

ISSN 1991-346X

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ

Х А Б А Р Л А Р Ы

ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА
СЕРИЯСЫ**



СЕРИЯ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ



**PHYSICO-MATHEMATICAL
SERIES**

4 (308)

ШІЛДЕ – ТАМЫЗ 2016 ж.

ИЮЛЬ – АВГУСТ 2016 г.

JULY – AUGUST 2016

1963 ЖЫЛДЫҢ ҚАҢТАР АЙЫНАН ШЫҒА БАСТАҒАН
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1963 ГОДА
PUBLISHED SINCE JANUARY 1963

ЖЫЛЫНА 6 РЕТ ШЫҒАДЫ
ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД
PUBLISHED 6 TIMES A YEAR

АЛМАТЫ, ҚР ҰҒА
АЛМАТЫ, НАН РК
ALMATY, NAS RK

Б а с р е д а к т о р

ҚР ҰҒА академигі,

Мұтанов Г. М.

Р е д а к ц и я а л қ а с ы:

физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Әшімов А.А.**; техн. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Байғұнчечков Ж.Ж.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Жұмаділдаев А.С.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Қалменов Т.Ш.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Мұқашев Б.Н.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Өтелбаев М.О.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Тәкібаев Н.Ж.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Харин С.Н.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Әбішев М.Е.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Жантаев Ж.Ш.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Қалимолдаев М.Н.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Косов В.Н.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Мұсабаев Т.А.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Ойнаров Р.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Рамазанов Т.С.** (бас редактордың орынбасары); физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Темірбеков Н.М.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Өмірбаев У.У.**

Р е д а к ц и я к ең е с і:

Украинаның ҰҒА академигі **И.Н. Вишневский** (Украина); Украинаның ҰҒА академигі **А.М. Ковалев** (Украина); Беларусь Республикасының ҰҒА академигі **А.А. Михалевич** (Беларусь); Әзірбайжан ҰҒА академигі **А. Пашаев** (Әзірбайжан); Молдова Республикасының ҰҒА академигі **И. Тигиняну** (Молдова); мед. ғ. докторы, проф. **Иозеф Банас** (Польша)

Главный редактор

академик НАН РК

Г. М. Мутанов

Редакционная коллегия:

доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **А.А. Ашимов**; доктор техн. наук, проф., академик НАН РК **Ж.Ж. Байгунчеков**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **А.С. Джумадильдаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **Т.Ш. Кальменов**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **Б.Н. Мукашев**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **М.О. Отелбаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **Н.Ж. Такибаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **С.Н. Харин**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **М.Е. Абишев**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Ж.Ш. Жантаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **М.Н. Калимолдаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **В.Н. Косов**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Т.А. Мусабаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Р. Ойнаров**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Т.С. Рамазанов** (заместитель главного редактора); доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Н.М. Темирбеков**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **У.У. Умирбаев**

Редакционный совет:

академик НАН Украины **И.Н. Вишневский** (Украина); академик НАН Украины **А.М. Ковалев** (Украина); академик НАН Республики Беларусь **А.А. Михалевич** (Беларусь); академик НАН Азербайджанской Республики **А. Пашаев** (Азербайджан); академик НАН Республики Молдова **И. Тигиняну** (Молдова); д. мед. н., проф. **Иозеф Банас** (Польша)

«Известия НАН РК. Серия физико-математическая». ISSN 1991-346X

Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы)

Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации и архивов Министерства культуры и информации Республики Казахстан №5543-Ж, выданное 01.06.2006 г.

Периодичность: 6 раз в год.

Тираж: 300 экземпляров.

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, ком. 219, 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,

www.nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

© Национальная академия наук Республики Казахстан, 2016

Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75.

Editor in chief

G. M. Mutanov,
academician of NAS RK

Editorial board:

A.A. Ashimov, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **Zh.Zh. Baigunchekov**, dr. eng. sc., prof., academician of NAS RK; **A.S. Dzhumadildayev**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **T.S. Kalmenov**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **B.N. Mukhashev**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **M.O. Otelbayev**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **N.Zh. Takibayev**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **S.N. Kharin**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **M.Ye. Abishev**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **Zh.Sh. Zhantayev**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **M.N. Kalimoldayev**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **V.N. Kosov**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **T.A. Mussabayev**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **R. Oinarov**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **T.S. Ramazanov**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK (deputy editor); **N.M. Temirbekov**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **U.U. Umirbayev**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK

Editorial staff:

I.N. Vishnievski, NAS Ukraine academician (Ukraine); **A.M. Kovalev**, NAS Ukraine academician (Ukraine); **A.A. Mikhalevich**, NAS Belarus academician (Belarus); **A. Pashayev**, NAS Azerbaijan academician (Azerbaijan); **I. Tighineanu**, NAS Moldova academician (Moldova); **Joseph Banas**, prof. (Poland).

News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physical-mathematical series.
ISSN 1991-346X

Owner: RPA "National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan" (Almaty)

The certificate of registration of a periodic printed publication in the Committee of information and archives of the Ministry of culture and information of the Republic of Kazakhstan N 5543-Ж, issued 01.06.2006

Periodicity: 6 times a year

Circulation: 300 copies

Editorial address: 28, Shevchenko str., of. 219, 220, Almaty, 050010, tel. 272-13-19, 272-13-18,
www.nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

© National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, 2016

Address of printing house: ST "Aruna", 75, Muratbayev str, Almaty

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 3, Number 307 (2016), 101 – 109

ABOUT OF THE DISCRETE INEQUALITIES

K.B. Bapaev¹, S.S. Slamzhanova², G.B. Isaeva³¹Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan²Zhetysu State University after I.Zhansugurov, Taldykorgan, Kazakhstan³Kaspian Public University, Taldykorgan, Kazakhstan**Keywords:** discrete inequality, subadditive property, submultiplicativity.

Abstract. In the study of the behavior of solutions of discrete dynamical systems, many problems lead us to the resolution of some type of discrete inequalities. This led us to the discretization of differential, integral, integro-differential inequalities and inequalities in the study of discrete investigations appear when discrete dynamical systems.

It is known that in the study of various properties of discrete-dynamical systems solutions (DDS), the problem is often reduced to the evaluation of functions that satisfy one or another discrete inequalities. Research Success often depends on the ability to "solve" the corresponding inequality, i.e. to obtain an estimate of functions satisfying a discrete inequality, in terms of known parameters and functions included in it. This leads to the sampling differential integral and integro - differential inequalities, which have received development howling even in fundamental works Gronuoll 1919, S.A. Chiaplygin 1932, T.Vazhevskii 1948 and other), And on the study of discrete inequalities appearing when studies of discrete dynamical systems. Theorems of discrete inequalities, as the theorem on continuous inequalities, estimates turned out to be an inexhaustible source of convenience in constructing algorithms for qualitative and quantitative analysis of real processes.

The artistic heritage of the scientists working in this field, summarized in a number of works (Ravi Agarwal 2000., B.Gr. Pachpatte 2006).

In the present work we obtained a number of new solutions of nonlinear discrete inequalities, when the right part satisfies certain conditions such as subadditive and submultiplicative.

УДК 517.849

О ДИСКРЕТНЫХ НЕРАВЕНСТВАХ

К.Б. Бапаев¹, С.С. Сламжанова², Г.Б.Исаева³¹Институт математики и математического моделирования МОН РК;²Жетысуский государственный университет им. И.Жансугурова;³Каспийский общественный университет**Ключевые слова:** дискретные неравенства, субаддитивность, субмультипликативность.

Аннотация. При изучении поведения решений дискретных динамических систем многие задачи приводят нас к разрешению того или иного типа дискретных неравенств. Это привело нас к дискретизации дифференциальных, интегральных, интегро-дифференциальных неравенств и на исследование дискретных неравенств появляющихся при исследований дискретных динамических систем.

Известно, что при исследовании различных свойств решений дискретно-динамических систем (ДДС) задача часто сводится к оценке функций, удовлетворяющих тем или иным дискретным неравенствам. Успех исследования нередко зависит от возможности «разрешить» соответствующее неравенство, т.е. получить оценку функций, удовлетворяющей дискретному неравенству, через известные параметры и функции, входящие в него. Это приводит к дискретизации дифференциальных интегральных и интегро - дифференциальных неравенств, которые получили свое развитие еще в фундаментальных трудах Гронуолла 1919г. С.А. Чаплыгина 1932 г., Т.Важевского 1948 г. и др.), и на исследование дискретных неравенств, появляющихся при исследований дискретных динамических систем. Теоремы о дискретных неравенствах

как теоремы о непрерывных неравенствах оказались неисчерпаемым источником оценок удобных при построении алгоритмов качественного и количественного анализа реальных процессов.

Творческое наследие ученых, работающих в этой области, подытожено в ряде работ (Ravi Agarwal 2000 г., B.Gr.Pachpatte 2006 г).

В предлагаемой работе нами получены решения нескольких новых нелинейных дискретных неравенств, когда правые части удовлетворяют определенные условия типа субаддитивности и субмультипликативности.

При изучении поведения решений дискретных динамических системах многие задачи приводят нас к решению того или иного типа дискретных неравенств. В связи с этим, начиная с 60-го года XX-века, математики обратили внимание [2, 3, 5, 6–14] на дискретизацию дифференциальных, интегральных и интегро-дифференциальных неравенств, [1,4,15,17] и на исследование дискретных неравенств появляющихся при исследовании дискретных динамических систем.

В этой работе нами получены несколько новых дискретных неравенств.

Для изложения результатов в начале приведем некоторые основные понятия и определения заимствованные из [9].

Пусть $N_0 = \{0,1,\dots\}$, выражение $\sum_{s=0}^{n-1} f(s)$ представляет собой решение линейных дискретных уравнений вида $\Delta x(n) = f(n)$, $\forall n \in N_0$ с начальным условием $x(0) = x_0 = 0$, где Δ - разностный оператор. Здесь предполагается, что $\sum_{s=0}^{0-1} f(s) = 0$.

Выражение $\prod_{s=0}^{0-1} \varphi(s)$ представляет собой решение линейных дискретных уравнений вида $x_{n+1} = \varphi(n)x_n$, для $\forall n/n \in N_0$ с начальным условием $x_0 = 1$; здесь предполагается, что $\prod_{s=1}^{0-1} \varphi(s) = 1$.

Нам в дальнейшем понадобится следующая

Лемма 1 (Дискретный аналог неравенства Гронуолла-Беллмана).

Пусть $\omega(n)$ - положительная, монотонно-неубывающая и $x_n, f(n)$ - неотрицательная, монотонно-неубывающая, непрерывные функции для $\forall n, n \in N_0$.

Если выполняется неравенство

$$x_n \leq \omega(n) + \sum_{s=0}^{n-1} f(s)x_s, \forall n \in N_0 \quad (1)$$

Тогда справедливо следующее неравенство

$$x_n = \omega(n) \prod_{s=0}^{n-1} [1 + f(s)], \forall n \in N_0 \quad (2)$$

доказательство приведено в [9].

В дальнейшем мы займемся различными нелинейными обобщениями леммы 1 для определенного класса функций.

Определение [15, 20]. Говорят, что функция $H : N_0 \rightarrow [0, \infty)$ из класса F (т.е. $H \in F$), если

1) $H(n)$ положительная, неубывающая, непрерывная для $\forall n/n \in N_0$;

2) $\frac{1}{v} H(n) \leq H\left(\frac{u}{v}\right)$, для $u > 1, v > 1/u, v \in N$

следующая теорема является нелинейным обобщением леммы 1.

Теорема 1. Пусть $x_n, f(n)$ и $g(n): N_o \rightarrow [0, \infty)$ непрерывные функции $\omega(n)$ положительная, монотонно-неубывающая, непрерывная функция, определенная в N_0 и $H \in F$. Если выполняется следующее неравенство

$$x_n \leq \omega(n) + \sum_{s=0}^{n-1} f(s)x_s + \sum f(s)H\left(x_s + \sum_{t=0}^s g(t)H(x_t H(x_t t))\right), \tag{3}$$

тогда справедливо неравенство

$$x_n \leq \omega(n) \left[1 + \sum_{s=1}^{n-1} f(s)H\left(G^{-1}\left[G(1) + \sum_{t=0}^s (f(s) + g(s))\right]\right) \right] \tag{4}$$

Для $\forall n \in N_0$, при которых

$$G(1) \sum_{s=0}^{n-1} (f(s) + g(s)) \in Dom(G^{-1}) \tag{5}$$

где $G(s) = \int_{s_0}^{t_0} \frac{H}{H(t)}$, $s \geq s_0 > 0$.

Доказательство. Поскольку $\omega(n)$ положительная, монотонно-неубывающая функция и $H \in F$, то (3) можно переписать в виде

$$\frac{x_n}{\omega(n)} \leq 1 + \sum_{s=0}^{n-1} f(s)H\left(\frac{x_s}{\omega(n)} + \sum_{t=0}^s g(t)H\left(\frac{x_t}{\omega(n)}\right)\right) \tag{6}$$

Обозначим правую часть (6) через u_n ; Тогда $\Delta u_n = f(n)H\left(\frac{x_n}{\omega(n)} + \sum_{t=0}^{n-1} g(t)H\left(\frac{x_t}{\omega(t)}\right)\right)$, $u(0)=1$ из которого вытекает

$$\Delta u_n \leq f(n)H\left(u_n + \sum_{t=0}^{n-1} g(t)H(u_n)\right) \tag{7}$$

Полагая

$$V_n = u_n + \sum_{t=0}^{n-1} g(t)H(u_t), V_0 = 0 \tag{8}$$

и учитывая, что $u_n \leq V_n$, получим $\Delta V_n = \Delta u_n + g(n)H(u_n) \leq (f(n) + g(n))H(V_n)$. Деля обе части последнего на $H(V_n)$, учитывая неравенство

$G(V_{n+1}) - G(V_n) = \int_{v_n}^{v_{n+1}} \frac{ds}{H(s)} \leq \frac{\Delta V_n}{H(V_n)}$ и суммируя полученное неравенство по n от 0 по $n-1$

Имеем
$$G(V_n) - G(V_0) \leq \sum_{s=0}^{n-1} (f(s) + g(s))$$

или

$$v_n \leq G^{-1}\left(G(1) + \sum_{s=0}^{n-1} (f(s) + g(s))\right) \tag{9}$$

Тогда из (6), (7) и (8) получим

$$\Delta u_n \leq f(n)H\left(G^{-1}\left[G(1) + \sum_{s=0}^{n-1} [f(s) + g(s)]\right]\right). \quad (10)$$

Суммируя обе части (10) по n от 0 по $n - 1$ и подставляя его в (6), получим неравенство (4).

Теорема 2. Пусть $x_n, f(n), g(n)$ и $h(n) : N_0 \rightarrow [0, \infty)$ непрерывные функции, $H \in F$ и пусть $W(r)$ положительная, непрерывная субмультипликативная [13], по монотонно-неубывающая функция для $\forall r / r \geq 0, r \in N_0$. Если выполняется неравенства

$$x_n \leq x_0 + \sum_{s=0}^{n-1} f(s)H\left(x_n + \sum_{t=0}^s g(t)H(x_t)\right) + \sum_{s=0}^{n-1} h(s)W(x_s) \quad (11)$$

для $\forall n / n \in N_0$, где $x_0 = const > 0$, тогда справедливо неравенство

$$\begin{aligned} x_n \leq & \Omega^{-1}\left[\Omega(x_0) + \sum_{s=0}^{n-1} h(s)W\left(1 + \sum_{s=0}^s f(t)H\left(G^{-1}\left[G(1) + \sum_{\tau=0}^t (f(\tau) + g(\tau))\right]\right)\right)\right] \\ & \times \left[1 + \sum_{s=0}^{n-1} f(s)H\left(G_\tau^{-1}\left[G_\tau(1) + \sum_{\tau=0}^s (f(s) + g(t))\right]\right)\right] \end{aligned} \quad (12)$$

для $\forall n / n \in N_0$, при которых $G(1) + \sum_{t=0}^{n-1} (f(t) + g(t)) \in Dom(G^{-1})$ и

$$\Omega(x_0) + \sum_{s=0}^{n-1} h(s)W\left(1 + \sum_{t=0}^s f(t)H(G^{-1})\right)\left[G(1) + \sum_{\tau=0}^t (f(\tau) + g(\tau))\right] \in Dom(\Omega^{-1})$$

Здесь G – функция, определенная в теореме 1, а Ω определяется из равенства

$$\Omega(\tau) = \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{ds}{W(s)}, \quad r \geq r_0 > 0. \quad (13)$$

Доказательство. Полагая $\omega(n) = x_0 + \sum_{s=0}^{n-1} h(s)w(x_s)$, $\omega(0) = x_0$ перепишем (11) в виде

$$x_n \leq \omega(n) + \sum_{s=0}^{n-1} f(s)H\left(x_s + \sum_{t=0}^s g(t)H(x_t)\right) \quad (14)$$

тогда, учитывая, что $\omega(n)$, H удовлетворяют условиям теоремы 1 и применяя к (14) теорему 1, получим

$$x_n \leq \omega(n)\left[1 + \sum_{s=0}^{n-1} f(s)H\left(G^{-1}\left[G(1) + \sum_{t=0}^s (f(t) + g(t))\right]\right)\right] \quad (15)$$

Отсюда по субмультипликативности функций W мы имеем

$$W(x_n) \leq W(\omega(n))W\left[1 + \sum_{s=0}^{n-1} f(s)H\left(G^{-1}\left[G(1) + \sum_{t=0}^s (f(t) + g(t))\right]\right)\right]$$

или:

$$\frac{h(n)W(x_n)}{W(\omega(n))} \leq h(n)W\left(1 + \sum_{s=0}^{n-1} f(s)H\left(G(1) + \sum_{t=0}^s (f(t) + g(t))\right)\right) \quad (16)$$

Теперь учитывая неравенство

$$\Omega(\omega(n+1)) - \Omega(\omega(n)) = \int_{\omega(n)}^{\omega(n+1)} \frac{ds}{W(s)} \leq \frac{h(n)W(x_n)}{W(\omega(n))}$$

(16) можно переписать в виде

$$\Omega(\omega(n+1)) - \Omega(\omega(n)) \leq h(n)W \left(1 + \sum_{s=0}^{n-1} f(s)H \left(G^{-1} \left[G(1) + \sum_{t=0}^s (f(t) + g(t)) \right] \right) \right)$$

из которого после суммирования по n - от 0 по $n-1$ вытекает неравенство

$$\omega(n) \leq \Omega^{-1} \left[\Omega(x_0) + \sum_{s=0}^{n-1} h(s)W \left(1 + \sum_{\tau=0}^s (f(\tau) + g(\tau)) \right) \right]$$

подставляя это значение $\omega(n)$ в (15) получим (12) тем самым теорема доказана.

Теорема 3. Пусть $x_n, f(n), g(n)$ и $\omega(n)$ удовлетворяют условиям теоремы 1 и пусть $H(n)$ положительная, непрерывная, монотонно-неубывающая субаддитивная [13], субмультипликативная функция для $\forall n/n \in N_0, H(0)=0$ и H^{-1} обратная функция к H .

Если выполняется неравенство

$$x_n \leq \omega(n) + H^{-1} \left[\sum_{s=0}^{n-1} f(s)H(x_s) + \sum_{s=0}^{n-1} f(s) \left(\sum_{t=0}^s g(t)H(x_t) \right) \right] \tag{18}$$

для $\forall n/n \in N_0$, тогда справедливо неравенство:

$$x_n \leq \omega(n) + H^{-1} \left[1 + \sum_{s=0}^{n-1} f(s) \prod_{t=0}^s [1 + f(t) + g(t)] \right] \tag{19}$$

$\forall n/n \in N_0$ при которых

$$1 + \sum_{s=0}^{n-1} f(s) \prod_{t=0}^s [1 + f(t) + g(t)] \in \text{Dom}(H^{-1}).$$

Доказательство. Поскольку H - субаддитивная, субмультипликативная, то (18) можно переписать в виде

$$H(x_n) \leq H(\omega(n)) + \sum_{s=0}^{n-1} f(s)H(x_s) + \sum_{s=0}^{n-1} f(s) \left(\sum_{t=0}^s g(t)H(x_t) \right) \tag{20}$$

Учитывая свойства $\omega(n)$ и H из (20), имеем

$$\frac{H(x_n)}{H(\omega(n))} \leq 1 + \sum_{s=0}^{n-1} f(s) \frac{H(x_s)}{H(\omega(s))} + \sum_{s=0}^{n-1} f(s) \sum_{t=0}^s g(t) \frac{H(x_t)}{H(\omega(t))} \tag{21}$$

Теперь правую часть (21) обозначим через $u(n)$.

Тогда $\Delta u_n = f(n) \left[\frac{H(x_n)}{H(\omega(n))} + \sum_{s=0}^{n-1} g(t) \frac{H(x_t)}{H(\omega(t))} \right]$, $u(n)=u$ из этого равенства вытекает

$$\Delta u_n \leq f(n) \left[u_n + \sum_{t=0}^{n-1} g(t)u(t) \right] \tag{22}$$

Полагая

$$V(n) = u(n) + \sum_{\tau=0}^{n-1} g(t)u(t), V(0) = 1 \tag{23}$$

из неравенства (22) и $u(n) \leq V(n)$ получим $\Delta V(n) \leq (f(n) + g(n))V(n)$ из чего следует справедливость неравенства

$$V(n) \leq \prod_{t=0}^{n-1} [1 + f(t) + g(t)] \quad (24)$$

учитывая (21), подставляя (24) в (22) и суммирую (по n от 0 по $n-1$) полученные при этом неравенства, мы приходим к

$$u(n) \leq 1 + \sum_{s=0}^{n-1} f(s) \prod_{t=0}^s [1 + f(t) + g(t)]$$

подставляя это значение $u(n)$ в (21) и переходя обратно к H^{-1} , убеждаемся в справедливости теоремы.

Теорема 4. Пусть $x_n, f(n), g(n), h(n)$ и $\omega(n)$ функции, определенные по условиям теоремы 2 и H, H^{-1} по условиям теоремы 3.

Если выполняется неравенство

$$x_n \leq x_0 + H^{-1} \left[\sum_{s=0}^{n-1} f(s)H(x_s) + \sum_{s=0}^{n-1} f(s) \left(\sum_{t=0}^s g(t)H(x_t) \right) \right] + \sum_{s=0}^{n-1} h(s)\omega(x_s), \quad n/n \in N_0 \quad (25)$$

где $x_0 = const > 0$ тогда справедливо неравенство

$$\begin{aligned} x_n \leq \Omega^{-1} \left[\Omega(x_0) + \sum_{s=0}^{n-1} h(s)W(H^{-1}) \left(1 + \sum_{t=0}^s f(t) \prod_{\varepsilon=0}^t [1 + f(t) + g(t)] \right) \right] \times \\ \times H^{-1} \left[1 + \sum_{s=0}^{n-1} f(s) \prod_{\varepsilon=0}^s [1 + f(t) + g(t)] \right] \end{aligned} \quad (26)$$

для $n/n \in N_0$, при которых

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{s=0}^{n-1} f(s) \prod_{t=0}^s [1 + f(t) + g(t)] \text{Dom}(H^{-1}) \\ \Omega(x_0) + \sum_{s=0}^{n-1} h(s)W \left(H^{-1} \left[1 + \sum_{t=0}^s f(t) \prod_{\tau=0}^s [1 + f(\tau) + g(\tau)] \right] \right) \text{Dom}(\Omega^{-1}) \end{aligned}$$

здесь Ω определяется по (13), а Ω^{-1} обратная к Ω .

Это теорема доказывается точно также как теорема 2, при этом используется некоторые аргументы теоремы 3.

Теорема 5. Пусть $x_n, f(n)$, и $\omega(n)$ функции удовлетворяющие условию Леммы 1, и пусть $H \in F$.

Если выполняется неравенство

$$x_n \leq \omega(n) + \sum_{s=0}^{n-1} f(s) \left(x_s + \sum_{t=0}^s f(t) \sum_{\tau=0}^t f(\tau)H(x_\tau) \right), \quad \forall n \in N_0 \quad (27)$$

$\forall n/n \in N_0$, то справедливо неравенство

$$x_n \leq \omega(n) \left[1 + \sum_{s=0}^{n-1} f(s) \left(1 + \sum_{t=0}^s f(t)G(1) + \sum_{\tau=0}^t f(\tau) \right) \right], \quad \forall n \in N \quad (28)$$

для $\forall n/n \in N_0$, при которых

$$G(1) + \sum_{\tau=0}^{n-1} f(\tau) \in \text{Dom}(G^{-1}); \quad (29)$$

здесь $G(r) = \int_{\tau_0}^r \frac{ds}{s + H(s)}$, $r \geq r_0 > 0$.

Доказательство. Поскольку $\omega(n)$ положительная, монотонно не убывающая, то (27) можно переписать в виде

$$\frac{x_n}{\omega(n)} \leq 1 + \sum_{s=0}^{n-1} f(s) \left(\frac{x_s}{\omega(n)} + \sum_{t=0}^s f(t) \sum_{\tau=0}^t f(\tau) H\left(\frac{x_\tau}{\omega(\tau)}\right) \right) \quad (30)$$

Обозначим правые части неравенства через $u(n)$; Тогда

$$\Delta u(n) = f(n) \left(\frac{x_n}{\omega(n)} + \sum_{t=0}^{n-1} f(t) \sum_{\tau=0}^t f(\tau) H\left(\frac{x_\tau}{\omega(\tau)}\right) \right); \quad u(0) = 1$$

Из которого вытекает

$$\Delta u(n) \leq f(n) \left(u(n) + \sum_{t=0}^{n-1} f(t) \sum_{\tau=0}^t f(\tau) H(u(\tau)) \right) \quad (31)$$

Пологая, что

$$V(n) = u(n) + \sum_{t=0}^{n-1} f(t) \sum_{\tau=0}^t f(\tau) H(x_\tau); \quad V(0) = 1$$

Из неравенств (31) и $u(n) \leq V(n)$ получим

$$\Delta u(n) \leq f(n) \left(u(n) + \sum_{\tau=0}^{n-1} f(\tau) H(u(\tau)) \right) \quad (32)$$

Обозначим далее

$$z_n = V(n) + \sum_{\tau=1}^{n-1} f(\tau) V(\tau); \quad z_0 = 1$$

тогда учитывая неравенство (32) и $z_n \geq V(n)$

$$\text{Имеем: } \Delta z_n \leq f(n) [z_n + H(z_n)]$$

Деля обе части последнего неравенства на $z_n + H(z_n)$ и учитывая неравенства на $z_n + H(z_n)$ и учитывая неравенства

$$G(z_{n+1}) - G(z_n) = \int_{z_n}^{z_{n+1}} \frac{dS}{S + H(S)} \leq \frac{\Delta z_n}{z_n + H(z_n)},$$

получим

$$z_n \leq G^{-1} \left[G(1) + \sum_{s=0}^{n-1} f(s) \right] \text{ или } G(z_{n+1}) - G(z_n) \leq f(n) \quad (33)$$

Подставляя (33) в (32) и суммируя его по n - от 0 по $n-1$ для $V(n)$ имеем

$$V(n) \leq 1 + \sum_{s=0}^{n-1} f(s) G^{-1} \left[G(1) + \sum_{t=0}^s f(t) \right]$$

подставляя последнее в (31) и суммируя его по n от 0 по $n-1$. Получим оценку для значения $u(n)$. Подставляя эту оценку в (30) и умножая обе части полученного неравенства на $w(n)$, убедимся в справедливости неравенства (28).

Теорема 6. Пусть $x_n, f(n), g(n)$ функции, удовлетворяющие условиям теоремы -1 $H \in F$, W -функция, определенная в теореме 2. Если выполняется неравенство

$$x_n \leq x_0 + \sum_{s=0}^{n-1} f(s)(x_s + \sum_{t=0}^s f(t)(\sum_{\tau=0}^t f(\tau)H(x_\tau))) + \sum_{s=0}^{n-1} g(s)W(x_s), \quad \forall n \in N_0 \quad (34)$$

где $x_0 = const > 0$, то справедливо неравенство:

$$x_n \leq \Omega^{-1} \left[\Omega(x_0) + \sum_{s=0}^{n-1} g(s)W(1 + \sum_{t=0}^s f(t)(1 + \sum_{\tau=0}^t f(\tau)G^{-1} \left[G(1) + \sum_{k=0}^t f(k) \right])) \right] \times \left[1 + \sum_{s=0}^{n-1} f(s)(1 + \sum_{\tau=0}^s f(\tau)G^{-1} \left[G(\tau) + \sum_{\tau=0}^t f(\tau) \right]) \right] \quad (35)$$

для $\forall n \in N_0$, при которых

$$G(1) + \sum_{k=0}^{n-1} f(k) \in Dom(G^{-1})$$

$$\Omega(x_0 + \sum_{s=0}^{n-1} g(s)W(1 + \sum_{\tau=0}^t f(\tau)G^{-1} \left[G(1) + \sum_{k=0}^{\tau} f(k) \right])) \in Dom(\Omega^{-1})$$

где G и G^{-1} функций, определенные в теореме 5, а Ω определяется по (13). Доказательство аналогично доказательству теоремы 5.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Беллман Р., Кук К. Неравенства. М. Мир. 1967.
- [2] Быков Я. В., Линенко В.Г. // Дифференциальные уравнения. 1973. Т.9, № 12. С. 349-354.
- [3] Мартынюк Д.И. Лекции по качественной теории разностных уравнений. Киев: Наукова Думка. 1979. 270с.
- [4] Мартынюк А.А., Гутовский Р.Г. Интегральные неравенства и устойчивость движения Киев, Наукова Думка. 1979, 270с.
- [5] Miller S.K. Linear difference equations. N.W. Amsterdam 1968.
- [6] Pachpatte B.G. One same discrete inequalities and their applications to a class at sum difference equation. An Sti Univ. lasi sec. A.t. 24, № 2.1978.
- [7] Pachpatte B.G. Finite difference inequalities and discrete time control systems // Indian T. Pure and Appl. Math. 1978. Vol.9. №12. P.1282-1290.
- [8] Pachpatte B.G. One same new integral inequality and there discrete analogues // Indian T. Pure and Appl. Math. 1977. Vol.8. № 9. P.285-290.
- [9] Банаев К.Б. СБДУ Алма-Ата. 1981. С. 17-26.
- [10] Банаев К.Б. СБДУ Алма-Ата. 1987 стр 5-12.
- [11] Банаев К.Б. Univ Annual (Applied mathematics vol 18 Back 3) Sofya, Bolgarya. 1982 y P.91-100.
- [12] Банаев К.Б. О некоторых дискретных неравенствах ДУ // В кн.: ДУ и их приложения. Алма-Ата. 1981. С. 11-22.
- [13] Банаев К.Б. О некоторых нелинейных дискретных неравенствах // Тезисы докладов IV- ой Всесоюзного Четаевской конференции по устойчивости движ. аналитической механики управ. движ. Иркутск 1982 г. 43 с.
- [14] Банаев К.Б. Об одном линейном дискретном неравенстве // В кн.: ДУ и их приложения. Алма- Ата. 1985. С. 14-23.
- [15] Pachpatte B.G. Inequalities for differential and integral equations. Acad Press. New York 1998.
- [16] Pachpatte B.G. One same fundamental finite difference inequalities // Famkang J. Math. 2001. Vol. 32. p 217-223.
- [17] Lipovan O.A. A retarded integral inequality and its applications I. // Math. Anal. Appl. 2003. Vol. 285. p. 436-443.
- [18] Agarwal R.P. Difference equations and inequalities. Mareel DekkerIns. New York. 1992.
- [19] Vecsack P.R. Gronwall inequalities. Springer-Verlag. Berlin New York 1965.
- [20] Pachpatte B.G. Integral inequalities Bihari type. // Math Inequal. Appl. (2002. Vol. 5. P. 649-657.

REFERENCES

- [1] Bellman R., Kuk K. Neravenstva. M. Mir. 1967.
- [2] Bykov Ja. V., Linenko V.G. // Differencial'nye uravnenija. 1973. Т.9, № 12. S. 349-354.
- [3] Martynjuk D.I. Lekcii po kachestvennoj teorii raznostnyh uravnenij. Kiev: Naukova Dumka. 1979. 270s.
- [4] Martynjuk A.A., Gutovskij R.G. Integral'nye neravenstva i ustojchivost' dvizhenija Kiev, Naukova Dumka. 1979, 270s.
- [5] Miller S.K. Linear difference equations. N.W. Amsterdam 1968.
- [6] Pachpatte B.G. One same discrete inequalities and their applications to a class at sum difference equation. An Sti Univ. lasi sec. A.t. 24, № 2.1978.

- [7] Pachpatte B.G. Finite difference inequalities and discrete time control systems // Indian T. Pure and Appl. Math. 1978. Vol.9. №12. P.1282-1290.
- [8] Pachpatte B.G. One same new integral inequality and there discrete analogues // Indian T. Pure and Appl. Math. 1977. Vol.8. № 9. P.285-290.
- [9] Бапаев К.В. SBDU Alma-Ata. 1981. S. 17-26.
- [10] Бапаев К.В. SB DU Alma-Ata. 1987 str 5-12.
- [11] Бапаев К.В. Univ Annual (Applied mathematics vol 18 Back 3) Sofya, Bolgarya. 1982 y P.91-100.
- [12] Бапаев К.В. O nekotoryh diskretnyh neravenstvah DU // B kn.: DU i ih prilozhenija. Alma-Ata. 1981. S. 11-22.
- [13] Бапаев К.В. O nekotoryh nelinejnyh diskretnyh neravenstvah // Tezisy dokladov IV- oj Vsesojuznogo Chetaevskoj konferencii po ustojchivosti dvizh. analiticheskoy mehaniki uprav. dvizh. Irkutsk 1982 g. 43 s.
- [14] Бапаев К.В. Ob odnom linejnom diskretnom neravenstve // B kn.: DU i ih prilozhenija. Alma- Ata. 1985. C. 14-23.
- [15] Pachpatte B.G. Inequalities for differential and integral equations. Acad Press. New York 1998.
- [16] Pachpatte B.G. One same fundamental finite difference inequalities // Famkang J. Math. 2001. Vol. 32. p 217-223.
- [17] Lipovan O.A. A retarded integral inequality and its applications I. // Math. Anal. Appl. 2003. Vol. 285. p. 436-443.
- [18] Agarwal R.P. Difference equations and inequalities. Mareel DekkerIns. New York. 1992.
- [19] Becksack P.R. Gronwall inequalities. Springer-Verlag. Berlin New York 1965.
- [20] Pachpatte B.G. Integral inequalities Bihari type. // Math Inequal. Appl. (2002. Vol. 5. P. 649-657.

ДИСКРЕТТИ ТЕҢСІЗДІКТЕР ТУРАЛЫ

К.Б. Бапаев¹, С.С. Сламжанова², Г.Б. Исаева³

¹ҚР БҒМ Математика және математикалық моделдеу институты, Алматы, Қазақстан;

²І.Жансүгіров атындағы Жетісу мемлекеттік университеті, Талдықорған, Қазақстан;

³Каспий қоғамдық университеті, Талдықорған, Қазақстан

Түйін сөздер: дискретті теңсіздіктер, субаддитивтік, субмультипликативтік.

Аннотация. Дискретті динамикалық жүйелер шешімдерінің қозғалысын зерттеуде көбінесе әртүрлі дискретті теңсіздіктер шешуге алып келеді. Бұл дифференциалдық, интегралдық, интегро-дифференциалдық теңсіздіктерге және дискретті динамикалық жүйелерді зерттеуде пайда болатын дискретті теңсіздіктерге алып келеді. Дискретті-динамикалық жүйелерінің әртүрлі қасиеттерін зерттегенде мәселе белгілі бір дискретті теңсіздіктерді қанағаттандыратын функцияларды бағалауға келтірілетіндігі белгілі. Сондықтанда зерттеу жетістігі дискретті теңсіздіктерді шешу болып есептелінеді. Міне осы қағида дискретті динамикалық жүйелерді зерттеушілерді дифференциалдық интегралдық және интегралды-дифференциалдық теңсіздіктерді (ол өздерінің дамуын Гронуолл 1919 ж., Чаплин С.А. 1932 ж., Т.Важевский 1948 ж. т.б. іргелі жұмыстарынан бастау алады) дескреттеу және дискретті динамикалық жүйелерді зерттеу барысында пайда болған теңсіздіктерді шешуге алып келді.

Дискретті теңсіздіктер жайындағы теоремалар үздіксіз теңсіздіктер жайындағы теоремалар сияқты ұшы-қиырсыз сандықтарда ол нақты үрдістердің сандық және сапалық алгоритмдерді жасағанда ыңғайлы бағалаулардың қайнар көзі болып есептелінеді.

Бұл салада жұмыс жасайтын ғалымдардың мұралары бірқатар (Ravi Agarwal 2000 ж., B.Gr.Pachpatte 2006 ж.) кітаптарда сараланым түйдектелінді.

Біз ұсынып отырған бұл жұмыста оң жағы субаддитивты және субмультипликативты функциялардан тұратын сызықты емес жаңа бірнеше теңсіздіктер шешілді.

Поступила 17.06.2016 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Процессы в околоземном космическом пространстве

<i>Яковец А.Ф., Гордиенко Г.И., Жумабаев Б.Т., Литвинов Ю.Г., Абдрахманов Н.</i> Статистика ночных увеличений электронной концентрации в максимуме F2-слоя.....	5
<i>Сомсиков В.М.</i> О природе бифуркации динамических систем.....	11
<i>Жантаев Ж.Ш., Грищенко В.Ф., Мукушев А.</i> Схемотехническое моделирование защиты электронной аппаратуры от электростатического разряда.....	15
<i>Антонова В.П., Крюков С.В., Луценко В.Ю., Чубенко А.П.</i> Эффекты землетрясений в интенсивности нейтронов тепловых энергий на высокогорной станции Северного Тянь-Шаня.....	20
<i>Салихов Н.М.</i> Новый метод регистрации динамики вспышек ионизации в ионосфере аппаратно-программным комплексом доплеровских измерений на наклонной радиотрассе.....	27

Наземно-космические методы исследования геодинимических процессов в земной коре

<i>Вилев А.В., Жантаев Ж.Ш., Стихарный А.П.</i> Динамика сезонных движений GPS станций на территории Северного Тянь-Шаня.....	34
<i>Хачикян Г.Я., Жумабаев Б.Т., Тойшиев Н.С., Калдыбаев А., Нуракунов С.</i> Вариации солнечной активности и пространственно-временное распределение сильных землетрясений ($M \geq 7.0$) на территории Евразии в 1973-2014 гг.....	40
<i>Бибосинов А.Ж., Шигаев Д.Т., Калдыбаев А.А., Нуракунов С.М., Бреусов Н.Г., Мамырбек Г.Б.</i> Исследование Шардаринского гидрокомплекса методом георадиолокации.....	46
<i>Бибосинов А.Ж., Нуракунов С.М., Калдыбаев А.А., Шигаев Д.Т.</i> Эффективность применения георадиолокационного метода при изучении инженерно-геологических условий на участках Алматинского метрополитена приповерхностного залегания.....	50
<i>Шигаев Д.Т., Мунсызбай Т.М.</i> Маломощная солнечная теплоэлектростанция с максимальным использованием энергии Солнца.....	56
<i>Жантаев Ж.Ш., Хачикян Г.Я., Кайраткызы Д., Андреев А.</i> Долговременные тренды в вариациях продолжительности земных суток и частоты возникновения на планете землетрясений.....	62
<i>Хачикян Г.Я., Жумабаев Б.Т., Сералиев А., Хасанов Э.</i> Пространственное распределение характеристик главного геомагнитного поля и эпицентров глубокофокусных ($h > 350$ км) землетрясений по данным 1973-2014 гг.....	67

<i>Исанова М.К., Коданова С.К., Рамазанов Т.С., Бастыкова Н.Х., Габдуллин М.Т., Молдабеков Ж.А.</i> Сечение рассеяния и тормозная способность в плотной плазме: влияние эффектов дифракции и динамического экранирования.....	73
<i>Кудайкулов А.А., Жозеранд К., Калтаев А.</i> Численное исследование процесса пальцеобразования при течении двух не смешивающихся жидкостей в канале.....	86
<i>Ахметов Б.С., Корченко А.А., Жумангалиева Н.К.</i> Модель решающих правил для обнаружения аномалий в информационных системах.....	91
<i>Бапаев К.Б., Сламжанова С.С., Исаева Г.Б.</i> О дискретных неравенствах.....	101
<i>Боос Э.Г., Альменова А.М., Жуков В.В., Садыков Т.Х., Степанов А., Таутаев Е.М.</i> Исследование взаимодействий частиц космического излучения методом радиоизлучения на высоте 3340 метров над уровнем моря.....	110
<i>Джакупов К.Б.</i> О моделировании динамики вязкой жидкости уравнениями ротора скорости и функции тока.....	117
<i>Джакупов К.Б.</i> Эффективное применение уравнений максвелла и закона ома в численном моделировании двухфазных процессов магнитной гидродинамики.....	124
<i>Исадыков А.Н., Иванов М.А., Сахиев С.К., Жаугашиева С.А., Нурбакова Г.С., Мукушев Б.А.</i> Вычисление ширины распада $\omega(782)$ мезона для реакции $\omega \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0$ в ковариантной модели кварков.....	135
<i>Калмурзаев Б.С.</i> О полурешетках роджерса двухэлементных семейств разностей в. п. множеств.....	141
<i>Кошеров Т.С., Жумабекова Г.Е.</i> Исследование структуры и фазового состава поверхности кремния при температурном и лазерном воздействии.....	147
<i>Кошеров Т.С., Көшикбай Б.Қ.</i> Особенности напряженного состояния пластин кремния в процессе термического отжига.....	156
<i>Курманбаев Д.М.</i> Солитонная деформация поверхности энепера третьего порядка.....	163
<i>Майлебаева Д., Тилегенова Д.</i> Метод параметризации при решении трансцендентных уравнений.....	168
<i>Мамаев Ш.М., Даниярбек Р.Н.</i> Ұзындығы шектелген стерженде пластикалық облыстың және кернеуді жеңілдету толқындырының құрылуын торлық-характеристика әдісімен зерттеу.....	173
<i>Оңгарбаева А.Д.</i> Электрондық білім беру ресурстарын оқу процесінде болашақ мұғалімдерді оқытуда қолдану.....	184
<i>Сүйменбаев Б.Т., Алексеева Л.А., Сүйменбаева Ж.Б., Гусейнов С.Р.</i> Моделирование динамики космического аппарата в гравимагнитном поле земли в системе «MATLAB SIMULINK».....	188
<i>Туленбаев К.М., Шаймарданова Ж.Н., Габдуллин Б.</i> Структурные свойства (α, β) – коммутативных алгебр.....	208
<i>Сарсенгельдин М.М., Касабек С., Сагидолла Б.М.</i> Точное и приближенное решения двухфазовой обратной задачи Стефана.....	214