ISSN 2518-1726 (Online),
ISSN 1991-346X (Print)

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ

# Х А Б А Р Л А Р Ы

# ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

# N E W S

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

## ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА СЕРИЯСЫ

♦

## СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

♦

## PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

**3 (313)**

**МАМЫР – МАУСЫМ 2017 Ж.**
**МАЙ – ИЮНЬ 2017 г.**
**MAY – JUNE 2017**

1963 ЖЫЛДЫҢ ҚАҢТАР АЙЫНАН ШЫҒА БАСТАҒАН
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1963 ГОДА
PUBLISHED SINCE JANUARY 1963

ЖЫЛЫНА 6 РЕТ ШЫҒАДЫ
ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД
PUBLISHED 6 TIMES A YEAR

АЛМАТЫ, ҚР ҰҒА
АЛМАТЫ, НАН РК
ALMATY, NAS RK

**«ҚР ҰҒА Хабарлары. Физика-математикалық сериясы».**

**ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)**

Меншіктенуші: «Қазақстан Республикасының Ұлттық ғылым академиясы» РҚБ (Алматы қ.)
Қазақстан республикасының Мәдениет пен ақпарат министрлігінің Ақпарат және мұрағат комитетінде 01.06.2006 ж. берілген **№5543-Ж** мерзімдік басылым тіркеуіне қойылу туралы куәлік

Мерзімділігі: жылына 6 рет.
Тиражы: 300 дана.

Редакцияның мекенжайы: 050010, Алматы қ., Шевченко көш., 28, 219 бөл., 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18, www:nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

---



Типографияның мекенжайы: «Аруна» ЖК, Алматы қ., Муратбаева көш., 75.

**«Известия НАН РК. Серия физико-математическая».**

**ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)**

Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы)
Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации и архивов Министерства культуры и информации Республики Казахстан **№5543-Ж**, выданное 01.06.2006 г.

Периодичность: 6 раз в год.
Тираж: 300 экземпляров.

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, ком. 219, 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,
www:nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

---



Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75.

**News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physical-mathematical series.**

**ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)**

Owner: RPA "National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan" (Almaty)
The certificate of registration of a periodic printed publication in the Committee of information and archives of the Ministry of culture and information of the Republic of Kazakhstan N 5543-Ж, issued 01.06.2006

Periodicity: 6 times a year
Circulation: 300 copies

Editorial address: 28, Shevchenko str., of. 219, 220, Almaty, 050010, tel. 272-13-19, 272-13-18,
www:nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

---



Address of printing house: ST "Aruna", 75, Muratbayev str, Almaty

**N E W S**
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
**PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES**
ISSN 1991-346X
Volume 3, Number 313 (2017), 95 – 102

**B.D. Koshanov, J. Nurikenova**

Institute of Mathematics and Mathematical modeling, Almaty
koshanov@list.ru, zhibek.nurikenova@mail.ru

# ON SOLVABILITY OF THE GENERALIZED DIRICHLET-NEIMAN PROBLEM FOR A HIGH ORDER ELLIPTIC EQUATION

**Abstract**. For the elliptic equation $2l-$ th order with constant (and only) real coefficients considered boundary value problem of the job normal derivatives the $(k_j-1)-$ order, $j=1,\ldots,l$ where $1\le k_1<\ldots<k_l$. When $k_j=j$ it moves to the Dirichlet problem, and when $k_j=j+1$ - in the Neumann problem. The sufficient condition of the Fredholm tasks and present a Formula for its index.

**Keywords**: elliptic equation of high order, normal derivative, Dirichlet -- Neumann problem, solvability of problem.
**MSC** 34B705, 35J25, 47E05.

УДК 517.951

**Б.Д. Кошанов, Ж.С. Нурикенова**

Институт математики и математического моделирования, Алматы

# О РАЗРЕШИМОСТИ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ - НЕЙМАНА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

**Аннотация**. Для эллиптического уравнения $2l-$го порядка с постоянными (и только старшими) вещественными коэффициентами рассмотрена краевая задача, заключающаяся в задании нормальных производных $(k_j-1)-$го порядка, $j=1,\ldots,l$, где $1\le k_1<\ldots<k_l$. При $k_j=j$ она переходит в задачу Дирихле, а при $k_j=j+1$ – в задачу Неймана. Получено достаточное условие фредгольмовости этой задачи и приведена формула ее индекса.

**Ключевые слова**: эллиптические уравнения, нормальные производные, задача Дирихле-Неймана, разрешимость задачи.
**MSC** 34B705, 35J25, 47E05.

**Постановка задачи**. Рассмотрим в области $D$ на плоскости эллиптическое уравнение $2l$-го порядка

$$Lu=f \tag{1}$$

с дифференциальным оператором

$$L=\sum_{r=0}^{2l}a_r\frac{\partial^{2l}}{\partial x^{2l-r}\partial y^r}+\sum_{0\le r\le k\le 2l-1}a_{rk}(x)\frac{\partial^k}{\partial x^{k-r}\partial y^r}$$

с коэффициентами $a_r\in R$ и $a_{rk}\in C^\mu(\overline{D})$, $0<\mu<1$.

Область $D$ предполагается односвязной и ограниченной гладким контуром $\Gamma$ класса $C^{2l,\mu}$. Условие эллиптичности заключается в том, что $a_{2l} \neq 0$ и корни характеристического многочлена $\chi(z) = a_0 + a_1 z + .... + a_{2l} z^{2l}$ не лежат на вещественной оси. Таким образом,

$$\chi(z) = a_{2l} \prod_{k=1}^{m} (z - \nu_k)^{l_k} \prod_{k=1}^{m} (z - \overline{\nu}_k)^{l_k}, \tag{2}$$

где корни $\nu_i$ попарно различны, лежат в верхней полуплоскости и их суммарная кратность $l_1 + ... + l_m$ равна $l$.

Обобщенная задача Дирихле - Неймана заключается в отыскании решения $u(x, y)$ уравнения (1) в области $D$ по краевым условиям

$$\left. \frac{\partial^{k_j - 1} u}{\partial n^{k_j - 1}} \right|_{\Gamma} = g_j, \ j = 1,...,l, \tag{3}$$

где $1 \leq k_1 < k_2 < ... < k_l \leq 2l - 1$ и $n = n_1 + i n_2$ означает единичную внешнюю нормаль. Нормальная производная $k$- го порядка здесь понимается как граничный дифференциальный оператор

$$\left( n_1 \frac{\partial}{\partial x} + n_2 \frac{\partial}{\partial y} \right)^k u = \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} n_1^r n_2^{k-r} \frac{\partial^k u}{\partial x^r \partial y^{k-r}}.$$

При $k_j = j$ эта задача отвечает задаче Дирихле, а при $k_j = j + 1$ ее естественно назвать обобщенной задачей Неймана. Для полигармонического уравнения последняя задача была изучена А.В. Бицадзе [1]. Другой вариант задачи Неймана, основанный на вариационном принципе, был ранее предложен А.А.Дезиным [2]. При $a_{kr} = 0$ и $f = 0$ задача (1), (3) была рассмотрена в работе [3].

Поскольку по предположению $\Gamma \in C^{2l,\mu}$, функции $n_1, n_2$ и, значит, коэффициенты граничных дифференциальных операторов (3) принадлежат классу $C^{2l-1,\mu}(\Gamma)$. Решение уравнения (1) ищется в классе $C^{2l,\mu}(\overline{D})$, соответственно его правая часть $f$ должна принадлежать $C^{\mu}(\overline{D})$, а функции $g_j$ в краевом условии (3) - классу $C^{2l-k_j+1,\mu}(\Gamma)$.

С уравнением (1) свяжем $2l \times 2l$ матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ . & . & . & ... & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_{2l,2} & ... & -a_{2l-1} \end{pmatrix} \tag{4}$$

которая представляет собой так называемую фробениусовую нормальную форму [4] и ее жорданова нормальная форма полностью определяется своим характеристическим многочленом (2). Более точно, ее жорданова матрица $\widetilde{J}$ имеет блочно- диагональную структуру $\widetilde{J} = diag(J, \overline{J})$, $J = diag(J_1,..., J_m)$с клетками Жордана

$$J_k = \begin{pmatrix} \nu_k & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \nu_k & 1 & ... & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & \nu_k \end{pmatrix} \in C^{l_k \times l_k}.$$

Матрицу $\widetilde{B} \in C^{2l\times 2l}$, приводящую $A$ к жордановой форме $\widetilde{J}$, можно описать явно. С этой целью удобно ввести следующее обозначение. Пусть некоторый $n$- вектор $g(z) = (g_1(z),..., g_n(z))$ аналитичен в окрестности точек $\nu_1,...,\nu_m$. Тогда исходя из разбиения $l = l_1 + ... + l_m$, фигурирующего в (2), можем ввести блочную $n \times l$- матрицу $W_g(\nu_1,...,\nu_m) = (W_g(\nu_1),...,W_g(\nu_m))$, где матрица $W_g(\nu_k) \in C^{n\times l_k}$ составлена из вектор-столбцов

$$g(\nu_k), g'(\nu_k),..., \frac{1}{(l_k - 1)} g^{(l_k - 1)}(\nu_k).$$

Применим это обозначение к $2l$ - столбцу $h(z) = (1, z,..., z^{2l-1})$, пологая

$$B = W_h(\nu_1,...,\nu_m) \in C^{2l\times l} \tag{6}$$

Утверждается, что блочная матрица $\widetilde{B} = (B, \overline{B})$ обратима и имеет место равенство

$$\widetilde{B}^{-1} A \widetilde{B} = \widetilde{J}. \tag{7}$$

В самом деле, по определению (6) матрицу $\widetilde{B}$ можно записать в виде $W_h(\nu_1,...,\nu_m, \overline{\nu}_1,...,\overline{\nu}_m)$ и ее определитель, известный как обобщенный определитель Вандермонда, отличен от нуля [5]. Что касается равенства (7), то оно равносильно соотношению

$$AW_h(\nu_1,...,\nu_m) = W_h(\nu_1,...,\nu_m)J,$$

или, в терминах столбцов матрицы $W$, соотношениям

$$Ah(\nu_k) = \nu_k h(\nu_k), \quad Ah^{(j)}(\nu_k) = \nu_k h^{(j)}(\nu_k) + jh^{(j-1)}(\nu_k), 1 \le j \le l_k - 1.$$

Из определения (4) видно, что действие матрицы $A$ на вектор $h(z)$ дает вектор $\widetilde{h} = Ah$ с компонентами

$$\widetilde{h}_1(z) = z,..., \widetilde{h}_{2l-1}(z) = z^{2l-1}, \widetilde{h}_{2l}(z) = -\sum_{j=0}^{2l-1} a_{2l,j} z^j.$$

Согласно (2) имеем равенства $\chi^{(j)}(\nu_k) = 0$, $0 \le j \le l_k - 1$, так что

$$\widetilde{h}^{(j)}(\nu_k) = [zh(z)]^{(j)}\Big|_{z=\nu_k}, \ 0 \le j \le l_k - 1,$$

откуда соотношения (7) получаются непосредственно.

Обозначим $e(t) = e_1(t) + ie_2(t) \in C^{2l-1,\mu}(\Gamma)$ единичный касательный вектор к контуру $\Gamma$ в точке $t$, связанный с вектором $n(t)$ внешней нормали равенством $e = in$, и введем $l \times 2l$ матрицу- функцию $C = (C_{jk})$, элементы которой определяются из соотношений

$$\sum_{k=1}^{2l} C_{jk} z^{k-1} = (e_1 + e_2 z)^{2l-k_j} (-e_2 + e_1 z)^{k_j - 1}, \ 1 \le j \le l, \tag{8}$$

**Основной результат**. Сформулируем теперь основной результат о фредгольмовой разрешимости рассматриваемой задачи. Как обычно, под фредгольмовостью и индексом задачи понимаются аналогичные понятия для отвечающего ей оператора

$$C^{2l,\mu}(\overline{D}) \to C^{\mu}(\overline{D}) \times \prod_{j=1}^{l} C^{2l-k_j+1,\mu}(\Gamma). \tag{9}$$

Напомним, что определенные выше прямоугольные матрицы $C$ и $B$ имеют размеры, соответственно, $l \times 2l$ и $2l \times l$, так что можно ввести $l \times l$ матрицу – функцию $G(t) = C(t)B$, $t \in \Gamma$.

**Теорема 1**. *В предположении*

$$\det[C(t)B] \ne 0, \ t \in \Gamma,$$

*задача (1), (3) фредгольмова в пространстве* $C^{2l,\mu}(\overline{D})$ *и ее индекс* $\wp$ *дается формулой*

$$\wp = -\frac{1}{\pi}[\arg\det(CB)]\Big|_{\Gamma} + 2l^2, \tag{11}$$

*где приращение непрерывной ветви аргумента на контуре* $\Gamma$ *осуществляется против часовой стрелки.*

**Доказательство.** Пусть условие (10) выполнено. Покажем, что тогда оператор (9) исходной задачи фредгольмов и в обозначениях (10) его индекс $\wp$ дается формулой (11).

Теперь обратимся к матрице $CB$. Напомним, что $2l \times l$ матрица $B$, фигурирующая в (10), определяется равенством (6) по отношению к $2l$- вектору $h(z) = (1, z, ..., z^{2l-1})$. Из определения (8) элементов матрицы $C(t)$ видно, что она зависит только от единичного касательного вектора $e(t) = e_1(t) + ie_2(t)$ в точке $t \in \Gamma$, этот факт можно записать в виде $C(t) = C_0[e(t)]$. Когда точка $t$ пробегает контур $\Gamma$, вектор $e(t)$ описывает единичную окружность $\Gamma_0$ против часовой стрелки, поэтому условие (10) равносильно

$$\det[C_0(t)B] \ne 0, \ e \in \Gamma_0, \tag{12}$$

и, соответственно, для величины $\wp$ в (11) имеем выражение

$$\wp = -\frac{1}{\pi}[\arg\det(C_0 B)]\Big|_{\Gamma_0} + 2l^2 \tag{13}$$

Из утверждения а) леммы, приведенной в [5], следует, что матрица $C_0(e)W_h(\nu_1, ..., \nu_m)$ совпадает с $W_p(\nu_1, ..., \nu_m)$, где $p = C_0(e)h$. Таким образом, $l$- вектор $p$ представляет собой многочлен $p(e, z)$, составленный из компонент (2.11), и следовательно,

$$C_0 B = W_p(\nu_1, ..., \nu_m), \ p_j(e, z) = (e_1 + e_2 z)^{2l-1} \left( \frac{-e_2 + e_1 z}{e_1 + e_2 z} \right)^{k_j - 1}. \tag{14}$$

Таким образом, условие (12) фредгольмовости задачи (1), (3) не зависит от контура $\Gamma$ и определяется только характеристическим уравнением (2) и набором $1 \le k_1 < k_2 < ... < k_l \le 2l$ натуральных чисел.

Утверждения b), c) леммы [5] позволяют связать определитель матрицы $W$ с некоторыми операциями.

**Лемма 1**. (a) Пусть вектор - функция $g = (g_1,..., g_l)$ и скалярная функция $\varphi$ аналитичны в окрестности точек $\nu_1,...,\nu_m$. Тогда

$$\det W_{\varphi g}(\nu_1,...,\nu_m) = \prod_{j=1}^{m} [\varphi(\nu_j)]^{l_j} \det W_g(\nu_1,...,\nu_m).$$

(b) Пусть скалярная функция $\omega$ аналитична в окрестности точек $\nu_1,...,\nu_m$, причем $\omega'(\nu_j) \neq 0$, $1 \leq j \leq m$, и $\omega'(\nu_i) \neq \omega'(\nu_j)$ при $i \neq j$. Пусть вектор- функция $h = (h_1,..., h_l)$ аналитична в окрестности точек $\omega(\nu_1),..., \omega(\nu_m)$. Тогда

$$W_{how}(\nu_1,...,\nu_m) = \prod_{j=1}^{m} [\omega'(\nu_j)]^{l_j(l_j-1)/2} W_h[\omega(\nu_1),...., \omega(\nu_m)].$$

Полагая

$$\omega(e,z) = \frac{-e_2 + e_1 z}{e_1 + e_2 z},\ g_j(\varsigma) = \varsigma^{k_j - 1},\ 1 \leq j \leq l, \tag{15}$$

представим многочлены (14) в виде $p_j(e,z) = (e_1 + e_2 z)^{2l-1} g[\omega(e,z)]$. Тогда на основании леммы 1

$$\det W_p = \prod_{j=1}^{m} (e_1 + e_2\nu_j)^{l_j(2l-l_j)} \det W_g \circ \omega.$$

Так что условие (12) равносильно

$$\det W_g[\omega(e,\nu_1),..., \omega(e,\nu_m)] \neq 0,\ e \in \Gamma_0 \tag{16}$$

и равенство (13) переходит в

$$\wp = -\frac{1}{\pi}[\arg\det W_g \circ \omega]\Big|_{\Gamma_0} + 2l^2 - \sum_{j=1}^{m} \frac{l_j(2l-l_j)}{\pi} \arg(e_1 + \nu_j e_2)\Big|_{\Gamma_0}.$$

Поскольку

$$\frac{1}{2\pi}\arg(e_1 + \nu_j e_2)\Big|_{\Gamma_0} = 1, \tag{17}$$

отсюда окончательно

$$\wp = -2\left[\frac{1}{2\pi}\arg\det W_g[\omega(e,\nu_1),..., \omega(e,\nu_m)]\Big|_{\Gamma_0} + l^2 - \sum_{j=1}^{m} l_j^2\right]. \tag{18}$$

С помощью предложения d) леммы [5] определитель матрицы $W_g$ в (15), (16) и величину $\wp(g)$ можно вычислить явно в каждом из следующих двух случаев:

$$\begin{aligned} &(a)\ k_{j+1} - k_j = 1,\ 1 \leq j \leq l, \\ &(b)\ m = 1, \nu_1 = \nu. \end{aligned} \tag{19}$$

Случай $(a)$ означает, что $k_j = k_1 + j - 1$, а случай $(b)$ соответствует одному корню $\nu_1 = \nu$ в (2).

**Теорема 2**. *В каждом из случаев (19) задача (1), (3) фредгольмова и ее индекс равен нулю.*

**Доказательство.** Из предложения d) леммы [5] непосредственно следует, что

$$\det W_g(\varsigma_1,...,\varsigma_m) = \prod_{j=1}^{m} \varsigma_j^{(k_1-1)l_j} \prod_{i>j} (\varsigma_i - \varsigma_j)^{l_i l_j}$$

в случае $(a)$ и

$$\det W_g(\varsigma) = c\varsigma^s,\ s = \sum_{j=1}^{l} (k_j - j)$$

в случае $(b)$ с некоторой постоянной $c \neq 0$. В обозначениях (15) для $\omega_i = \omega(s,\nu_i)$ разность

$$\omega(e,\nu_i) - \omega(s,\nu_j) = \frac{\nu_i - \nu_j}{(e_1 + e_2\nu_i)(e_1 + e_2\nu_j)},$$

поэтому условие (16) выполнено в обоих случаях. С учетом (17) и очевидного равенства

$$\arg[\omega(e,\nu_j)]\Big|_{\Gamma_0} = 0$$

приходим к выражению

$$\frac{1}{2\pi} \arg\det W_g[\omega(e,\nu_1),...,\omega(e,\nu_m)]\Big|_{\Gamma_0} = -2\sum_{i>j} l_i l_j = -l^2 + \sum_{j=1}^{m} l_j^2$$

в случае $(a)$ и $\wp(g) = 0$ в случае $(b)$. Поскольку $l_1 = l$ при $m = 1$, предыдущее равенство можно использовать для обоих случаев, что совместно с (18) приводит к $\wp = 0$.

Удобно от матрицы $W_g$ в (16) перейти к аналогичной матрице $W_q$, где $q$ связан с вектором $g$ в (15) соотношением $g(\omega) = \omega^{k_1-1} q(\omega)$. В явном виде

$$q_j(\omega) = \omega^{s_j},\ s_j = k_j - k_1,\ 1 \leq j \leq l. \tag{20}$$

Согласно лемме 1 $(a)$ определители этих матриц связаны равенством

$$\det W_q = \prod_{j=1}^{m} \omega_j^{l_j(k_1-1)} \det W_q,$$

так что в формулах (16), (18) можно $g$ заменить на $q$.

Теорему 2 дополним случаем $m = 2$, $\nu_2 = -1/\nu_1$. С этой целью обозначим $\Gamma_0(\nu)$ образ единичной окружности $\Gamma_0$ при отображении $e \to \omega(e,\nu)$, где $1 \neq \mathrm{Im}\nu > 0$. Очевидно, при $\nu = i$ этот образ состоит из одной точки $\varsigma = i$, поэтому можно считать $\nu \neq i$. Полагая $t = e_2 / e_1$ и переходя к дробно -линейной функции

$$\varsigma = \frac{-t + \nu}{1 + t\nu} \tag{21}$$

убеждаемся, что $\Gamma_0(\nu)$ является окружностью, лежащей в верхней полуплоскости. Эта окружность проходит через точки $\nu$, $-1/\nu$ и имеет своим центром точку

$$\varsigma_0 = i\frac{|\nu|^2 + 1}{2\,\mathrm{Im}\nu} \tag{22}$$

Важно отметить, что эта окружность всегда охватывает точку $\varsigma = i$.

В самом деле, как показывает прямая проверка, при $\nu = \alpha + i\beta$, $1 \neq \beta > 0$, разность

$$\left|\varsigma_0-\nu\right|^2-\left|\varsigma_0-i\right|^2=\left(\alpha^2+\beta^2\right)^2+2\left(\alpha^2-\beta^2\right)+1-\left[\alpha^2+(\beta-1)^2\right]^2$$

совпадает с положительной величиной $4\beta\left[\alpha^2+(\beta-1)^2\right]$.

**Теорема 3**. *Пусть* $m=2$, $\nu_1=\nu$, $\nu_2=-1/\nu_1$ *и натуральное* $r$ *выбрано столь большим, что*

$$P_s(\varsigma)=(-\varsigma)^r\det W_q(\varsigma,-1/\varsigma),\ s=(s_1,...,s_{l-1}), \tag{23}$$

является многочленом. Тогда условие (16) равносильно тому, что

$$P_s(\varsigma)\neq 0,\ \varsigma\in\Gamma(\nu). \tag{24}$$

При выполнении этого условия индекс $\wp$ задачи дается формулой

$$\wp=4\left[n_s(\nu)-l_1l_2\right], \tag{25}$$

где $n_s(\nu)$ есть число корней многочлена $P_s$ (с учетом их кратности), лежащих внутри окружности $\Gamma_0(\nu)$.

**Доказательство.** Воспользуемся тем, что преобразование $\omega$ коммутирует с $\nu\to-1/\nu$, т.е. $\omega(e,-1/\nu)=-1/\omega(e,\nu)$. Поэтому

$$\det W_q\left[\omega(e,\nu_1),\omega(e,\nu_2)\right]=\det W_q\left[\omega(e,\nu),-1/\omega(e,\nu)\right],$$

В соответствии с (23) отсюда следует, что условие (16) равносильно $P_s\left[\omega(e,\nu)\right]\neq 0$, $e\in\Gamma_0$, т.е. отсутствию корней $\varsigma_j$ многочлена $P_s$ на окружности $\Gamma_0(\nu)$. При выполнении этого условия

$$\frac{1}{2\pi}\arg\det W_q\left[\omega(e,\nu_1),\omega(e,\nu_2)\right]\Big|_{\Gamma_0}=\frac{1}{2\pi}\arg P_s\big|_{\Gamma_0(\nu)}. \tag{26}$$

Запишем далее $P_s(\varsigma)$ в произведение линейных множителей $\varsigma-\varsigma_j$ и заметим, что

$$\frac{1}{2\pi}\arg\left[\omega(e,\nu)-\varsigma_j\right]_{\Gamma_0}=\begin{cases}-2,\varsigma_j\in D_0(\nu),\\ 0,\varsigma_j\notin\overline{D_0(\nu)},\end{cases}$$

где $D_0(\nu)$ означает открытый круг с границей $\Gamma_0(\nu)$.

В самом деле, при возрастании $t\in R$ точка $\varsigma$ в (21) обходит окружность $\Gamma_0(\nu)$ по часовой стрелке. Поскольку $t=e_2/e_1$ не меняется от замены $e$ на $-e$, отсюда заключаем, что при обходе $e\in\Gamma_0$ против часовой стрелки точка $\varsigma=\omega(e,\nu)$ двукратно обходит окружность $\Gamma_0(\nu)$ по часовой стрелке.

Суммируя равенства (26) по всем $j$, приходим к заключению, что левая часть (26) совпадает с $c-2n_s(\nu)$. Поэтому для $l=l_1+l_2$ формула (18) переходит в (25), что завершает доказательство теоремы.

**ЛИТЕРАТУРА**

[1] Бицадзе А.В. О некоторых свойствах полигармонических функций // Дифференц. уравнения. - 1988. - Т. 24, № 5. - С. 825-831.

[2] Дезин А.А. Вторая краевая задача для полигармонического уравнения в пространстве $W_2^m$ // Докл. АН СССР. – 1954. - Т. 96, №5. - С. 901-903.

[3] Малахова Н.А., Солдатов А.П. Об одной краевой задаче для эллиптического уравнения высокого порядка // Дифференц. уравнения. - 2008. - Т. 44, № 8. - С. 1077-1083.

[4] Мальцев А.И. Основы линейной алгебры, М., Москва, 1970.
[5] Солдатов А.П. Эллиптические системы высокого порядка // Дифференц. уравнения. – 1989. - Т. 25, № 1. - С. 136-144.
[6] Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
[7] Ващенко О.В., Солдатов А.П. Интегральное представление решений обобщенной системы Бельтрами // Науч. Ведом. БелГУ, сер. инфор. и прик. мат. – 2006. - Вып. 6, №1 (21). - С. 3-6.
[8] Soldatov A.P. Hyperanalytic functions and their applications // J. Math. Scien. – 2004. - V.17. - P. 1-111.
[9] Пале Р. Семинар по теореме Атьи-Зингера об индексе. - М.: Мир, 1970.
[10] Кошанов Б.Д, Солдатов А.П. Обобщенная задача Дирихле -- Неймана для эллиптического уравнения высокого порядка // Дифференц. уравнения. – 2016. – Т. 52, №12. - С. 1666-1681.
[11] Абаполова Е.А., Солдатов А.П. К теории сингулярных интегральных уравнений на гладком контуре // Науч. Ведом. БелГУ, сер. инфор. и прик. мат. – 2010. - Вып. 18, №5 (76). - С. 6-20.

**REFERENCES**

[1] Bitsadze A.V. Some Properties of Polyharmonic Functions // Differential Eq. – 1988. - V. 24, № 5. - P. 825-831.
[2] Dezin A.A. The Second Boundary Problem for the Polyharmonic Equation in the Space $W_2^m$ // Dokl. Akad. Nauk. – 1954. - V. 96, № 5. - P. 901-903.
[3] Malakhova N.A., Soldatov A.P. On a Boundary Value Problem for a Higher-Order Elliptic Equation // Differential Eq. – 2008. - V. 44, № 8. - P. 1077-1083.
[4] Mal'tsev A.I. Foundations of Linear Algebra. - Moscow, 1970.
[5] Soldatov A.P. Higher-Order Elliptic Systems // Differential Eq. – 1989. - V. 25, № 1. - P. 136-144.
[6] Muskhelishvili N.I. Singular Integral Equations. - Moscow, 1968.
[7] Vashchenko O.V., Soldatov A.P. Integral Representation of Solutions of Beltrami Generalized System // Nauch. Vedom. Belgorod Univ. Ser. Inform., Appl. Math. – 2006. - Vyp. 6, № 1(21). - P. 3-6.
[8] Soldatov A.P. Hyperanalytic Functions and Their Applications // J. Math. Scien. – 2004. - V. 17. - P. 1-111.
[9] Palais R.S. Seminar on the Atiyah-Singer Index Theorem, Princeton: Princeton Univ. Press, 1965.
[10] Koshanov B.D., Soldatov A.P. Boundary value problem with normal derivatives for a higher-order elliptic equation on the plane // Differentia Eq. – 2016. – V. 52, № 12. – P. 1594-1609.
[11] Abapolova E.A., Soldatov A.P. On the theory of singular integral equations on a smooth contour // Nauch. Vedom. Belgorod Univ. Ser. Inform., Appl. Math. – 2010. - Vyp. 18, №5 (76). – P. 6-20.

**Б.Д. Қошанов, Ж.С. Нұрыкенова**

Математика және математикалық моделдеу институты, Алматы

## ЖОҒАРҒЫ РЕТТІ ЭЛЛИПТИКАЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ҮШІН ЖАЛПЫЛАҒАН ДИРИХЛЕ - НЕЙМАН ЕСЕБІНІҢ ШЕШІЛІМІ ТУРАЛЫ

**Аннотация**. Тұрақты нақты коэффициентті $2l$ - дәрежелі эллиптикалық теңдеу үшін, $(k_j-1)$– шы дәрежелі нормал туындысы бар шеттік есеп қарастырылды, мұндағы $j=1,...,l$, $1\le k_1<...<k_l$. $k_j=j$ болған кезде Дирихле есебіне көшеді, ал $k_j=j+1$ болғанда Нейман есебіне көшеді. Осы есептің фредгольмдылығының жеткілікті шарты алынды және оның индексінің формуласы көрсетілді.

**Түйін сөздер**: эллиптикалық теңдеулер, нормал туындылар, Дирихле-Нейман есебі, есептің шешілуі.
**MSC** 34B705, 35J25, 47E05.

**МАЗМҰНЫ**

**СОДЕРЖАНИЕ**

**CONTENTS**

**Publication Ethics and Publication Malpractice in the journals of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan**

For information on Ethics in publishing and Ethical guidelines for journal publication see http://www.elsevier.com/publishingethics and http://www.elsevier.com/journal-authors/ethics.

Submission of an article to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan implies that the described work has not been published previously (except in the form of an abstract or as part of a published lecture or academic thesis or as an electronic preprint, see http://www.elsevier.com/postingpolicy), that it is not under consideration for publication elsewhere, that its publication is approved by all authors and tacitly or explicitly by the responsible authorities where the work was carried out, and that, if accepted, it will not be published elsewhere in the same form, in English or in any other language, including electronically without the written consent of the copyright-holder. In particular, translations into English of papers already published in another language are not accepted.

No other forms of scientific misconduct are allowed, such as plagiarism, falsification, fraudulent data, incorrect interpretation of other works, incorrect citations, etc. The National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan follows the Code of Conduct of the Committee on Publication Ethics (COPE), and follows the COPE Flowcharts for Resolving Cases of Suspected Misconduct (http://publicationethics.org/files/u2/New_Code.pdf). To verify originality, your article may be checked by the Cross Check originality detection service http://www.elsevier.com/editors/plagdetect.

The authors are obliged to participate in peer review process and be ready to provide corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. All authors of a paper should have significantly contributed to the research.

The reviewers should provide objective judgments and should point out relevant published works which are not yet cited. Reviewed articles should be treated confidentially. The reviewers will be chosen in such a way that there is no conflict of interests with respect to the research, the authors and/or the research funders.

The editors have complete responsibility and authority to reject or accept a paper, and they will only accept a paper when reasonably certain. They will preserve anonymity of reviewers and promote publication of corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. The acceptance of a paper automatically implies the copyright transfer to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.

The Editorial Board of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan will monitor and safeguard publishing ethics.

Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайтах:

www:nauka-nanrk.kz

http://www.physics-mathematics.kz

**ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)**

Редакторы *М. С. Ахметова, Д.С. Аленов, Т.А. Апендиев*
Верстка на компьютере *А.М. Кульгинбаевой*

Подписано в печать 10.04.2017.
Формат 60x881/8. Бумага офсетная. Печать – ризограф.
6,5 п.л. Тираж 300. Заказ 3.

*Национальная академия наук РК*
*050010, Алматы, ул. Шевченко, 28, т. 272-13-18, 272-13-19*