ISSN 2518-1726 (Online),
ISSN 1991-346X (Print)

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ

Х А Б А Р Л А Р Ы

ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

N E W S

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА СЕРИЯСЫ

♦

СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

♦

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

4 (314)

ШІЛДЕ – ТАМЫЗ 2017 Ж.
ИЮЛЬ – АВГУСТ 2017 г.
JULY – AUGUST 2017

1963 ЖЫЛДЫҢ ҚАҢТАР АЙЫНАН ШЫҒА БАСТАҒАН
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1963 ГОДА
PUBLISHED SINCE JANUARY 1963

ЖЫЛЫНА 6 РЕТ ШЫҒАДЫ
ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД
PUBLISHED 6 TIMES A YEAR

АЛМАТЫ, ҚР ҰҒА
АЛМАТЫ, НАН РК
ALMATY, NAS RK

Б а с р е д а к т о р ы
ф.-м.ғ.д., проф., ҚР ҰҒА академигі **Ғ.М. Мұтанов**

Р е д а к ц и я а л қ а с ы:

Жұмаділдаев А.С. проф., академик (Қазақстан)
Кальменов Т.Ш. проф., академик (Қазақстан)
Жантаев Ж.Ш. проф., корр.-мүшесі (Қазақстан)
Өмірбаев У.У. проф. корр.-мүшесі (Қазақстан)
Жүсіпов М.А. проф. (Қазақстан)
Жұмабаев Д.С. проф. (Қазақстан)
Асанова А.Т. проф. (Қазақстан)
Бошкаев К.А. PhD докторы (Қазақстан)
Сұраған Д. корр.-мүшесі (Қазақстан)
Quevedo Hernando проф. (Мексика),
Джунушалиев В.Д. проф. (Қырғыстан)
Вишневский И.Н. проф., академик (Украина)
Ковалев А.М. проф., академик (Украина)
Михалевич А.А. проф., академик (Белорус)
Пашаев А. проф., академик (Әзірбайжан)
Такибаев Н.Ж. проф., академик (Қазақстан), бас ред. орынбасары
Тигиняну И. проф., академик (Молдова)

«ҚР ҰҒА Хабарлары. Физика-математикалық сериясы».

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Меншіктенуші: «Қазақстан Республикасының Ұлттық ғылым академиясы» РҚБ (Алматы қ.)
Қазақстан республикасының Мәдениет пен ақпарат министрлігінің Ақпарат және мұрағат комитетінде 01.06.2006 ж. берілген **№5543-Ж** мерзімдік басылым тіркеуіне қойылу туралы куәлік

Мерзімділігі: жылына 6 рет.
Тиражы: 300 дана.

Редакцияның мекенжайы: 050010, Алматы қ., Шевченко көш., 28, 219 бөл., 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18, www:nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

---

© Қазақстан Республикасының Ұлттық ғылым академиясы, 2017

Типографияның мекенжайы: «Аруна» ЖК, Алматы қ., Муратбаева көш., 75.

Г л а в н ы й   р е д а к т о р
д.ф.-м.н., проф. академик НАН РК **Г.М. Мутанов**

Р е д а к ц и о н н а я   к о л л е г и я:

Джумадильдаев А.С. проф., академик (Казахстан)
Кальменов Т.Ш. проф., академик (Казахстан)
Жантаев Ж.Ш. проф., чл.-корр. (Казахстан)
Умирбаев У.У. проф. чл.-корр. (Казахстан)
Жусупов М.А. проф. (Казахстан)
Джумабаев Д.С. проф. (Казахстан)
Асанова А.Т. проф. (Казахстан)
Бошкаев К.А. доктор PhD (Казахстан)
Сураган Д. чл.-корр. (Казахстан)
Quevedo Hernando проф. (Мексика),
Джунушалиев В.Д. проф. (Кыргызстан)
Вишневский И.Н. проф., академик (Украина)
Ковалев А.М. проф., академик (Украина)
Михалевич А.А. проф., академик (Беларусь)
Пашаев А. проф., академик (Азербайджан)
Такибаев Н.Ж. проф., академик (Казахстан), зам. гл. ред.
Тигиняну И. проф., академик (Молдова)

«Известия НАН РК. Серия физико-математическая».

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346Х (Print)

Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы)
Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации и архивов Министерства культуры и информации Республики Казахстан **№5543-Ж**, выданное 01.06.2006 г.

Периодичность: 6 раз в год.
Тираж: 300 экземпляров.

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, ком. 219, 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,
www:nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

© Национальная академия наук Республики Казахстан, 2017

Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75.

E d i t o r i n c h i e f
doctor of physics and mathematics, professor, academician of NAS RK **G.M. Mutanov**

E d i t o r i a l   b o a r d:

Dzhumadildayev A.S. prof., academician (Kazakhstan)
Kalmenov T.Sh. prof., academician (Kazakhstan)
Zhantayev Zh.Sh. prof., corr. member. (Kazakhstan)
Umirbayev U.U. prof. corr. member. (Kazakhstan)
Zhusupov M.A. prof. (Kazakhstan)
Dzhumabayev D.S. prof. (Kazakhstan)
Asanova A.T. prof. (Kazakhstan)
Boshkayev K.A. PhD (Kazakhstan)
Suragan D. corr. member. (Kazakhstan)
Quevedo Hernando prof. (Mexico),
Dzhunushaliyev V.D. prof. (Kyrgyzstan)
Vishnevskyi I.N. prof., academician (Ukraine)
Kovalev A.M. prof., academician (Ukraine)
Mikhalevich A.A. prof., academician (Belarus)
Pashayev A. prof., academician (Azerbaijan)
Takibayev N.Zh. prof., academician (Kazakhstan), deputy editor in chief.
Tiginyanu I. prof., academician (Moldova)

News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physical-mathematical series.

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Owner: RPA "National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan" (Almaty)
The certificate of registration of a periodic printed publication in the Committee of information and archives of the Ministry of culture and information of the Republic of Kazakhstan N 5543-Ж, issued 01.06.2006

Periodicity: 6 times a year
Circulation: 300 copies

Editorial address: 28, Shevchenko str., of. 219, 220, Almaty, 050010, tel. 272-13-19, 272-13-18,
www:nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

© National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, 2017

Address of printing house: ST "Aruna", 75, Muratbayev str, Almaty

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 4, Number 314 (2017), 230 – 240

UDC 517.94

Besbayev G.A.[1], ShaldanbayevA.Sh.[1], Akylbayev M.I.[2]

[1]South Kazakhstan State University, Shymkent
[2]Kazakhstan Engineering and Pedagogical University of Friendship of Peoples, Shymkent
shaldanbaev51@mail.ru

SOLUTION OF A SINGULARLY PERTURBED CAUCHY PROBLEM, FOR AN ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION OF THE SECOND ORDER WITH CONSTANT COEFFICIENTS, BY THE OPERATOR METHOD

Abstract. In this paper we obtain a spectral decomposition of the solution of the Cauchy problem in a space with an indefinite metric, and with the help of this expansion we deduce the boundary layer expansion of the solution of the singularly perturbed Cauchy problem, for an ordinary second-order differential equation

Key words: completely continuous operator, selfadjoint operator, Gilbert-Schmidt theorem, Volterian operators, indefinite metric, Schmidt decomposition, completeness, orthonormal basis.

$$L_\varepsilon y = \varepsilon y''(x) + a\, y'(x) + by(x) = f(x),\ a, b \text{ - } const,\ y(0) = 0, y'(0) = 0;$$
$$f(x) \in L^2(0,1), y(x) \in C^2(0,1) \cap C^2[0,1].$$

УДК 517.94

Г.А. Бесбаев,[1] А.Ш. Шалданбаев,[1] М.И. Ақылбаев[2]

[1]Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент қ-сы;
[2]Қазақстанның инженерлі-педагогикалық халықтар достығы университеті, Шымкент қ-сы

КОЭФФИЦИЕНТТЕРІ ТҰРАҚТЫ ЕКІНШІ РЕТТІ КӘДІМГІ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУДІҢ СИНГУЛЯР ӘСЕРЛЕНГЕН КОШИЛІК ЕСЕБІН ШЕШУДІҢ ОПЕРАТОРЛЫҚ ӘДІСІ ТУРАЛЫ

1. Кіріспе.

Гилберттің $L^2(0,1)$ кеңістігінде Кошидің, мынадай,

$$L_\varepsilon y = \varepsilon y''(x) + a\, y'(x) + by(x) = f(x) \quad (1)$$
$$y(0) = 0, y'(0) = 0 \quad (2)$$

есебін қарастырайық, мұндағы $\varepsilon > 0$ -азшама, a, b - $const$, $f(x) \in L^2(0,1), y(x) \in C^2(0,1) \cap C^2[0,1]$.

Мына, $\varepsilon = 0$ сәтте ,жоғарыдағы (1)- (2) теңдіктерінен әсерленбеген, мынадай

$$L_0 z = az'(x) + bz(x) = f(x) \quad (1)'$$
$$z(0) = 0 \quad (2)'$$

есепке келеміз.Мына,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} y(x, \varepsilon) = z(x)$$

теңдік қай кезде орындалады деген сұрақ туындайды, яғни бұл теңдік орындалуы үшін $f(\mathrm{x})$ функциясы мен a,b- коэффициенттері қандай болуы керек?Бұл есепті шешудің көптеген әдістері бар [1-9],өкінішке орай,бұл әдістердің көпшілігі жартылай эмпиристік әдістер қатарына жатады,себебі, есептің қалдық мүшесі, оның коэффициенттері арқылы бағаланбаған.Біз бұл есепті спектрәлдік әдіспен [10-17] шешіп, әлгі олқылықты толтырмақпыз.

2. Зерттеу әдістері

Жоғарыдағы (1)- (2)-есебіне, мынадай,

$$L_\varepsilon y = \varepsilon y''(\mathrm{x}) + a y'(\mathrm{x}) + \mathrm{by}(\mathrm{x}) ,$$

$$D(\mathrm{L}_\varepsilon) = \left\{ y(\mathrm{x}) \in C^2(0,1) \cap C^1[0,1]; \mathrm{y}(0)=0, \mathrm{y}'(0)=0 \right\}$$

сызықтық оператор сәйкес келеді.

Лемма 1. Егер $Su(\mathrm{x}) = \mathrm{u}(1-\mathrm{x})$ болса, онда SL_ε операторы $L^2(0,1)$ -кеңістігінде симметриялы.

Дәлелі. Айталық, $u(\mathrm{x}), \mathrm{v}(\mathrm{x}) \in \mathrm{D}(\mathrm{L}_\varepsilon)$ болсын, онда

$$(\mathrm{SL}_\varepsilon \mathrm{u}, \mathrm{v}) = (\mathrm{L}_\varepsilon \mathrm{u}, Sv) = \int_0^1 \left[\varepsilon u'' + a u'(\mathrm{x}) + \mathrm{bu}(\mathrm{x}) \right] v(1-\mathrm{x})\, \mathrm{dx} =$$

$$\varepsilon \int_0^1 v(1-\mathrm{x})\, \mathrm{du}' + \mathrm{a} \int_0^1 v(1-\mathrm{x})\, \mathrm{du} + \int_0^1 bu(\mathrm{x})\, \mathrm{v}(1-\mathrm{x})\, \mathrm{dx} =$$

$$\varepsilon v(1-\mathrm{x})\, \mathrm{u}'(\mathrm{x}) \int_0^1 + a v(1-\mathrm{x})\, \mathrm{u}(\mathrm{x}) \int_0^1 + \varepsilon \int_0^1 v'(1-\mathrm{x}) \cdot \mathrm{u}'(\mathrm{x})\, \mathrm{dx} +$$

$$+ a \int_0^1 v'(1-\mathrm{x})\, \mathrm{u}(\mathrm{x})\, \mathrm{dx} + \int_0^1 bv(1-\mathrm{x})\, \mathrm{u}(\mathrm{x})\, \mathrm{dx} =$$

$$v'(1-\mathrm{x})\, \mathrm{u}(\mathrm{x}) \int_0^1 + \varepsilon \int_0^1 v''(1-\mathrm{x})\, \mathrm{u}(\mathrm{x})\, \mathrm{dx} + \mathrm{a} \int_0^1 v'(1-\mathrm{x})\, \mathrm{u}(\mathrm{x})\, \mathrm{dx} +$$

$$\int_0^1 bv(1-\mathrm{x})\, \mathrm{u}(\mathrm{x})\, \mathrm{dx} = \int_0^1 u(\mathrm{x}) \left[\varepsilon v''(1-\mathrm{x}) + \mathrm{av}'(1-\mathrm{x}) + \mathrm{bv}(1-\mathrm{x}) \right] dx = (\mathrm{u}, \mathrm{SL}_\varepsilon \mathrm{v}) .$$

Салдар1. SL_ε қабынатын оператор.

Лемма 2. L_ε -операторының сыңарласы, келесі,

$$L_\varepsilon^+ v = \varepsilon v''(\mathrm{x}) - a\, \mathrm{v}'(\mathrm{x}) + bv(\mathrm{x}), \mathrm{D}(L_\varepsilon^+) = \left\{ v(\mathrm{x}) \in C^2(0,1) \cap C^1[0,1]; \mathrm{z}(1)=0, \mathrm{z}'(1)=0 \right\}$$

оператор болады.

Дәлелі. $u(\mathrm{x}) \in \mathrm{D}(\mathrm{L}_\varepsilon)$ және $\mathrm{v}(\mathrm{x}) \in \mathrm{D}(\mathrm{L}_\varepsilon^+)$ болсын делік, сонда,

$$\left(L_\varepsilon u, v \right) = \int_0^1 (\varepsilon\, \mathrm{u}'' + \mathrm{au}'(\mathrm{x}) + \mathrm{bx}) v(\mathrm{x})\, \mathrm{dx} = \varepsilon \int_0^1 v(\mathrm{x})\, \mathrm{du}'(\mathrm{x}) + \mathrm{a} \int_0^1 v(\mathrm{x})\, \mathrm{du} + \mathrm{b} \int_0^1 u(\mathrm{x})\, \mathrm{v}(\mathrm{x})\, \mathrm{dx} =$$

$$\varepsilon v(\mathrm{x})\, \mathrm{u}'(\mathrm{x}) \int_0^1 - \varepsilon - \int_0^1 v'(\mathrm{x})\, \mathrm{u}'(\mathrm{x})\, \mathrm{dx} + \mathrm{av}(\mathrm{x})\, \mathrm{u}(\mathrm{x}) \int_0^1 - a \int_0^1 v''(\mathrm{x})\, \mathrm{u}(\mathrm{x})\, \mathrm{dx} +$$

$$b \int_0^1 u(\mathrm{x})\, \mathrm{v}(\mathrm{x})\, \mathrm{dx} = -\varepsilon \int_0^1 v'(\mathrm{x})\, \mathrm{du}(\mathrm{x}) - \mathrm{a} \int_0^1 v'(\mathrm{x})\, \mathrm{u}(\mathrm{x})\, \mathrm{dx} + \mathrm{b} \int_0^1 u(\mathrm{x})\, \mathrm{v}(\mathrm{x})\, \mathrm{dx} =$$

$$= -\varepsilon v'(x) u(\mathrm{x}) \int_0^1 + \varepsilon \int_0^1 v''(\mathrm{x})\, \mathrm{u}(\mathrm{x})\, \mathrm{dx} - \mathrm{a} \int_0^1 v'(\mathrm{x})\, \mathrm{u}(\mathrm{x})\, \mathrm{dx} + b \int_0^1 u(\mathrm{x})\, \mathrm{v}(\mathrm{x})\, \mathrm{dx} =$$

$$= \int_0^1 u(x)\left[\varepsilon v''(x) - av'(x) + bv(x)\right] = (u, L_\varepsilon^+ v) \ .$$

Салдар 2. L_ε -қабынатын оператор, себебі $L_\varepsilon^+ \subset L_\varepsilon^*$ және L_ε^+ -тығыз анықталған.

Лемма 3. (Алғы бағалар туралы)

Егер $a > 0$, $b \geq 0$ болса, онда, келесі, $\|y\| \leq \|L_\varepsilon y\|, \|y\|_1 \leq \sqrt{2}\,\|L_\varepsilon y\|$

алғы бағалар орынды.

Дәлелі. О баста, $y(x) \in D(L_\varepsilon)$ делік, онда

$$L_\varepsilon y = \varepsilon y''(x) + ay'(x) + by(x), (L_\varepsilon y, y') = \varepsilon(y'', y') + a\|y'\|^2 + b(y, y'),$$

$$(y'', y')\int_0^1 y'\,dy' = \frac{(y')^2(x)}{2}\Big|_0^1 = \frac{y'^2(1)}{2} \geq 0;$$

$$(y, y') = \int_0^1 yy'\,dx = \frac{y^2(x)}{2}\Big|_0^1 = \frac{y^2(1)}{2} \geq 0; \Rightarrow a\|y'\|^2 \leq (L_\varepsilon y, y') \leq \left|(L_\varepsilon y, y')\right| \leq \|L_\varepsilon y\| \cdot \|y'\|, \Rightarrow a \cdot \|y'\| \leq \|L_\varepsilon y\|$$

Егер $y(0) = 0$ болса, онда $\|y\| \leq \|y'\|$. Шынында-да,

$$y(x) = \int_0^x y'(t)\,dt, \Rightarrow (y(x)) = \left|\int_0^x y'(t)\,dt\right| \leq \left(\int_0^x 1^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_0^x y'^2(t)dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq x^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^x y'^2(t)\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|y'\|, \Rightarrow \|y\| \leq \|y'\|.$$

Демек, $\|y\| \leq \|y'\| \leq \|L_\varepsilon y\|$ және $\|y\|_1 = \sqrt{\|y\|^2 + \|y'\|^2} \leq \sqrt{\|L_\varepsilon y\| + \|L_\varepsilon y\|} \leq \sqrt{2}\,\|L_\varepsilon y\|$.

Егер $y \in D(\overline{L_\varepsilon})$ болса, онда, мынадай, $y_n \to y, L_\varepsilon\, y \to \overline{L_\varepsilon\, y}$ болатын $\{y_n\} \in D(L_\varepsilon), n = 1, 2...$ тізбегі табылады. Онда $n \to \infty$ сәтінде ,мынадай, $\|y_n\| \to \|y\|, \|y'_n\| \to \|y'\|$, және $\|L_\varepsilon y_n\| \to \|L_\varepsilon y\|$ болады, сондықтан кезкелген $\forall y \in D(\overline{L_\varepsilon})$ үшін, келесі,

$$\|y\| \leq \|y'\| \leq \|\overline{L}_\varepsilon y\|, \|y\|_1 \leq \sqrt{2}\,\|\overline{L}_\varepsilon y\|$$

теңсіздіктер орынды.

Егер $\overline{L}_\varepsilon y = 0$ болса, онда $y = 0$, сондықтан кері $(\overline{L}_\varepsilon)^{-1}$ операторы бар және ол әсіре үзіксіз (Реллихтың теоремасы бойынша).

$SL_\varepsilon -$ операторы симметриялы болғандықтан, оның қабындысы $\overline{SL_\varepsilon} = S\overline{L}_\varepsilon$ операторы-да симметриялы, және $\overline{L}_\varepsilon$ қайтымды, онда $S\overline{L}_\varepsilon$ операторы-да, сондай, демек $\overline{SL_\varepsilon}$ жалқы оператор. Онда $\left(\overline{SL_\varepsilon}\right)^{-1}$ операторы-да жалқы, және әсіре үзіксіз, демек, Гилберт-Шмидтің теоремасы бойынша, келесі,

$$\left(\overline{SL_\varepsilon}\right)^{-1} f = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\overline{SL_\varepsilon}\right)^{-1} f\varphi_n\right) - \varphi_n(x) + \varphi_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(f_1\left(SL_\varepsilon\right)^{-1}\varphi_n) \cdot \varphi_n(x) + \varphi_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(f, \varphi_n)}{\lambda_n} \cdot \varphi_n(x) + \varphi_0(x),$$

таралым орынды, мұндағы $\varphi_0(x) \in K\,\mathrm{er}\left(\overline{SL_\varepsilon}\right)^{-1}$, яғни $\left(\overline{SL_\varepsilon}\right)^{-1}\varphi_0 = 0, \Rightarrow \varphi_0(x) = 0.$ Демек,

$$\left(\overline{SL_\varepsilon}\right)^{-1} f = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(f, \varphi_n)}{\lambda_n}\varphi_n(x).$$

Егер $(\mathrm{f},\varphi_n)=0, \mathrm{n}=1,2,...$ болса,онда , мұнан, $f=0$, демек, $\{\varphi_n(\mathrm{x})\}, n=1,2,...$ толық система.

Теорема 1. Егер $a>0, b\geq 0$ болса, онда

1) Кері $\left(\overline{SL_\varepsilon}\right)^{-1}$ операторы бар, және ол әсіре үзіксіз жалқы оператор.

2) $\left(\overline{SL_\varepsilon}\right)^{-1}$-операторының нормаланған меншікті векторлары L^2 (0,1) кеңістігінде ортонормаланған базис құрайды.

Егер $L_\varepsilon y=f$ болса, онда

$$SL_\varepsilon y = Sf(\mathrm{x}) \Rightarrow \overline{SL}_\varepsilon y = Sf(\mathrm{x}), \Rightarrow \mathrm{y}(\mathrm{x},\varepsilon,\mathrm{f}) = \left(SL_\varepsilon\right)^{-1} Sf(\mathrm{x}) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\mathrm{Sf},\varphi_n)}{\lambda_n}\cdot\varphi_n(\mathrm{x}).$$

Теорема 2. Егер $a>0, b\geq 0$ болса, онда Кошидің, жоғарыдағы (1)- (2) есебі ,әлді шешіледі және бұл әлді шешім, мынадай,

$\mathrm{y}(\mathrm{x},\varepsilon,\mathrm{f}) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\mathrm{Sf},\varphi_n)}{\lambda_n}\cdot\varphi_n(\mathrm{x})$ болады, сонымен бірге кезкелген $\varepsilon>0$ үшін $y\in W_2^2(0,1)$ болады.

3. Зерттеу нәтиежелері

Егер –де$\left(\overline{SL_\varepsilon}\right)^{-1}\varphi_n(\mathrm{x}) = \frac{1}{\lambda_n}\varphi_n(\mathrm{x}), n=1,2,...,$ болса, онда $\varphi_n(\mathrm{x})\lambda_n = \overline{SL}_\varepsilon\varphi_n$. Енді $\varphi_n(\mathrm{x})\in \mathrm{D}\left(\overline{L}_\varepsilon\right)$ екенін ескерсек, онда $\varphi_n(\mathrm{x})\in W_2^2(0,1)$, сондықтан,

$$\overline{SL}_\varepsilon\varphi_n(\mathrm{x}) = SL_\varepsilon\varphi_n = S\left[\varepsilon\varphi_n{}'' + a\varphi_n{}'(\mathrm{x}) + \mathrm{b}\,\varphi_n(\mathrm{x})\right] = \lambda_n\varphi_n(\mathrm{x}), \Rightarrow$$

$$\begin{gathered}\varepsilon\varphi_n{}''(\mathrm{x}) + \mathrm{a}\,\varphi_n{}'(\mathrm{x}) + \mathrm{b}\,\varphi_n(\mathrm{x}) = \lambda_n S\varphi_n(\mathrm{x}),\\ \varphi_n(0)=0, \varphi_n{}'(0)=0.\end{gathered} \qquad (3)$$

Ұйғарым. Меншікті $\varphi_n(\mathrm{x})$ $(\mathrm{n}=1,2,...)$ функциялары шексіз рет дифференциалданады, бұл қасиет a, b коэффициенттерінің тұрақтылығының салдары.

Енді $\left(Sf,\varphi_n\right), n=1,2,...,$ Фуренің коэффициенттерін есептейік. B-операторы мынадай,

$$Bz(\mathrm{x}) = \mathrm{az}'(\mathrm{x}) + \mathrm{bz}(\mathrm{x}),$$
$$z(0)=0$$

болсын делік. Мына, $\varphi_n(\mathrm{x})\in \mathrm{D(B)}$ жайды ескеріп, (3) формуланы, былай,

$\varepsilon\varphi_n{}''(\mathrm{x}) + B\varphi_n(\mathrm{x}) = \lambda_n S\varphi_n(\mathrm{x})$ жазайық, мұнан,

$$\varepsilon B^{-1}\varphi_n{}''(\mathrm{x}) + \varphi_n(\mathrm{x}) = \lambda_n B^{-1}S\varphi_n, \mathrm{n}=1,2,..., \Rightarrow \varphi_n(\mathrm{x}) = \lambda_n B^{-1}S\varphi_n - \varepsilon B^{-1}\varphi_n{}''(\mathrm{x});$$

$$\left(Sf\varphi_n\right) = \left(Sf, \lambda_n B^{-1}S\varphi_n - \varepsilon B^{-1}\varphi_n{}''\right) = \lambda_n\left(Sf, B^{-1}S\varphi_n\right) - \varepsilon\left(Sf, B^{-1}\varphi_n{}''\right) =$$

$$\lambda_n\left(\left(B^{-1}\right)^{+}Sf, S\varphi_n\right) - \varepsilon\left(\left(B^{-1}\right)^{+}Sf, \varphi_n{}''\right) =$$

$$= \lambda_n\left(SB^{-1}f, S\varphi_n\right) - \varepsilon\left(SB^{-1}f, \varphi_n{}''\right) = \lambda_n\left(B^{-1}f, \varphi_n\right) - \varepsilon\left(SB^{-1}f, \varphi_n{}''\right);$$

$$\left(SB^{-1}f, \varphi_n{}''\right) = \int_0^1 SB^{-1}f d\varphi_n{}'(\mathrm{x}) = SB^{-1}f\cdot\varphi_n{}'(\mathrm{x})\Big|_0^1 - \int_0^1\left(SB^{-1}f\right)'\varphi_n{}'(\mathrm{x})\,\mathrm{dx} =$$

$$-\left(SB^{-1}f\right)'\varphi_n(\mathrm{x}) + \int_0^1\left(SB^{-1}f\right)''\varphi_n(\mathrm{x}) =$$

$$S\left(B^{-1}f\right)'\varphi_n(\mathrm{x})\Big|_0^1+\int_0^1\left(SB^{-1}f\right)''\varphi_n(\mathrm{x})dx=\left(B^{-1}f\right)'(0)\cdot\varphi_n(1)+\left(\left(SB^{-1}f\right)'',\varphi_n\right);$$

$$\left(Sf,\varphi_n\right)=\lambda_n\left(B^{-1}f,\varphi_n\right)-\varepsilon\left(B^{-1}f\right)'(0)\cdot\varphi_n(1)-\varepsilon\left(\left(SB^{-1}f\right)'',\varphi_n\right),\Rightarrow$$

$$y(\mathrm{x},\varepsilon,\mathrm{f})=B^{-1}f(\mathrm{x})-\left(B^{-1}f\right)'(0)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon\varphi_n(1)}{\lambda_n}\varphi_n(\mathrm{x})-\varepsilon y\left(x,\varepsilon,\frac{d^2}{dx^2}B^{-1}f\right). \tag{4}$$

Енді оң жақтағы қатардың қосындысын табайық. Айталық, $\psi(\mathrm{x})$ - функциясы, келесі

$$\varepsilon\psi''+a\psi'(\mathrm{x})+\mathrm{b}\psi(\mathrm{x})=0, \tag{5}$$
$$\psi(0)=0,\psi'(0)=1$$

Коши есебінің шешімі болсын, сонда $\psi\in D(\mathrm{B})$ болары айдан анық, сондықтан жоғарыдағы (5) теңдеуді, былай, $\varepsilon\psi''+B\psi=0,\Rightarrow\varepsilon S\psi''+SB\psi=0,$ жазуға болады.

Сонда,

$$(\mathrm{SB}\psi,\varphi_n)=\left(SB\varphi,\lambda_nB^{-1}S\varphi_n-\varepsilon B^{-1}\varphi_n''\right)=\lambda_n\left(\mathrm{SB}\psi,B^{-1}S\varphi_n\right)-\varepsilon\left(\mathrm{SB}\psi,B^{-1}S\varphi_n''\right)=$$
$$=\lambda_n\left(\mathrm{S}\left(B^{-1}\right)^+\mathrm{SB}\psi,\varphi_n\right)-\varepsilon\left(\left(B^{-1}\right)^+\mathrm{SB}\psi,\varphi_n''\right)=\lambda_n\left(\mathrm{SS}B^{-1}\mathrm{B}\psi,\varphi_n\right)-\varepsilon\left(\mathrm{S}B^{-1}\mathrm{B}\psi,\varphi_n''\right)=$$
$$=\lambda_n\left(\varphi,\varphi_n\right)-\varepsilon\left(S\psi,\varphi_n''\right).$$

$$\left(S\psi,\varphi_n''\right)=\int_0^1S\psi d\varphi_n'=S\psi\cdot\varphi_n'(\mathrm{x})\Big|_0^1-\int_0^1\left(S\psi\right)'d\varphi_n(\mathrm{x})=\psi(1-\mathrm{x})\cdot\varphi_n'(\mathrm{x})\Big|_0^1-\left(S\psi\right)'\varphi_n(\mathrm{x})\Big|_0^1+\int_0^1\left(S\psi\right)''\varphi_n(\mathrm{x})dx=$$
$$=S\psi'(\mathrm{x})\cdot\varphi_n(\mathrm{x})\Big|_0^1+\int_0^1\left(S\psi\right)''\varphi_n(\mathrm{x})dx=\psi'(1-\mathrm{x})\cdot\varphi_n(\mathrm{x})\Big|_0^1+\int_0^1\left(S\psi\right)''\varphi_n(\mathrm{x})dx=$$
$$=\varphi_n(\mathrm{x})+\int_0^1\left(S\psi\right)''\varphi_n(\mathrm{x})dx=\begin{vmatrix}\varepsilon\psi''+B\psi=0,\\ \varepsilon S\psi''+SB\psi=0\end{vmatrix}=\varphi_n(\mathrm{x})-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^1SB\psi\cdot\varphi_n(\mathrm{x})dx=$$
$$\varphi_n(\mathrm{x})-\frac{\left(SB\psi,\varphi_n\right)}{\varepsilon};\Rightarrow\left(SB\psi,\varphi_n\right)=\lambda_n\left(\psi,\varphi_n\right)-\varepsilon\varphi_n(\mathrm{x})+\left(SB\psi,\varphi_n\right),\Rightarrow\left(\psi,\varphi_n\right)=\frac{\varepsilon\varphi_n(\mathrm{x})}{\lambda_n},\Rightarrow\psi(\mathrm{x})=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\psi,\varphi_n\right)\varphi_n(\mathrm{x})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon\varphi_n(\mathrm{x})}{\lambda_n}\varphi_n(\mathrm{x}). \tag{6}$$

Соңғы табылған (6) формуланы жоғарыдағы (4) формулаға апарып қойсақ бізге керекті, мына,

$$y(\mathrm{x},\varepsilon,\mathrm{f})=B^{-1}f(\mathrm{x})-\left(B^{-1}f\right)'(0)\psi(\mathrm{x})-\varepsilon\,\mathrm{y}(\mathrm{x},\varepsilon,\frac{d^2}{dx^2}B^{-1}f)$$

формула шығады.

Әрі қарай, математикалық индукцияны қолдануымызға болады.

$$y(x,\varepsilon,f)=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k[B^{-1}D^kf(x)-(B^{-1}D^kf(x))'(0)*\psi(x)]\varepsilon^k+(-1)^n\varepsilon^ny(x,\varepsilon,D^nf).$$

Алынған нәтиежені тұжырымдап қоялық.

Теорема 3. Егер $a>0,b\geq0,\varepsilon>0$, f(x)$\epsilon C^n[0,1]$болса, онда Кошидің,келесі,

$$L_\varepsilon y=\varepsilon y''(x)+ay'(x)+by(x)=f(x),x\in[0,1]\ (2.7.1)$$
$$y(0)=0,y'(0)=0\ (2.7.2)$$

есебінің шешімі,мынадай,

$$y(x,\varepsilon,f)=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k[B^{-1}D^k f(x)-(B^{-1}D^k f(x))'(0)*\psi(x)]\varepsilon^k+(-1)^n\varepsilon^n y(x,\varepsilon,D^n f)$$

болады,мұндағы,

$$D^0=I,\ Df(x)=\frac{d^2}{dx^2}B^{-1}f(x),$$

$$B^{-1}f(x)=\int_0^x\frac{f(t)}{a}e^{-\int_t^x\frac{b}{a}d\xi}dt.$$

$$\psi(x)=\frac{e^{k_2x}-e^{k_1x}}{k_2-k_1},k_{1,2}=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4\varepsilon b}}{2\varepsilon};$$

$$\left\|y(x,\varepsilon,D^n f)\right\|\le\frac{\|D^n f\|}{a\sqrt{2}}.$$

4.Талқысы

Мысал.

$$\varepsilon y'(x)+ay(x)=1.\,x\in(0,1]; \tag{7}$$

$$y(0)=0$$

Бұл есептің шешімі

$$y(x,\varepsilon)=\frac{1-e^{-\frac{a}{\varepsilon}x}}{a},\ \text{мұнан}\ (8)$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}y(x,\varepsilon)=\begin{cases}0, x=0\ \text{болған сәтте};\\ \frac{1}{a}, x\ne 0\ \text{болған сәтте}.\end{cases} \tag{9}$$

Жоғарыдағы (8) функцияның үзіксіз екені айдан анық, бірақ оның шегі (9) үзікті функция, демек жинақталу бірқалыпты емес. Теңдеудің оң жағы $f(x)=1$ өте біртегіс әдемі функция, солай бола тұра, ол бірқалыпты жинақталуды қамтамассыз ете алмады, демек, бірқалыпты жинақталуды қаматамассыз ету үшін теңдеудің оң жағына біртегістіктен басқа қосымша шарттар қою керек сыйақты.

Жоғарыдағы (0.1)-(7) есептің шешімі, мынадай

$$y(x,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x f(t)e^{-\frac{a}{\varepsilon}(x-t)}dt \tag{10}$$

болары айдан анық, егер $f(x)\in C[0,1]$, яғни ол $[0,1]$ кесіндісі бойында үзіксіз болса, онда

$$y(x,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x[f(t)-f(0)]e^{-\frac{a}{\varepsilon}(x-t)}dt+\frac{f(0)}{\varepsilon}\int_0^x e^{-\frac{a}{\varepsilon}(x-t)}dt,$$

$$\int_0^x e^{-\frac{a}{\varepsilon}(x-t)}dt=\begin{vmatrix}x-t=s\\-dt=ds\end{vmatrix}=\int_0^x e^{-\frac{a}{\varepsilon}s}ds=$$

$$=e^{-\frac{a}{\varepsilon}s}\left(-\frac{\varepsilon}{a}\right)/_0^x=\frac{\varepsilon}{a}\left(1-e^{-\frac{a}{\varepsilon}x}\right),\text{мұнан}$$

$$y(x,\varepsilon)-\frac{f(0)}{a}\left(1-e^{-\frac{a}{\varepsilon}x}\right)=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x[f(t)-f(0)]\,e^{-\frac{a}{\varepsilon}(x-t)}dt;$$

Соңғы интегралды, былай,

$$\left|\int_0^x[f(t)-f(0)]\,e^{-\frac{a}{\varepsilon}t}dt\right|\le\max_{0\le t\le\varepsilon}|f(t)-f(0)|+\int_\varepsilon^x|f(x)-f(0)|e^{-\frac{a}{\varepsilon}t}dt\le$$

$$\le\overline{\max_{0\le t\le\varepsilon}}|f(t)-f(0)|+2\max_{0\le t\le 1}|f(t)|\times\int_0^x e^{-\frac{a}{\varepsilon}}dt\le$$

$$\le\max_{0\le t\le\varepsilon}|f(t)-f(0)|+2\|f\|_c\times\frac{\left(1-e^{-\frac{a}{\varepsilon}x}\right)\varepsilon}{a}$$

бағалауға болады, бірақ бұл баға бөліміндегі ε –ға төтеп бре алмайды. Мұнан шығар қорытынды есеп қарапайым болып көрінгенмен, қалпақпен ұрып алар, есептер қатарына жатпайды.

Егерде теңдеудің оң жағына қосымша шарт жүктесек, яғни $f(x) \in W_2^1[0,1]$ болса, онда

$$\left\| y(x,\varepsilon) - \frac{f(x)}{a} \right\| \le \frac{\sqrt{\varepsilon}}{a\sqrt{2a}}\left[f|0| + \|f'\|\right]$$

боларын көруге болады

Егерде (10) формулада алмастыру жасасақ ол, мына,

$$y(x,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^x f(x-t)e^{-\frac{a}{\varepsilon}t}dt$$

түрге келеді. Енді оң жақтағы интегралды, $f(x) \in W_2^n[0,1]$, сәтінде бөліктеп интегралдасақ, онда мынадай,

$$\int_0^x f(x-t)\,e^{-\frac{a}{\varepsilon}t}dt = \cdots = e^{-\frac{a}{\varepsilon}x}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k f^{(k-1)}(0)\left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^k -$$

$$-\sum_{k=1}^{n} f^{(k-1)}(x)(-1)^k\left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^k + (-1)^n\left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^n\int_0^x f^{(n)}\,(x-t)e^{-\frac{a}{\varepsilon}t}dt =$$

$$= \left|t = \frac{x}{\varepsilon}\right| = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{(-1)^k f^{(k-1)}(0)e^{-at}}{a^k} - \frac{(-1)^k f^{(k-1)}(x)}{a^k}\right]\varepsilon^k +$$

$$+(-1)^n\left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^n\int_0^x f^{(n)}(x-t)e^{-\frac{a}{\varepsilon}t}\,dt, =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left[r_k(t) + P_k(x)\right]\varepsilon^k + (-1)^n\left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^n\int_0^x f^{(n)}\,(x-t)e^{-\frac{a}{\varepsilon}t}dt;$$

$$\left\|\int_a^x f^{(n)}(x-t)e^{-\frac{a}{\varepsilon}t}\,dt\right\| \le \|f^{(n)}(x-t)\|\left(\int_0^1 e^{-\frac{2a}{\varepsilon}t}dt\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \|f^{(n)}(x)\|\left[\left(\frac{\varepsilon}{-2a}e^{-\frac{2a}{\varepsilon}t}\right)/_0^1\right]^{\frac{1}{2}} \le \|f^{(n)}(x)\| \times \left(\frac{\varepsilon}{2a}\right)^{\frac{1}{2}}, \rightarrow$$

$$\left\|\int_0^x f^{(n)}(x-t)e^{-\frac{a}{\varepsilon}t}dt\right\| \le \|f^{(n)}(x)\|\left(\frac{\varepsilon}{2a}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Біз жоғарыда есепті қарабайыр әдістердің бірі арқылы шығаруға әрекет жасадық, бірақ мұнымыз іске аспады.

Егер $\varepsilon y'(x) + ay(x) = f(x), y(0) = 0; a - cosnt$болса, онда

$$\frac{\varepsilon}{a}y(x) + \int_0^x y(t)dt = \frac{1}{a}\int_0^x f(t)dt.$$

Енді $\lambda = \frac{\varepsilon}{a}, F(t) = \frac{1}{a}\int_0^x f(t)dt\,, Jy(x) = \int_0^x y(t)dt$болсын, десек, онда

$$(\lambda I + J)y(x) = F(t), y(x) = R_\lambda F(t) = (J + \lambda I)^{-1}F(t) =$$
$$= \frac{1}{a}(J + \lambda I)^{-1}Jf(t) = \frac{1}{a}\left(J + \frac{\varepsilon}{a}I\right)^{-1}Jf(x).$$

J −интегралдау операторы әсіре үзіксіз операторлар қатарына жатады сондықтан, оның резольвентасы $R_\lambda = (J + \lambda I)^{-1}$операторы да әсіре үзіксіз, ал оның өзі $\lambda = 0$ нүктесінен басқа барлық нүктелерде аналитикалық оператор функция, ал $\lambda = 0$ нүктесі елеулі (существенная) ерекше нүкте. Сондықтан, жалпы, алғанда,

$$\lim_{\lambda > 0} y(x,\lambda) = \lim_{\lambda > 0}(J + \lambda I)^{-1}\,F(t)$$

шегі жоқ ,сондықтан, тақырыпты тамам деуге болар еді. Бірақ λ белгілі бір қыйсықтың бойымен,немесе, нүктелермен ұмтылғанда ондай шек бар болып ,және ол керек болып тұр. Бұл тақырыптың өміршеңділігі мен өзектілігі осында болса керек. Келесі бөлімде біз қолданыста жүрген әдістерге талдау жасаймыз.

5.Қорытынды

Әдісімізді С.А. Ломовтың түрландыру әдісімен салыстырайық,есептеулерді жеңілдету үшін, қарапайым жағдайды қарастыралық.

$H = L^2(0,1)$ −кеңістігінде Кошидің, мынадай,

$$L_\varepsilon y = \varepsilon y'(x) + a(x)y(x) = f(x) \tag{11}$$

$$y(0) = 0 \tag{12}$$

сингуляр әсерленген есебін қарастыралық, мұндағы $\varepsilon \to 0$ −кезкелген параметр, ал $a(x)$пен $f(x)$мейлінше біртегіс функциялар.

Екі x және τ айнымалыларына тәуелді $u(x,\tau,\varepsilon)$ функциясы, $\tau = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^x a(\xi)d\xi$ болған сәтте, (11)-(12) есептің шешімі болсын деп жорыйық, яғни

$$y(x,\varepsilon) = u(x,\tau,\varepsilon)/_{\tau=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x a(\xi)d\xi}.$$

Осы формуланы x бойынша дифференциалдайық:

$$y' = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \tau} \times \frac{\partial \tau}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a(x)}{\varepsilon} \times \frac{\partial u}{\partial \tau}.$$

Осы формуланы (11) теңдеуге апарып қояйық,

$$\left[\varepsilon\frac{\partial u}{\partial x} + a(x)\frac{\partial u}{\partial \tau} + a(x)u(x,\tau,\varepsilon)\right]_{\tau=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x a(\xi)d\xi} = f(x)$$

Сондай-ақ, $x = 0$ болған сәтте, (12)-формуладан

$$y(0,\varepsilon) = u(0,0,\varepsilon) = 0$$

Әрі қарай, τ −ды екінші айнымалысы деп сонан, келесі,

$$\begin{cases} \varepsilon\frac{\partial u}{\partial x} + a(x)\frac{\partial u}{\partial \tau} + a(x)u(x,\tau,\varepsilon) = f(x) & (13) \\ u(0,0,\varepsilon) = 0 & (14) \end{cases}$$

есепті қарастырайық.

Бұл есептің бірмәнді шешілуі үшін (14) шарттың жетіспейтіні айдан анық, себебі теңдеу екі айнымалыға тәуелді дербес туындысы, ал бастапқы шарт тек бір ғана (0,0) нүктесінде берілген. Солай болса-да біз бұл есептің шешімін, мына,

$$u(x,\tau,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon^k u_k(x,\tau) + \varepsilon^n R_n(x,\tau,\varepsilon) \tag{15}$$

түрде іздейміз. Осы өрнекті жоғарыдағы (13) теңдеуге апарып қойып, төмендегі формулаларды аламыз.

$$\varepsilon\left[\sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon^k\frac{\partial u_k}{\partial x} + \varepsilon^n\frac{\partial R_n}{\partial x}\right] + a(x)\left[\sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon^k\frac{\partial u_k}{\partial \tau} + \varepsilon^n\frac{\partial R_n}{\partial \tau}\right] +$$

$$+a(x)\left[\sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon^k u_k(x,\tau) + \varepsilon^n R_n(x,\tau,\varepsilon)\right] = f(x),$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon^{k+1}\frac{\partial u_k}{\partial x} + \sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon^k a(x)\frac{\partial u_k}{\partial \tau} + \sum_{k=0}^{n-1} a(x)u_k(x,\tau)\varepsilon^k +$$

$$+\varepsilon^{n+1}\frac{\partial R_n}{\partial x} + \varepsilon^n a(x)\frac{\partial R_n}{\partial \tau} + \varepsilon^n a(x)R_n(x,\tau,\varepsilon) = f(x);$$

$$\sum_{k=1}^{n}\varepsilon^k\frac{\partial u_{k-1}}{\partial x} + \sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon^k a(x)\frac{\partial u_k}{\partial \tau} + \sum_{k=0}^{n-1} a(x)u_k(x,\tau)\varepsilon^k +$$

$$+\varepsilon^{n+1}\frac{\partial R_n}{\partial x} + \varepsilon^n a(x)\frac{\partial R_n}{\partial \tau} + \varepsilon^n a(x)R_n(x,\tau,\varepsilon) = f(x).$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\varepsilon^k\left[\frac{\partial u_{k-1}}{\partial x} + a(x)\frac{\partial u_k}{\partial \tau} + a(x)u_k(x,\tau)\right] + a(x)\frac{\partial u_0}{\partial \tau} + a(x)u_0(x,\tau) +$$

$$+\varepsilon^n\left[\varepsilon\frac{\partial K_n}{\partial x} + a(x)\frac{\partial R_n}{\partial \tau} + a(x)R_n(x,\tau,\varepsilon) + \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}\right] = f(x) \tag{16}$$

Енді ε −ның бірдей дәрежелі коэффиценттерін теңестірсек, онда, мынадай,

$$a(x)\frac{\partial u_0}{\partial \tau} + a(x)u_0(x,\tau) = f(x), \frac{\partial u_0}{\partial \tau} + u_0 = \frac{f(x)}{a(x)}, \rightarrow$$

$$u_0(x,\tau) = \frac{f(x)}{a(x)} + C_0(\tau)e^{-\tau}, u_0(0,0) = \frac{f(0)}{a(0)} + C_0(0) = 0, C_0(0) = -\frac{f(0)}{a(0)}$$

Таңдау еркіндігін пайдаланып.

$$u_0(x,\tau) = \frac{f(x)}{a(x)} - \frac{f(0)}{a(0)}e^{-\tau}$$

болсын делік. Басқаша таңдағанда нәтиежесі қалдықтан көрінер еді.

Жоғарыдағы (16) формуланың бірінші жақсасын нөлге теңеп, мынадай,

$$a(x)\left[\frac{\partial u_k}{\partial \tau} + u_k(x,\tau)\right] = -\frac{\partial u_{k-1}}{\partial x}, \rightarrow$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial \tau} + u_k(x,\tau) = -\frac{1}{a(x)}\frac{\partial}{\partial x}u_{k-1}(x,\tau)$$

теңдіктерді аламыз.

Енді $k = 1$десек, онда

$$\frac{\partial u_1}{\partial \tau} + u_1(x,\tau) = -\frac{1}{a(x)}\frac{\partial}{\partial x}u_0(x,\tau) = -\frac{1}{a(x)}\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{a(x)}.$$

Мынадай , $D^0 = I, Df(x) = \frac{d}{dx}\frac{f(x)}{a(x)}$ белгілеулер енгізсек, онда, былай,

$$u_0(x,\tau) = \frac{D^0 f(x)}{a(x)} - \frac{D^0 f(0)}{a(0)}e^{-\tau},$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial \tau} + u_1(x,\tau) = -\frac{Df(x)}{a(x)}$$

болады. Анология бойынша

$$u_1(x,\tau) = -\left[\frac{Df(x)}{a(x)} - \frac{Df(0)}{a(0)}e^{-\tau}\right];$$

Енді $k = 2$десек, онда

$$\frac{\partial u_2}{\partial \tau} + u_2(x,\tau) = -\frac{1}{a(x)}\frac{\partial}{\partial x}u_1(x) = \frac{1}{a(x)}D^2 f(x), \rightarrow$$

$$u_2(x,\tau) = \left[\frac{D^2 f(x)}{a(x)} - \frac{D^2 f(0)}{a(0)}e^{-\tau}\right].$$

Осы прецессті жалғастыра берсек, онда, мынадай

$$u_k(x,\tau) = (-1)^k\left[\frac{D^k f(x)}{a(x)} - \frac{D^k f(0)}{a(0)}e^{-\tau}\right], k = 0,1,2,\dots,n-1 \qquad (17)$$

формулаға келеміз. Қалдық мүшеге, мынадай,

$$\varepsilon\frac{\partial R_n}{\partial x}+a(x)\frac{\partial R_n}{\partial \tau}+a(x)R_n(x,\tau,\varepsilon)+\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}=0$$

теңдеу аламыз.

Енді, мына, жайды

$$\frac{d}{dx}R_n(x,\tau)_{\tau=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x a(\xi)d\xi}=\frac{\partial R_n}{\partial x}+\frac{\partial R_n}{\partial \tau}\times\frac{\partial \tau}{\partial x}=$$

$$=\frac{\partial R_n}{\partial x}+\frac{a(x)}{\varepsilon}\frac{\partial R_n}{\partial \tau},\rightarrow \varepsilon\frac{d}{dx}R_n=\varepsilon\frac{\partial R_n}{\partial x}+a(x)\frac{\partial R_n}{\partial \tau},$$

аңғарсақ, онда қалдық мүшеге, мынадай

$$\varepsilon R_n'+a(x)R_n=-\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}=(-1)^n D^n f(x)$$

$$R_n/_{x=0}=0$$

Кошидің есебін аламыз. Демек,

$$R_n(x)=(-1)^n y\big(x,\varepsilon,D^n f(x)\big), \tag{18}$$

мұндағы $y\big(x,\varepsilon,D^n f(x)\big)$ –дегеніміз сол бастапқы Кошидің есебінің шешімі, тек оң жағында $D^n f(x)$ тұр. Енді (18) мен (17) апарып (15)-ге қойсақ

$$y(x)=u(x,\tau,\epsilon)/_{\tau=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x a(\xi)d\xi}=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\left[\frac{D^k f(x)}{a(x)}-\frac{D^k f(0)}{a(0)}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x a(\xi)d\xi}\right]+$$

$$+(-1)^n y(x,\varepsilon,D^n f),$$

мұндағы $D^0=I, Df(x)=\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{a(x)}$,

Енді әдістің әлсіз тұстарына көз жүгіртейік.

1) Есептің шешімінің бар-жоқтығы туралы ешнәрсе айтылмайды;

2) Жоғарыдағы (13)-(14) есептің шешімдер жыйыны туралы дерек жоқ;

3) Осы есептің шешімі (15) түрінде боларына кім кепілдік береді, бұл сәттегі қалдық $R_n(x,\tau,\varepsilon)$ мүше туралы мәлімет жоқ;

4) Жоғарыдағы (16) теңдікте бірдей дәрежелі ε –дардың коэффиценттерін теңестіруге кім бізге құқық берді. Солай істеуге болар еді, егер $u(x,\tau,\varepsilon)$ –ның ε –ге тәуелділігі аналитикалық болса, яғни ол әрбір шегеленген x –тың мәні үшін ε –ның аналитикалық функциясы болса. Ең жоқ дегенде, бұлай жасау үшін қалдық мүше $R_n(x,\tau,\varepsilon)$ туралы алдыналар мәлімет керек;

5) Қалдық $R_n(x,\tau,\varepsilon)$ мүшенің бағасы туралы ешнәрсе жоқ.

Демек, бұл әдісті-те жартылай эмпиристикалық деуге болады,ал біздің әдісіміз нақты тұжырымдарға негізделген,және нәтиежеміз [2] еңбектің жетістіктерімен жақсы үйлесіп тұр.

ӘДЕБИЕТ

[1] Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимтотические методы в теорий сингулярных возмущений.-М.: Высш. шк. 1990.-200с.

[2] Вишик М.И., Люстерник А.А. Регулярное вырождение и погранслойный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи математических наук, 1957. №5. с.3-122.

[3] A. N. Tikhonov, Mat. Sbornik 27, 147-156 (1950), (in Russian).

[4] M. I. Imanaliev, Asymptotical Methods in the Theory of Singulary Perturbed Integro-Differential Systems, Ilim, Bishkek,

[5] S. Lomov, Introduction to the General Theory of Singular Perturbations, American Mathematical Society, Providence, RI,1992.

[6] V. Butuzov, Comput. Math. Math. Phys. 12, 14-34 (1972).

[7] A. Vasil'eva, and V. Tupchiev, Soviet Math. Dokl. 9, 179-183 (1968).

[8] V. Trenogin, Russian Math. Surveys 25, 119-156 (1970).

[9] T. Sh. Kal'menov, S. T. Akhmetova, and A. Sh. Shaldanbaev, Mat. Zh. Almaty 4, 41–48 (2004), (in Russian).

[10]T. Sh. Kal'menov, and U. A. Iskakova, Doklady Mathematics 45, 1460-1466 (2009).

[11]T. Sh. Kal'menov, and A. Sh. Shaldanbaev, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems 18, 352–369 (2010).

[12]A. Kopzhassarova, and A.Sarsenbi, Abstract and Applied Analysis 2012, 1-6 (2012), (Article ID 576843).

[13]Orazov I., Shaldanbaev A,Sh,Shomanbayeva M.About the nature of the spectrum of the periodic problemn for the heat equation with a deviating argument.// Abstract and Applied Analysis. Volume 2013(2013).Article ID 128363,6 pages htt://dx.doi.org/10.1155/2013/128363.

[14].A. Sh. Shaldanbaev, Manat Shomanbayeva, Isabek 0razov,Solution of a singularly perturbed Cauchy problem using amethod of a deviating argument, AIP Conference Proceedings 1676, 020072 (2015); doi: 10.1063/1.4930498

[15]A. Sh. Shaldanbaev, Manat Shomanbayeva, and Asylzat Kopzhassarova,

[16]Solution of a singularly perturbed Cauchy problem for linear systems of ordinary differential equations by the method of spectral decomposition, AIP Conference Proceedings 1759, 020090 (2016); doi: 10.1063/1.4959704.

[17]Ахиезер Н.Н., Глазман Н.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве.-М.:Наука ,1966.,-544с.

[18]Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т.1-2. – М.: Мир, 1977.

REFERENCES

[1] Vasil'eva A.B., Butuzov V.F. Asimtoticheskie metody v teorij singuljarnyh vozmushhenij.-M.: Vyssh. shk. 1990.-200s.

[2] Vishik M.I., Ljusternik A.A. Reguljarnoe vyrozhdenie i pogranslojnyj sloj dlja linejnyh differencial'nyh uravnenij s malym parametrom // Uspehi matematicheskih nauk, 1957. №5. s.3-122.

[3] A. N. Tikhonov, Mat. Sbornik 27, 147-156 (1950), (in Russian).

[4] M. I. Imanaliev, Asymptotical Methods in the Theory of Singulary Perturbed Integro-Differential Systems, Ilim, Bishkek,

[5] S. Lomov, Introduction to the General Theory of Singular Perturbations, American Mathematical Society, Providence, RI,1992.

[6] V. Butuzov, Comput. Math. Math. Phys. 12, 14-34 (1972).

[7] A. Vasil'eva, and V. Tupchiev, Soviet Math. Dokl. 9, 179-183 (1968).

[8] V. Trenogin, Russian Math. Surveys 25, 119-156 (1970).

[9] T. Sh. Kal'menov, S. T. Akhmetova, and A. Sh. Shaldanbaev, Mat. Zh. Almaty 4, 41–48 (2004), (in Russian).

[10]T. Sh. Kal'menov, and U. A. Iskakova, Doklady Mathematics 45, 1460-1466 (2009).

[11]T. Sh. Kal'menov, and A. Sh. Shaldanbaev, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems 18, 352–369 (2010).
[12]A. Kopzhassarova, and A.Sarsenbi, Abstract and Applied Analysis 2012, 1-6 (2012), (Article ID 576843).

[13]Orazov I., Shaldanbaev A,Sh,Shomanbayeva M.About the nature of the spectrum of the periodic problemn for the heat equation with a deviating argument.// Abstract and Applied Analysis. Volume 2013(2013).Article ID 128363,6 pages htt://dx.doi.org/10.1155/2013/128363.

[14].A. Sh. Shaldanbaev, Manat Shomanbayeva, Isabek 0razov,Solution of a singularly perturbed Cauchy problem using amethod of a deviating argument, AIP Conference Proceedings 1676, 020072 (2015); doi: 10.1063/1.4930498

[15]A. Sh. Shaldanbaev, Manat Shomanbayeva, and Asylzat Kopzhassarova,

[16]Solution of a singularly perturbed Cauchy problem for linear systems of ordinary differential equations by the method of spectral decomposition, AIP Conference Proceedings 1759, 020090 (2016); doi: 10.1063/1.4959704.
[17]Ahiezer N.N., Glazman N.M. Teorija linejnyh operatorov v gil'bertovom prostranstve.-M.:Nauka ,1966.,-544s.

[18]Rid M., Sajmon B. Metody sovremennoj matematicheskoj fiziki. T.1-2. – M.: Mir, 1977.

УДК 517.94

Бесбаев Г.А.,[1] Шалданбаев А.Ш.,[1] Ақылбаев М.И.[2]

1Южно-Казахстанский государственный университет, г.Шымкент
[2]Казахстанский инженерно-педагогический университет Дружбы народов, г.Шымкент

РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ КОШИ, ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ, ОПЕРАТОРНЫМ МЕТОДОМ

Аннотация. В данной работе получено спектральное разложение решении задачи Коши в простанстве с индефинитной метрикой,и с помощью этого разложения выведено погранслойное разложение решении сингулярно возмущенной задачи Коши, для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка $L_\varepsilon y = \varepsilon y''(x) + a\,y'(x) + by(x) = f(x)$, a, b *-const*, $y(0)=0, y'(0)=0$; $f(x) \in L^2(0,1), y(x) \in C^2(0,1) \cap C^2[0,1]$.

Ключевые слова: вполне непрерывный оператор,самосопряженный оператор,терема Гилберта – Шмидта,вольтеровые операторы,индефинитная метрика,разложение Шмидта, полнота, ортонормированный базис.

МАЗМҰНЫ

Аспан механикасының, жұлдыздар жүйесінің және ядролык астрофизика мәселелері

Жұлдыздардың және тұмандықтардың зерттеулері

Күннің және күн жүйесі денелерінің физикасы

* * *

СОДЕРЖАНИЕ

* * *

CONTENTS

Problems of celestial mechanics, dynamics of stellar systems and nuclear astrophysics

The study of stars and nebulae

Physics of the Sun and solar system bodies

* * *

Publication Ethics and Publication Malpractice
in the journals of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan

For information on Ethics in publishing and Ethical guidelines for journal publication see http://www.elsevier.com/publishingethics and http://www.elsevier.com/journal-authors/ethics.

Submission of an article to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan implies that the described work has not been published previously (except in the form of an abstract or as part of a published lecture or academic thesis or as an electronic preprint, see http://www.elsevier.com/postingpolicy), that it is not under consideration for publication elsewhere, that its publication is approved by all authors and tacitly or explicitly by the responsible authorities where the work was carried out, and that, if accepted, it will not be published elsewhere in the same form, in English or in any other language, including electronically without the written consent of the copyright-holder. In particular, translations into English of papers already published in another language are not accepted.

No other forms of scientific misconduct are allowed, such as plagiarism, falsification, fraudulent data, incorrect interpretation of other works, incorrect citations, etc. The National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan follows the Code of Conduct of the Committee on Publication Ethics (COPE), and follows the COPE Flowcharts for Resolving Cases of Suspected Misconduct (http://publicationethics.org/files/u2/New_Code.pdf). To verify originality, your article may be checked by the Cross Check originality detection service http://www.elsevier.com/editors/plagdetect.

The authors are obliged to participate in peer review process and be ready to provide corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. All authors of a paper should have significantly contributed to the research.

The reviewers should provide objective judgments and should point out relevant published works which are not yet cited. Reviewed articles should be treated confidentially. The reviewers will be chosen in such a way that there is no conflict of interests with respect to the research, the authors and/or the research funders.

The editors have complete responsibility and authority to reject or accept a paper, and they will only accept a paper when reasonably certain. They will preserve anonymity of reviewers and promote publication of corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. The acceptance of a paper automatically implies the copyright transfer to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.

The Editorial Board of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan will monitor and safeguard publishing ethics.

Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайтах:

www:nauka-nanrk.kz

http://www.physics-mathematics.kz

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Редакторы *М. С. Ахметова, Д.С. Аленов, Т.А. Апендиев*
Верстка на компьютере *А.М. Кульгинбаевой*

Подписано в печать 27.07.2017.
Формат 60х881/8. Бумага офсетная. Печать – ризограф.
17,8 п.л. Тираж 300. Заказ 4.

Национальная академия наук РК
050010, Алматы, ул. Шевченко, 28, т. 272-13-18, 272-13-19