

ISSN 1991-346X

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ

Х А Б А Р Л А Р Ы

ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА
СЕРИЯСЫ**



СЕРИЯ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ



**PHYSICO-MATHEMATICAL
SERIES**

4 (308)

ШІЛДЕ – ТАМЫЗ 2016 ж.

ИЮЛЬ – АВГУСТ 2016 г.

JULY – AUGUST 2016

1963 ЖЫЛДЫҢ ҚАҢТАР АЙЫНАН ШЫҒА БАСТАҒАН
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1963 ГОДА
PUBLISHED SINCE JANUARY 1963

ЖЫЛЫНА 6 РЕТ ШЫҒАДЫ
ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД
PUBLISHED 6 TIMES A YEAR

АЛМАТЫ, ҚР ҰҒА
АЛМАТЫ, НАН РК
ALMATY, NAS RK

Б а с р е д а к т о р

ҚР ҰҒА академигі,

Мұтанов Г. М.

Р е д а к ц и я а л қ а с ы:

физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Әшімов А.А.**; техн. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Байғұнчечков Ж.Ж.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Жұмаділдаев А.С.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Қалменов Т.Ш.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Мұқашев Б.Н.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Өтелбаев М.О.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Тәкібаев Н.Ж.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Харин С.Н.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Әбішев М.Е.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Жантаев Ж.Ш.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Қалимолдаев М.Н.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Косов В.Н.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Мұсабаев Т.А.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Ойнаров Р.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Рамазанов Т.С.** (бас редактордың орынбасары); физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Темірбеков Н.М.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Өмірбаев У.У.**

Р е д а к ц и я к ең е с і:

Украинаның ҰҒА академигі **И.Н. Вишневский** (Украина); Украинаның ҰҒА академигі **А.М. Ковалев** (Украина); Беларусь Республикасының ҰҒА академигі **А.А. Михалевич** (Беларусь); Әзірбайжан ҰҒА академигі **А. Пашаев** (Әзірбайжан); Молдова Республикасының ҰҒА академигі **И. Тигиняну** (Молдова); мед. ғ. докторы, проф. **Иозеф Банас** (Польша)

Главный редактор

академик НАН РК

Г. М. Мутанов

Редакционная коллегия:

доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **А.А. Ашимов**; доктор техн. наук, проф., академик НАН РК **Ж.Ж. Байгунчеков**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **А.С. Джумадильдаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **Т.Ш. Кальменов**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **Б.Н. Мукашев**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **М.О. Отелбаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **Н.Ж. Такибаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **С.Н. Харин**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **М.Е. Абишев**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Ж.Ш. Жантаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **М.Н. Калимолдаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **В.Н. Косов**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Т.А. Мусабаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Р. Ойнаров**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Т.С. Рамазанов** (заместитель главного редактора); доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Н.М. Темирбеков**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **У.У. Умирбаев**

Редакционный совет:

академик НАН Украины **И.Н. Вишневский** (Украина); академик НАН Украины **А.М. Ковалев** (Украина); академик НАН Республики Беларусь **А.А. Михалевич** (Беларусь); академик НАН Азербайджанской Республики **А. Пашаев** (Азербайджан); академик НАН Республики Молдова **И. Тигиняну** (Молдова); д. мед. н., проф. **Иозеф Банас** (Польша)

«Известия НАН РК. Серия физико-математическая». ISSN 1991-346X

Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы)

Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации и архивов Министерства культуры и информации Республики Казахстан №5543-Ж, выданное 01.06.2006 г.

Периодичность: 6 раз в год.

Тираж: 300 экземпляров.

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, ком. 219, 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,

www.nauka-nanrk.kz/physics-mathematics.kz

© Национальная академия наук Республики Казахстан, 2016

Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75.

Editor in chief

G. M. Mutanov,
academician of NAS RK

Editorial board:

A.A. Ashimov, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **Zh.Zh. Baigunchekov**, dr. eng. sc., prof., academician of NAS RK; **A.S. Dzhumadildayev**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **T.S. Kalmenov**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **B.N. Mukhashev**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **M.O. Otelbayev**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **N.Zh. Takibayev**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **S.N. Kharin**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **M.Ye. Abishev**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **Zh.Sh. Zhantayev**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **M.N. Kalimoldayev**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **V.N. Kosov**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **T.A. Mussabayev**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **R. Oinarov**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **T.S. Ramazanov**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK (deputy editor); **N.M. Temirbekov**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **U.U. Umirbayev**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK

Editorial staff:

I.N. Vishnievski, NAS Ukraine academician (Ukraine); **A.M. Kovalev**, NAS Ukraine academician (Ukraine); **A.A. Mikhalevich**, NAS Belarus academician (Belarus); **A. Pashayev**, NAS Azerbaijan academician (Azerbaijan); **I. Tighineanu**, NAS Moldova academician (Moldova); **Joseph Banas**, prof. (Poland).

News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physical-mathematical series.
ISSN 1991-346X

Owner: RPA "National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan" (Almaty)

The certificate of registration of a periodic printed publication in the Committee of information and archives of the Ministry of culture and information of the Republic of Kazakhstan N 5543-Ж, issued 01.06.2006

Periodicity: 6 times a year

Circulation: 300 copies

Editorial address: 28, Shevchenko str., of. 219, 220, Almaty, 050010, tel. 272-13-19, 272-13-18,
www.nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

© National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, 2016

Address of printing house: ST "Aruna", 75, Muratbayev str, Almaty

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 3, Number 307 (2016), 124 – 134

**THE EFFECTIVE APPLICATION OF THE MAXWELL EQUATIONS
AND OHM'S LAW OF NUMERICAL SIMULATION
OF TWO-PHASE PROCESS OF MAGNETOHYDRODYNAMICS**

K.B.Jakupov

Institute of mathematics and mathematical modeling, Almaty, Kazakhstan.

E-mail: jakupovKB@mail.ru

Key words: induction, intensity, liquid, air, magnetic field

Abstract. It was established inconsistency in MHD systems of hyperbolic equations and parabolic types for induction and magnetic and electric fields. It is proved the direct application of Maxwell's equations and Ohm's law to the MHD. Particular attention is paid to the construction of explicit difference schemes for Maxwell's equations, taking into account the long-range electromagnetic fields. The results of numerical calculations of two-phase flows: jets of conductive liquids in non-conductive channel air. It was found that for large numbers Hartmann imposed magnetic field stops and holds in a fixed configuration entered mass of conductive liquids.

УДК 533.532.516

**ЭФФЕКТИВНОЕ ПРИМЕНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА
И ЗАКОНА ОМА В ЧИСЛЕННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ
ДВУХФАЗНЫХ ПРОЦЕССОВ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ**

К. Б. Джакупов

Институт математики и математического моделирования МОН РК

Ключевые слова: индукция, напряженность, жидкость, воздух, магнитное поле.

Аннотация. Установлена противоречивость в МГД систем с уравнениями гиперболического или параболического типов для индукций и напряженностей магнитного и электрического полей. Обосновано непосредственное применение уравнений Максвелла и закона Ома в МГД. Особое внимание уделяется построению явных разностных схем для уравнений Максвелла с учетом дальнего действия электромагнитных полей. Приведены результаты численных расчетов двухфазных течений: струй *электропроводящей* жидкости в *электронепроводящем* воздухе канала. Установлено, что при больших числах Гартмана наложенное магнитное поле останавливает и удерживает в неподвижной конфигурации введенную массу электропроводной жидкости.

В [1], [2], [3], [4] и других источниках *дифференцированиями* уравнений Максвелла и закона Ома выводятся гиперболического или параболического типа уравнения для индукции и напряженности магнитного поля, т.е. первого порядка уравнения электродинамики заменяются уравнениями 2-го порядка, что требует дополнительных начальных и граничных условий. Аналогичные уравнения получаются для напряженности и индукции электрического поля. Доказывается неприменимость данных уравнений 2-го порядка в численном моделировании из-за неэквивалентности уравнениям Максвелла и закону Ома.

Целью настоящей работы является обоснование прямого применения уравнений Максвелла и закона Ома в численном моделировании МГД.

1. Уравнения магнитной гидродинамики. В уравнениях динамики электропроводящей жидкости [1]:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{F} + \sum_k \frac{\partial \vec{\pi}_k}{\partial x_k} + [\vec{j}, \vec{B}], \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad (1)$$

$$\rho c_v \frac{dT}{dt} + \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{|\vec{v}|^2}{2} \right) = -\operatorname{div} \vec{q} + \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} (\vec{\pi}_k, \vec{v}) + \rho (\vec{F}, \vec{v}) + (\vec{j}, \vec{E}) \quad (2)$$

плотность электрического тока \vec{j} , индукция магнитного поля \vec{B} и напряженность электрического поля \vec{E} определяются законом Ома

$$\vec{j} = \sigma (\vec{E} + [\vec{v}, \vec{B}]) + \rho_e \vec{v}$$

законом сохранения электрического заряда [4]:

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0, \quad (3)$$

и уравнениями Максвелла [4]:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}, \quad (4)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}, \quad (5)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_e, \quad (6)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (7)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (8)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (9)$$

здесь \vec{D} - индукция электрического поля, ρ_e - плотность электрических зарядов, \vec{H} - напряженность магнитного поля, $\varepsilon_0 = 1/(36\pi \cdot 10^9) \Phi/m$ - электрическая постоянная, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн}/m$ - магнитная постоянная.

2. Противоречивость систем уравнений для индукции и напряженностей магнитного и электрического полей. При этом дифференцируются закон Ампера-Максвелла (8)

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \text{ закон Фарадея (9)}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \text{ и закон Ома } \vec{j} = \sigma (\vec{E} + [\vec{v}, \vec{B}]) + \rho_e \vec{v}. \text{ Получается система:}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon \cdot \mu_0 \mu} \Delta \vec{B} + \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \{ \sigma \cdot \operatorname{rot} [\vec{v}, \vec{B}] + \operatorname{rot} (\rho_e \vec{v}) \}, \quad (10)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}, \quad (11)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0, \quad \vec{j} = \sigma(\vec{E} + [\vec{v}, \vec{B}]) + \rho_e \vec{v}, \quad (13)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_e \quad (14)$$

В уравнении (10) положено $\sigma = \text{const}, \varepsilon_0 \varepsilon = \text{const}, \mu_0 \mu = \text{const}$, при переменных значениях оно дополняется их производными. Полезность уравнения гиперболического типа (10) в том, что подтверждается волновой характер распространения магнитного поля. В вакууме $\varepsilon \equiv 1, \mu \equiv 1$ магнитные волны распространяются со скоростью света, так как

$$\frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon \cdot \mu_0 \mu} = \frac{1}{\varepsilon_0 \cdot \mu_0} = c^2.$$

Есть другой подход. В [3] и др. пренебрегается токами смещения $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \equiv 0$. Но тогда закон Ампера-Максвелла (8) принимает вид $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}$, в силу чего уравнение сохранения электрического заряда должно иметь вид $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{H} = \operatorname{div} \vec{j} = 0$, следовательно вытекает $\frac{\partial \rho_e}{\partial t} \equiv 0$. В результате получается система

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{\sigma \cdot \mu_0 \mu} \Delta \vec{B} + \operatorname{rot}[\vec{v}, \vec{B}] + \frac{1}{\sigma} \operatorname{rot}(\rho_e \vec{v}), \quad (15)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}, \quad \vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E},$$

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + [\vec{v}, \vec{B}]) + \rho_e \vec{v}, \quad \operatorname{div} \vec{j} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{D} = \rho_e \quad (15')$$

Уравнение параболического типа (15) соответствует диффузионному распространению индукции магнитного поля.

Противоречивость состоит в том, что для индукции магнитного поля \vec{B} искусственно получают 3 уравнения (10) и (11) или (15), (11). При определении \vec{B} из главных по типу уравнений (10) или (15) (именно с этой целью построены уравнения (10) и (15)) не будет выполняться уравнение непрерывности $\operatorname{div} \vec{B} = 0$. При вычисленном из уравнений (10) или (15) индукции \vec{B} система уравнений $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}, \operatorname{div} \vec{D} = \rho_e, \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, не разрешима

относительно \vec{E} ! Такая же проблема стоит для плотности электрических зарядов ρ_e , для которой имеются 2 уравнения - эволюционное (13) и теорема Гаусса (14), также 2 уравнения (15') в системе (15).

Аналогичными противоречиями обладает система для напряженности магнитного поля:

$$-\Delta \vec{H} = -\sigma \mu_0 \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \sigma \mu_0 \mu \operatorname{rot}[\vec{v}, \vec{H}] + \operatorname{rot}(\rho_e \vec{v}) - \varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0, \quad \vec{j} = \sigma(\vec{E} + \mu_0 \mu [\vec{v}, \vec{H}]) + \rho_e \vec{v}, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (16)$$

$$\operatorname{div}\vec{H} = 0, \operatorname{div}\vec{D} = \rho_e$$

Теорема 1. Закон Ампера-Максвелла (8) в искусственных системах (10)-(14), (15)-(15') или (16) не выполняется. Из данных систем вытекает уравнение $\operatorname{rot}\vec{H} - \vec{j} - \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \operatorname{grad}C(\vec{r}, t)$,

где $C(\vec{r}, t)$ произвольная дифференцируемая функция. Искусственные системы с уравнениями гиперболического или параболического типа не эквивалентны уравнениям Максвелла.

Доказательством служит тот факт, что для вывода (10) или (16) применяется дифференциальный оператор «rot». Для индукции магнитного поля \vec{B} искусственно получены 3 дифференциальные уравнения (10) и пара (11). Если \vec{B} определяется из (10), то не будет выполняться уравнение $\operatorname{div}\vec{B} = 0$. При вычисленной из уравнения (10) индукции \vec{B} для \vec{E} получается неразрешимая система из 2-х уравнений $\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon\vec{E}$, $\operatorname{div}\vec{D} = \rho_e$, $\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$.

Усугубляет возникшую ситуацию введение функций $\vec{\Psi}$, $\vec{\Phi}$ для удовлетворения уравнений $\operatorname{div}\vec{B} = 0$, $\operatorname{div}\vec{H} = 0$:

$$\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{\Psi}, \vec{H} = \operatorname{rot}\vec{\Phi}, \operatorname{div}\vec{B} = \operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{\Psi} \equiv 0, \operatorname{div}\vec{H} = \operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{\Phi} \equiv 0.$$

В результате (10) переходит в уравнение с производными 3-го порядка:

$$\frac{\partial^2 \operatorname{rot}\vec{\Psi}}{\partial t^2} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon} \frac{\partial \operatorname{rot}\vec{\Psi}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon \cdot \mu_0\mu} \Delta \operatorname{rot}\vec{\Psi} + \frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon} \{ \sigma \cdot \operatorname{rot}[\vec{v}, \operatorname{rot}\vec{\Psi}] + \operatorname{rot}(\rho_e \vec{v}) \},$$

$$\frac{\partial^2 \operatorname{rot}\vec{\Phi}}{\partial t^2} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon} \frac{\partial \operatorname{rot}\vec{\Phi}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon \cdot \mu_0\mu} \Delta \operatorname{rot}\vec{\Phi} + \frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon} \cdot \{ \sigma \operatorname{rot}[\vec{v}, \operatorname{rot}\vec{\Phi}] + \frac{1}{\mu_0\mu} \operatorname{rot}(\rho_e \vec{v}) \}$$

Для них требуются дополнительные граничные условия, которые для системы Максвелла не предусмотрены.

Обратным ходом рассуждений уравнение (10) свертывается к виду

$$\operatorname{rot}[\operatorname{rot}\vec{H} - \vec{j} - \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}] = 0$$

Это уравнение имеет очевидное решение

$$\operatorname{rot}\vec{H} - \vec{j} - \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \operatorname{grad}C(\vec{r}, t),$$

где $C(\vec{r}, t) \neq 0$ произвольного вида, отличная от 0, дифференцируемая функция, поэтому закон Ампера-Максвелла (8) не выполняется

$$\operatorname{rot}\vec{H} - \vec{j} - \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \neq 0.$$

Теорема доказана.

Для подтверждения выводов теоремы 1 можно провести аналогию между искусственно образованными системами (10) - (14), (16) и уравнениями динамики вязкой несжимаемой жидкости:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} + \nabla p = \mu \Delta \vec{v} + \rho \vec{F}, \quad \operatorname{div}\vec{v} = 0$$

В данной системе для искомым 2-х функций давления p и скорости \vec{v} существуют 2 уравнения, причем уравнение $div\vec{v} = 0$ предназначено для вычисления давления p . Такими же парадоксами и неэквивалентностью исходным уравнениям Максвелла обладает дифференцированиями, полученная искусственная система для напряженности электрического поля:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu_0\mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + graddiv \vec{E} &= \Delta \vec{E} - \mu_0\mu \frac{\partial}{\partial t} \{\sigma[\vec{v}, \vec{B}] + (\rho_e \vec{v})\}, \\ div\vec{E} &= \frac{\rho_e}{\varepsilon_0\varepsilon}, \quad div\vec{B} = 0, \quad rot\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad \frac{\partial \rho_e}{\partial t} + div\vec{j} = 0, \\ \vec{j} &= \sigma(\vec{E} + [\vec{v}, \vec{B}]) + \rho_e \vec{v} \end{aligned} \quad (17)$$

При этом для вывода уравнения гиперболического типа в (17) дифференцируется закон Фарадея (9) $rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ в системе Максвелла.

Изложенные противоречия служат обоснованием алгоритма непосредственного применения в МГД уравнений Максвелла и закона Ома.

3. Свойства уравнений Максвелла. Эффективному использованию уравнений Максвелла в МГД предназначены следующие теоремы.

Теорема 2. Закон сохранения электрического заряда (3) является следствием закона Ампера-Максвелла (8) и теоремы Гаусса (14).

Для доказательства применяется оператор div к обеим частям уравнения (8). Получаются:

$$divrot \vec{H} = div(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}), \quad divrot \vec{H} = 0, \quad \frac{\partial div \vec{D}}{\partial t} + div\vec{j} = 0$$

В силу теоремы Гаусса $div\vec{D} = \rho_e$ вытекает закон сохранения заряда [2]:

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + div\vec{j} = 0$$

Для 6 искомым функций система (3) - (7), составленная из 7 уравнений, на первый взгляд кажется переопределенной. Но это не так, все нормально у Максвелла, что подтверждается следующей теоремой.

Теорема 3. Уравнение (7) непрерывности магнитных силовых линий является следствием закона Фарадея при начальных условиях

$$\vec{B}|_{t=0} = const, \quad \forall \vec{r}, \quad (18)$$

Уравнения (2)-(9) и закон Ома образуют замкнутую систему.

Для доказательства достаточно применить операцию div к обеим частям уравнения (9):

$$divrot\vec{E} = -div\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad divrot\vec{E} \equiv 0, \quad div\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial div\vec{B}}{\partial t} = 0,$$

$$\int_{t=0}^t \frac{\partial div\vec{B}}{\partial t} dt = div\vec{B}|_t - div\vec{B}|_{t=0} = 0$$

В силу любого из начальных условий (18) имеет место выполнение

$$div\vec{B}|_t = 0, \quad \forall t$$

Таким образом, в системе Максвелла при нулевом начальном условии (18) уравнение (7) является следствием уравнения (9). Это очень важно и принципиально при численной реализации уравнений МГД без привлечения искусственных дифференцированиями образованных уравнений гиперболического или параболического типов.

4. Эффективный алгоритм численной реализации уравнений Максвелла и закона Ома в МГД. По **теореме 3** для численного решения система уравнений Максвелла представляется в эквивалентном виде:

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\vec{v}}{dt} &= \rho \vec{F} + \sum_k \frac{\partial \vec{\pi}_k}{\partial x_k} + [\vec{j}, \vec{B}], \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0, \\ \rho c_v \frac{dT}{dt} + \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{|\vec{v}|^2}{2} \right) &= -\operatorname{div} \vec{q} + \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} (\vec{\pi}_k, \vec{v}) + \rho (\vec{F}, \vec{v}) + (\vec{j}, \vec{E}) \\ \operatorname{div} \vec{D} &= \rho_e, \quad \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}, \quad \vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{j} = \sigma (\vec{E} + [\vec{v}, \vec{B}]) + \rho_e \vec{v}, \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \vec{B}|_{t=0} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{aligned}$$

Для данных уравнений необходимы начальные условия

$$\vec{v}|_{t=0} = \vec{d}_v(\vec{r}), T|_{t=0} = \vec{d}_T(\vec{r}), \rho|_{t=0} = \vec{d}_\rho(\vec{r}), D|_{t=0} = \vec{d}_D(\vec{r}), \vec{B}|_{t=0} = \vec{d}_B(\vec{r}), \text{ причем}$$

начальное условие индукции магнитного поля подчиняется условию **теоремы 3** $\operatorname{div} \vec{d}_B = 0$. Краевые условия для скорости и температуры должны соответствовать физике рассматриваемого течения.

Краевые условия напряженностей магнитного и электрического полей \vec{H} и \vec{E} должны учитывать их дальное действие, а также тот факт, что уравнения Максвелла составлены из 1-ых производных по всем переменным. В искусственно образованные уравнения гиперболического (10), (16), (17) и параболического (15) типов входят 2-ые производные, следовательно, должны быть априори поставлены краевые условия типа Дирихле или Неймана, что противоречит естественным уравнениям Максвелла и принципу дальнего действия полей. Для уравнений гиперболического типа (10), (16), (17) требуется второе начальное условие.

Логичным обобщением **теоремы 1** служит следующее утверждение: *дифференциальные уравнения, являющиеся математическими моделями законов физики, в принципе нельзя дифференцировать. Полученные дифференцированием уравнения имеют на единицу больший порядок, что требует постановки неадекватных физическому процессу граничных условий. Это приводит к неверным результатам из-за искажений естественных законов физики.*

Для численной реализации вводится сеточная область по времени $t_n = n\tau, n = 0, 1, \dots$, $\tau > 0$ шаг по времени, аналогично вводится согласованная прямоугольная сетка по пространственным переменным. Применение явных схем здесь вполне естественно.

Закон Ома реализуется просто

$$\vec{j}^n = \sigma (\vec{E}^n + [\vec{v}^n, \vec{B}^n]) + \rho_e^n \vec{v}^n,$$

в теореме Гаусса при аппроксимации 1-ых производных необходимо применять центральные разности во внутренних узлах:

$$\rho_e^n = D_{\tilde{x}\tilde{x}}^n + D_{\tilde{y}\tilde{y}}^n + D_{\tilde{z}\tilde{z}}^n,$$

в граничных узлах учитывать заданную плотность электрических зарядов или краевые условия. При отсутствии краевых условий плотность вычисляется из аппроксимаций данного уравнения с применением разностных производных назад или вперед:

$$\rho_e^n = \alpha_x D_{xx}^n + (1 - \alpha_x) D_{xx}^n + \alpha_y D_{yy}^n + (1 - \alpha_y) D_{yy}^n + \alpha_z D_{zz}^n + (1 - \alpha_z) D_{zz}^n,$$

что регулируется заданными весовыми коэффициентами

$$0 \leq \alpha_x \leq 1, 0 \leq \alpha_y \leq 1, 0 \leq \alpha_z \leq 1.$$

При $\alpha_x = 0, \alpha_y = 0, \alpha_z = 0$ применяются разностные производные вперед. При $\alpha_x = 1, \alpha_y = 1, \alpha_z = 1$ получаются разностные производные назад. При $\alpha_x = 0,5, \alpha_y = 0,5, \alpha_z = 0,5$ применяются центральные разности, т.е. в зависимости от постановки граничных условий реализуются различные сочетания разностных производных.

Разностные схемы для уравнений законов Ампера-Максвелла и Фарадея в системе Максвелла должны быть построены по тому же принципу: замена 1-ых производных центральными разностями во внутренних узлах:

$$\begin{aligned} \frac{\vec{D}^{n+1} - \vec{D}^n}{\tau} + \vec{j}^n &= \{H_{zy}^n - H_{yz}^n\} \vec{i} + \{H_{xz}^n - H_{zx}^n\} \vec{j} + \{H_{yx}^n - H_{xy}^n\} \vec{k}, \\ - \frac{\vec{B}^{n+1} - \vec{B}^n}{\tau} &= \{E_{zy}^n - E_{yz}^n\} \vec{i} + \{E_{xz}^n - E_{zx}^n\} \vec{j} + \{E_{yx}^n - E_{xy}^n\} \vec{k}, \end{aligned}$$

в граничных узлах учитывать заданные значения или условия векторов индукций магнитного и электрического полей. При отсутствии краевых условий для выполнения принципа дальнего действия векторы индукций магнитного и электрического полей вычисляются из аппроксимаций уравнений законов Ампера-Максвелла и Фарадея с применением разностных производных назад или вперед:

$$\begin{aligned} \frac{\vec{D}^{n+1} - \vec{D}^n}{\tau} + \vec{j}^n &= \{[\beta_y H_{zy}^n + (1 - \beta_y) H_{zy}^n] - [\beta_z H_{yz}^n + (1 - \beta_z) H_{yz}^n]\} \vec{i} + \\ &+ \{[\hat{\beta}_z H_{xz}^n + (1 - \hat{\beta}_z) H_{xz}^n] - [\tilde{\beta}_x H_{zx}^n + (1 - \tilde{\beta}_x) H_{zx}^n]\} \vec{j} + \\ &+ \{[\tilde{\beta}_x H_{yx}^n + (1 - \tilde{\beta}_x) H_{yx}^n] - [\hat{\beta}_y H_{xy}^n + (1 - \hat{\beta}_y) H_{xy}^n]\} \vec{k}, \\ - \frac{\vec{B}^{n+1} - \vec{B}^n}{\tau} &= \{[\gamma_y E_{zy}^n + (1 - \gamma_y) E_{zy}^n] - [\gamma_z E_{yz}^n + (1 - \gamma_z) E_{yz}^n]\} \vec{i} + \\ &+ \{[\hat{\gamma}_z E_{xz}^n + (1 - \hat{\gamma}_z) E_{xz}^n] - [\tilde{\gamma}_x E_{zx}^n + (1 - \tilde{\gamma}_x) E_{zx}^n]\} \vec{j} + \\ &+ \{[\tilde{\gamma}_x E_{yx}^n + (1 - \tilde{\gamma}_x) E_{yx}^n] - [\hat{\gamma}_y E_{xy}^n + (1 - \hat{\gamma}_y) E_{xy}^n]\} \vec{k}, \end{aligned}$$

что регулируется заданными весовыми коэффициентами

$$0 \leq \beta_x \leq 1; 0 \leq \beta_y \leq 1; 0 \leq \beta_z \leq 1; 0 \leq \gamma_x \leq 1; 0 \leq \gamma_y \leq 1; 0 \leq \gamma_z \leq 1$$

Далее реализуются связи: $\vec{E}^{n+1} = \vec{D}^{n+1} (\varepsilon_0 \varepsilon)^{-1}$, $\vec{H}^{n+1} = (\mu_0 \mu)^{-1} \vec{B}^{n+1}$

Для уравнений гидродинамики применяются полунявные схемы с аппроксимациями конвективных членов на пятиточечных шаблонах, что позволяет избежать влияния «схемной диффузии» на численные результаты [6]. Давление вычисляется итерациями из разностных аппроксимаций уравнения неразрывности.

5. Уравнения МГД в безразмерных переменных. Вводятся масштабы: линейных размеров « L », скоростей « U_∞ », времени $t^* = L / U_\infty$, другие масштабы обозначены звездочками.

В результате образуются следующие критерии подобия:

$$Eu = \frac{p}{\rho^* U_\infty^2}, \text{Re} = \frac{\rho^* U_\infty L}{\mu^*}, Fr = \frac{U_\infty^2}{gL}, He' = \frac{\sigma E^* L B^*}{\rho^* U_\infty^2}, Hr' = \frac{\rho_e^* L B^*}{\rho^* U_\infty},$$

$$\text{число Гартмана } Ha = B^* L \sqrt{\frac{\sigma}{\mu^*}}, De = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^*}{\rho_e^* L},$$

$$HM = \frac{B^*}{\mu_0 \mu \varepsilon_0 \varepsilon E^* U_\infty}, OMe = \frac{\sigma L}{\varepsilon_0 \varepsilon U_\infty}, OMv = \frac{\sigma B^* L}{\varepsilon_0 \varepsilon E^*},$$

$$OMr = \frac{\rho_e^* L}{\varepsilon_0 \varepsilon E^*}, Be = \frac{E^*}{B^* U_\infty}, B^* = \mu_0 \mu H^*, D^* = \varepsilon_0 \varepsilon E^*$$

Уравнения МГД в данных безразмерных принимают вид [6]:

$$\rho' \left(\frac{\partial v'_i}{\partial t'} + \sum_{j=1}^3 v'_j \frac{\partial v'_i}{\partial x'_j} \right) + Eu \frac{\partial \rho'}{\partial x'_i} = \frac{\rho'}{Fr} F'_i + \frac{1}{\text{Re}} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x'_j} (\mu' m_i Ks_{m_i} v_i^{m_i-1} \frac{\partial v'_i}{\partial x'_j}) +$$

$$+ He' [\vec{E}', \vec{B}']_i + Ha^2 \frac{1}{\text{Re}} [[\vec{v}', \vec{B}'], \vec{B}']_i + Hr' [\rho'_e \vec{v}', \vec{B}']_i, i = 1, 2, 3,$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t'} + \text{div} \rho' \vec{v}' = 0,$$

$$\rho' \left(\frac{\partial T'}{\partial t'} + \sum_{j=1}^3 v'_j \frac{\partial T'}{\partial x'_j} \right) = \frac{\kappa}{\text{Re} \cdot \text{Pr}} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x'_j} (\lambda' \frac{\partial T'}{\partial x'_j}) -$$

$$- Eu \cdot M^2 \cdot \kappa (\kappa - 1) p' \text{div} \vec{v}' +$$

$$+ \frac{1}{\text{Re}} M^2 \kappa (\kappa - 1) \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 \mu' m_i Ks_{m_i} v_i^{m_i-1} \frac{\partial v'_i}{\partial x'_j} \frac{\partial v'_i}{\partial x'_j} + \rho' Q',$$

$$\frac{1}{\text{Re}_{m_i}} = \frac{1}{\text{Re}} Ks_{m_i}, Ks_{m_i} = \left(\frac{U_\infty}{m_i} \right)^{m_i-1}, \mu' = \mu'(T'), \lambda' = \lambda'(T'),$$

$$|v'_i| < \frac{1}{9} \quad m_i = 1; \quad \frac{1}{9} \leq |v'_i| < \frac{3}{9} \quad m_i = 3; \quad \frac{3}{9} \leq |v'_i| < \frac{5}{9} \quad m_i = 5;$$

$$\frac{5}{9} \leq |v'_i| \leq \frac{7}{9} \quad m_i = 7; \quad \frac{7}{9} \leq |v'_i| \quad m_i = 9,$$

$$\text{Pr} = \frac{\mu^* c_p}{\lambda^*}, p' = \frac{1}{\kappa \cdot Eu \cdot M^2} \rho' T', \quad \kappa = \frac{c_p}{c_v}, \quad M = \frac{U_\infty}{a^*}, \quad a^* = \sqrt{kRT^*},$$

$$\vec{D}' = \vec{E}', \quad \vec{B}' = \vec{H}', \quad De \cdot \text{div} \vec{D}' = \rho'_e, \quad \text{div} \vec{B}'|_{t'=0} = 0,$$

$$\vec{j}' = OMe \cdot \vec{E}' + OMv \cdot [\vec{v}', \vec{B}'] + OMr \cdot \rho'_e \vec{v}',$$

$$HM \cdot \text{rot} \vec{H}' = \{OMe \cdot \vec{E}' + OMv \cdot [\vec{v}', \vec{B}'] + OMr \cdot \rho_e' \vec{v}'\} + \frac{\partial \vec{D}'}{\partial t'}$$

$$Be \cdot \text{rot} \vec{E}' = -\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t'}$$

6. Удержание в канале электропроводящей жидкости наложенным поперечным магнитным полем. За характерные размеры взяты: ширина впускного зазора, скорость, напряженность электрического поля, плотность электрических зарядов во впускном зазоре, индукция наложенного поперечного магнитного поля, плотность и вязкость воздуха. Канал имеет электроизолированные стенки. Течение предполагается изотермическим ламинарным с малыми скоростями $m_i, \forall i$, что позволяет считать плотность воздуха постоянной. (Идея удержания магнитным полем плазмы в термоядерной реакции была выдвинута академиком Арцимовичем).

Моделирование двухфазного течения «жидкость-газ» проведено по VOF- методу [5], по которому плотность среды представляется суммой плотностей жидкости $\rho_{жс} = 7200 \text{ кг/м}^3$ и газа $\rho_2 = 1.293 \text{ кг/м}^3$. $\rho = c_2 \rho_2 + c_{жс} \rho_{жс}$, $c_2 + c_{жс} = 1$.

Аналогично другие параметры двухфазного течения:

$$\mu = c_2 \mu_2 + c_{жс} \mu_{жс}, \sigma = c_2 \sigma_2 + c_{жс} \sigma_{жс}, \varepsilon = c_2 \varepsilon_2 + c_{жс} \varepsilon_{жс}, 1/\text{Re} = c_2 / \text{Re}_2 + c_{жс} / \text{Re}_{жс} \text{ и т.д.}$$

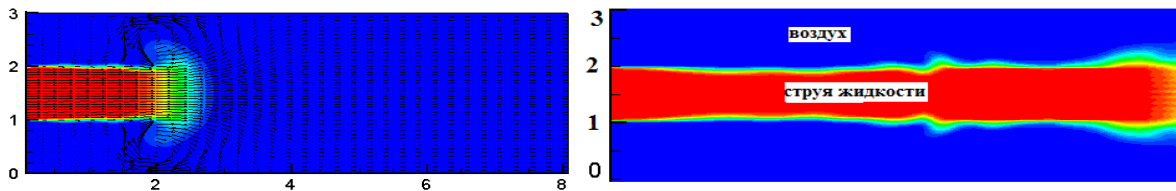
Воздух считается неэлектропроводной средой $\sigma_2 \equiv 0$

В численных расчетах на сетке 250x150 было положено

$$Ha = 741619,847; F_x = F_y = 0; He' = 143,3925; Hr' = 25908,802;$$

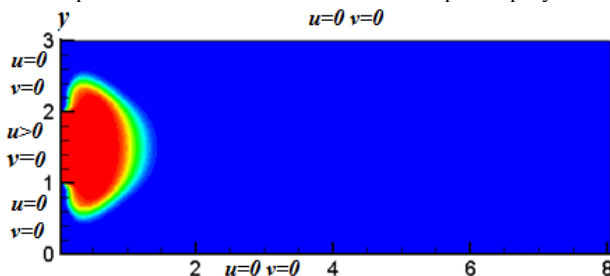
$$De = 0,86482; Eu = 1; HM = 8415572269 5,4857; OMe = 6,3995 \cdot 10^{-3};$$

$$OMv = 698,1317; OMr = 1,15630; Be = 9,166666 \cdot 10^{-6}.$$

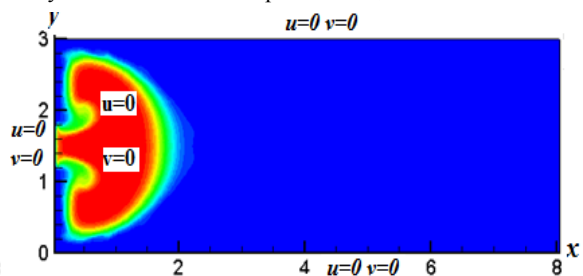


Фиг.1

Фигура 1 – соответствует вхождению и протеканию в канале неэлектропроводящей жидкости. Искривления свободной поверхности жидкости есть влияние вихрей образующихся в углах канала и далее развивающихся по течению



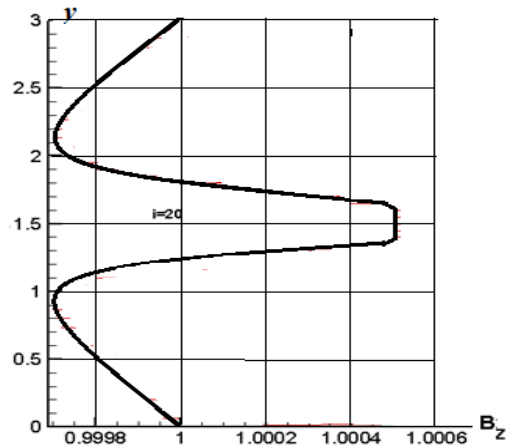
Фиг.2



Фиг.3

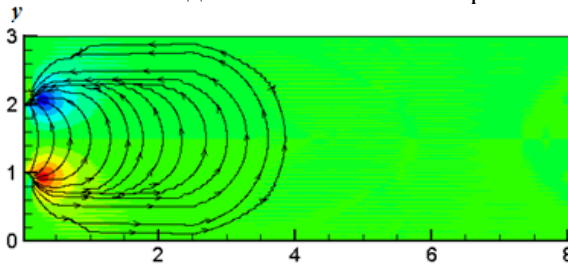
На фиг.2 представлен начальный момент тормозящего действия наложенного поперечного магнитного поля \vec{B}_z . Подача жидкости через определенное время прекращается. На фиг.3 отображена образовавшаяся под действием магнитного поля постоянная конфигурация

остановившейся введенной порции жидкости, далее намагниченная жидкость останавливается, инерционное движение воздуха через некоторый промежуток времени тоже прекращается.

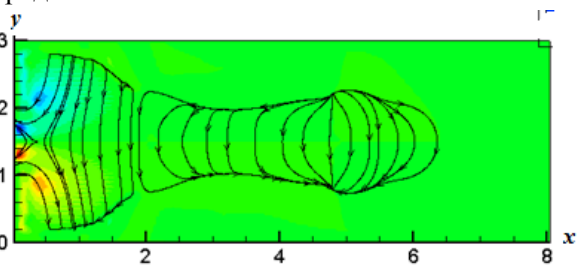


Фиг.4

На фиг.4 представлено изменение индукции магнитного поля B_z в поперечном сечении канала $x=1.6$ перед полной остановкой жидкости. В начальный момент времени $t=0$ по всему каналу магнитная индукция постоянна $B_z = 1$. В области жидкости индукция магнитного поля увеличивается под влиянием поля электрических зарядов.

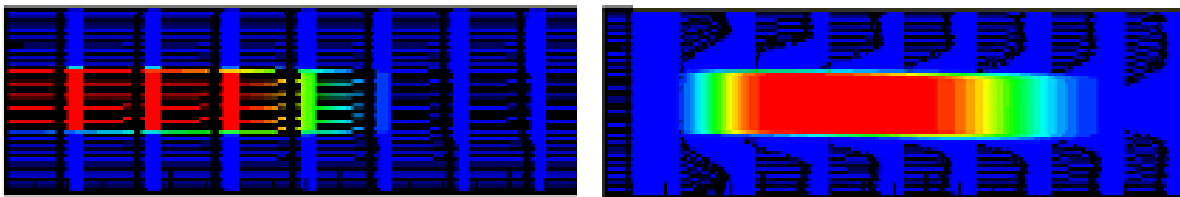


Фиг.5



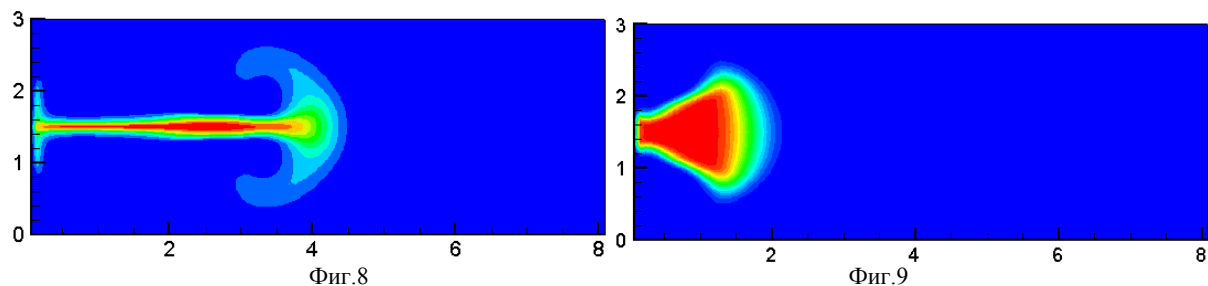
Фиг.6

На фиг.5 представлены линии вектора напряженности электрического поля E' в канале. На фиг.6 соответствующие на тот же момент времени линии вектора плотности электрического тока j' в канале.



Фиг.7

На левом рисунке фиг.7 представлен вход жидкости при отсутствии магнитного поля вместе с потоком воздуха по всей ширине канала. Введенная порция продолжает двигаться вместе с воздухом. Через некоторое время включается поперечное магнитное поле $B_z = 1$, под действием которого жидкость начинает останавливаться. На правом рисунке фиг.7 показан момент полной остановки жидкости, воздуха продолжает двигаться, испытывая торможение со стороны остановившейся жидкости.



На рис. 8 представлено влияние безразмерного числа He' на конфигурацию остановившейся порции жидкости. При увеличении He' жидкость вытягивается по длине.

На рис.9 представлено влияние безразмерного числа Hr' на конфигурацию остановившейся жидкости. При увеличении Hr' жидкость вытягивается и принимает колоколообразную форму.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ватажин А.Б., Любимов Г.А. Магнитогидродинамические течения в каналах. -М.:«Наука»,1970г..С.672.
- [2] Куликовский А.Г., Любимов Г.А. Магнитная гидродинамика. -М.: Физматгиз. 1962г. С.245.
- [3] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред.-М.: «Наука» 1982г.- С.621.
- [4] Савельев И.В. Курс общей физики, том 2.- М.: «Наука», 1988г. С.496.
- [5] C.W.Hirt and B.D.Nichols. Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries// J.Comput.Phys.,1981,Vol.39,pp.201-225.
- [6] Джакупов К.Б. Коррекции теоретических парадоксов механики сплошной среды.- Алматы: Изд-во «Гылым ордасы». 2015г. С.408.

REFERENCES

- [1] Vatajin A.B., Liubimoff G.A. MHD flow in channels. -M : . "Science", 1970. S.672 .
- [2] Savelieff I.B. Course of general physics , including 2.- M : . "Science", 1988 . S.496 .
- [3] Kulikovski A.G., Liubimoff G.A. Liubimoff G.A. MHD-M.: Fizmatgiz . 1962g . P.245 .
- [4] Landau L.D., Lifchic E.M. Electrodynamics– M.: “Nauka”. 1982.P.621. (in Russ.)
- [5] C.W.Hirt and B.D.Nichols. Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries// J.Comput. Phys., 1981, Vol.39,pp.201-225.
- [6] Jakupov K.B. Correction of continuum mechanics theoretical paradoxes – Almaty: publishing house «K2 », 2009. P.376

МАГНИТТІК ГИДРОДИНАМИКАДА МАКСВЕЛЛ ТЕНДЕУЛЕРІН ЖӘНЕ ОМ ЗАҢЫН ЕКІФАЗАЛЫ МАГНИТТІК ГИДРОДИНАМИКАДА САНДЫҚ МОДЕЛЬДЕУДЕ САПАЛЫ ҚОЛДАНУ

К.Б. Жакып-тегі

ҚР БҒМ Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы, Қазақстан

Түйін сөздер: индукция, кернеу, сұйықтық, ауа, магниттік өріс.

Аннотация. МГД-ның магниттік және электрлік өрістерінің гиперболалық немесе параболалық теңдеулері бар жүйелерінің қайшылықтары көрсетілген. МГД-да Максвеллдің теңдеулерін және Ом заңын тікелей пайдалану мәселесі негізделінген. Электромагниттік өрістердің алысқа әсер ететінін ескеретін Максвелл теңдеулеріне айқын айырымдық схемалар құрастыруға ерекше көңіл бөлінген. Арнадағы екіфазалық, яғни, электрөткізгіш сұйықтықтың электрөткізбейтін ауадағы ағысының сандық нәтижелері келтірілген. Тыстан салынған магнит өрісі Гартман үлкен сандарында енгізілген электрөткізгіш сұйықтықтың массасын тоқтатады да, оны қозғалмас жағдайда ұстап қалады.

Поступила 17.06.2016 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Процессы в околоземном космическом пространстве

<i>Яковец А.Ф., Гордиенко Г.И., Жумабаев Б.Т., Литвинов Ю.Г., Абдрахманов Н.</i> Статистика ночных увеличений электронной концентрации в максимуме F2-слоя.....	5
<i>Сомсиков В.М.</i> О природе бифуркации динамических систем.....	11
<i>Жантаев Ж.Ш., Грищенко В.Ф., Мукушев А.</i> Схемотехническое моделирование защиты электронной аппаратуры от электростатического разряда.....	15
<i>Антонова В.П., Крюков С.В., Луценко В.Ю., Чубенко А.П.</i> Эффекты землетрясений в интенсивности нейтронов тепловых энергий на высокогорной станции Северного Тянь-Шаня.....	20
<i>Салихов Н.М.</i> Новый метод регистрации динамики вспышек ионизации в ионосфере аппаратно-программным комплексом доплеровских измерений на наклонной радиотрассе.....	27

Наземно-космические методы исследования геодинимических процессов в земной коре

<i>Вилев А.В., Жантаев Ж.Ш., Стихарный А.П.</i> Динамика сезонных движений GPS станций на территории Северного Тянь-Шаня.....	34
<i>Хачикян Г.Я., Жумабаев Б.Т., Тойшиев Н.С., Калдыбаев А., Нуракунов С.</i> Вариации солнечной активности и пространственно-временное распределение сильных землетрясений ($M \geq 7.0$) на территории Евразии в 1973-2014 гг.....	40
<i>Бибосинов А.Ж., Шигаев Д.Т., Калдыбаев А.А., Нуракунов С.М., Бреусов Н.Г., Мамырбек Г.Б.</i> Исследование Шардаринского гидрокомплекса методом георадиолокации.....	46
<i>Бибосинов А.Ж., Нуракунов С.М., Калдыбаев А.А., Шигаев Д.Т.</i> Эффективность применения георадиолокационного метода при изучении инженерно-геологических условий на участках Алматинского метрополитена приповерхностного залегания.....	50
<i>Шигаев Д.Т., Мунсызбай Т.М.</i> Маломощная солнечная теплоэлектростанция с максимальным использованием энергии Солнца.....	56
<i>Жантаев Ж.Ш., Хачикян Г.Я., Кайраткызы Д., Андреев А.</i> Долговременные тренды в вариациях продолжительности земных суток и частоты возникновения на планете землетрясений.....	62
<i>Хачикян Г.Я., Жумабаев Б.Т., Сералиев А., Хасанов Э.</i> Пространственное распределение характеристик главного геомагнитного поля и эпицентров глубокофокусных ($h > 350$ км) землетрясений по данным 1973-2014 гг.....	67

<i>Исанова М.К., Коданова С.К., Рамазанов Т.С., Бастыкова Н.Х., Габдуллин М.Т., Молдабеков Ж.А.</i> Сечение рассеяния и тормозная способность в плотной плазме: влияние эффектов дифракции и динамического экранирования.....	73
<i>Кудайкулов А.А., Жозеранд К., Калтаев А.</i> Численное исследование процесса пальцеобразования при течении двух не смешивающихся жидкостей в канале.....	86
<i>Ахметов Б.С., Корченко А.А., Жумангалиева Н.К.</i> Модель решающих правил для обнаружения аномалий в информационных системах.....	91
<i>Бапаев К.Б., Сламжанова С.С., Исаева Г.Б.</i> О дискретных неравенствах.....	101
<i>Боос Э.Г., Альменова А.М., Жуков В.В., Садыков Т.Х., Степанов А., Таутаев Е.М.</i> Исследование взаимодействий частиц космического излучения методом радиоизлучения на высоте 3340 метров над уровнем моря.....	110
<i>Джакупов К.Б.</i> О моделировании динамики вязкой жидкости уравнениями ротора скорости и функции тока.....	117
<i>Джакупов К.Б.</i> Эффективное применение уравнений максвелла и закона ома в численном моделировании двухфазных процессов магнитной гидродинамики.....	124
<i>Исадыков А.Н., Иванов М.А., Сахиев С.К., Жаугашиева С.А., Нурбакова Г.С., Мукушев Б.А.</i> Вычисление ширины распада $\omega(782)$ мезона для реакции $\omega \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0$ в ковариантной модели кварков.....	135
<i>Калмурзаев Б.С.</i> О полурешетках роджерса двухэлементных семейств разностей в. п. множеств.....	141
<i>Кошеров Т.С., Жумабекова Г.Е.</i> Исследование структуры и фазового состава поверхности кремния при температурном и лазерном воздействии.....	147
<i>Кошеров Т.С., Көшикбай Б.Қ.</i> Особенности напряженного состояния пластин кремния в процессе термического отжига.....	156
<i>Курманбаев Д.М.</i> Солитонная деформация поверхности энепера третьего порядка.....	163
<i>Майлебаева Д., Тилегенова Д.</i> Метод параметризации при решении трансцендентных уравнений.....	168
<i>Мамаев Ш.М., Даниярбек Р.Н.</i> Ұзындығы шектелген стерженьде пластикалық облыстың және кернеуді жеңілдету толқындырының құрылуын торлық-характеристика әдісімен зерттеу.....	173
<i>Оңгарбаева А.Д.</i> Электрондық білім беру ресурстарын оқу процесінде болашақ мұғалімдерді оқытуда қолдану.....	184
<i>Сүйменбаев Б.Т., Алексеева Л.А., Сүйменбаева Ж.Б., Гусейнов С.Р.</i> Моделирование динамики космического аппарата в гравимагнитном поле земли в системе «MATLAB SIMULINK».....	188
<i>Тулентаев К.М., Шаймарданова Ж.Н., Габдуллин Б.</i> Структурные свойства (α, β) – коммутативных алгебр.....	208
<i>Сарсенгельдин М.М., Касабек С., Сагидолла Б.М.</i> Точное и приближенное решения двухфазовой обратной задачи Стефана.....	214