пространстве

Наземно-космические методы исследования геодинамических процессов в земной коре

***