

ISSN 2518-1726 (Online),  
ISSN 1991-346X (Print)

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ  
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ

# Х А Б А Р Л А Р Ы

---

---

## ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК  
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES  
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА  
СЕРИЯСЫ**



**СЕРИЯ**

**ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ**



**PHYSICO-MATHEMATICAL  
SERIES**

**4 (314)**

**ШІЛДЕ – ТАМЫЗ 2017 Ж.**

**ИЮЛЬ – АВГУСТ 2017 г.**

**JULY – AUGUST 2017**

1963 ЖЫЛДЫҢ ҚАҢТАР АЙЫНАН ШЫҒА БАСТАҒАН  
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1963 ГОДА  
PUBLISHED SINCE JANUARY 1963

ЖЫЛЫНА 6 РЕТ ШЫҒАДЫ  
ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД  
PUBLISHED 6 TIMES A YEAR

АЛМАТЫ, ҚР ҰҒА  
АЛМАТЫ, НАН РК  
ALMATY, NAS RK

Б а с р е д а к т о р ы  
ф.-м.ғ.д., проф., ҚР ҰҒА академигі **Ғ.М. Мұтанов**

Р е д а к ц и я а л қ а с ы:

**Жұмаділдаев А.С.** проф., академик (Қазақстан)  
**Кальменов Т.Ш.** проф., академик (Қазақстан)  
**Жантаев Ж.Ш.** проф., корр.-мүшесі (Қазақстан)  
**Өмірбаев У.У.** проф. корр.-мүшесі (Қазақстан)  
**Жүсіпов М.А.** проф. (Қазақстан)  
**Жұмабаев Д.С.** проф. (Қазақстан)  
**Асанова А.Т.** проф. (Қазақстан)  
**Бошқаев К.А.** PhD докторы (Қазақстан)  
**Сұраған Д.** корр.-мүшесі (Қазақстан)  
**Quevedo Hernando** проф. (Мексика),  
**Джунушалиев В.Д.** проф. (Қырғыстан)  
**Вишневский И.Н.** проф., академик (Украина)  
**Ковалев А.М.** проф., академик (Украина)  
**Михалевич А.А.** проф., академик (Белорус)  
**Пашаев А.** проф., академик (Әзірбайжан)  
**Такибаев Н.Ж.** проф., академик (Қазақстан), бас ред. орынбасары  
**Тигиняну И.** проф., академик (Молдова)

«ҚР ҰҒА Хабарлары. Физика-математикалық сериясы».

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Меншіктенуші: «Қазақстан Республикасының Ұлттық ғылым академиясы» РҚБ (Алматы қ.)  
Қазақстан республикасының Мәдениет пен ақпарат министрлігінің Ақпарат және мұрағат комитетінде  
01.06.2006 ж. берілген №5543-Ж мерзімдік басылым тіркеуіне қойылу туралы куәлік

Мерзімділігі: жылына 6 рет.  
Тиражы: 300 дана.

Редакцияның мекенжайы: 050010, Алматы қ., Шевченко көш., 28, 219 бөл., 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,  
[www.nauka-nanrk.kz](http://www.nauka-nanrk.kz) / [physics-mathematics.kz](http://physics-mathematics.kz)

---

© Қазақстан Республикасының Ұлттық ғылым академиясы, 2017

Типографияның мекенжайы: «Аруна» ЖК, Алматы қ., Муратбаева көш., 75.

Главный редактор  
д.ф.-м.н., проф. академик НАН РК **Г.М. Мутанов**

Редакционная коллегия:

**Джумадильдаев А.С.** проф., академик (Казахстан)  
**Кальменов Т.Ш.** проф., академик (Казахстан)  
**Жантаев Ж.Ш.** проф., чл.-корр. (Казахстан)  
**Умирбаев У.У.** проф. чл.-корр. (Казахстан)  
**Жусупов М.А.** проф. (Казахстан)  
**Джумабаев Д.С.** проф. (Казахстан)  
**Асанова А.Т.** проф. (Казахстан)  
**Бошкаев К.А.** доктор PhD (Казахстан)  
**Сураган Д.** чл.-корр. (Казахстан)  
**Quevedo Hernando** проф. (Мексика),  
**Джунушалиев В.Д.** проф. (Кыргызстан)  
**Вишневский И.Н.** проф., академик (Украина)  
**Ковалев А.М.** проф., академик (Украина)  
**Михалевич А.А.** проф., академик (Беларусь)  
**Пашаев А.** проф., академик (Азербайджан)  
**Такибаев Н.Ж.** проф., академик (Казахстан), зам. гл. ред.  
**Тигиняну И.** проф., академик (Молдова)

«Известия НАН РК. Серия физико-математическая».

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы)  
Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации и архивов  
Министерства культуры и информации Республики Казахстан №5543-Ж, выданное 01.06.2006 г.

Периодичность: 6 раз в год.  
Тираж: 300 экземпляров.

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, ком. 219, 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,  
[www.nauka-nanrk.kz](http://www.nauka-nanrk.kz) / [physics-mathematics.kz](http://physics-mathematics.kz)

---

© Национальная академия наук Республики Казахстан, 2017

Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75.

E d i t o r i n c h i e f  
doctor of physics and mathematics, professor, academician of NAS RK **G.M. Mutanov**

E d i t o r i a l b o a r d:

**Dzhumadildayev A.S.** prof., academician (Kazakhstan)  
**Kalmenov T.Sh.** prof., academician (Kazakhstan)  
**Zhantayev Zh.Sh.** prof., corr. member. (Kazakhstan)  
**Umirbayev U.U.** prof. corr. member. (Kazakhstan)  
**Zhusupov M.A.** prof. (Kazakhstan)  
**Dzhumabayev D.S.** prof. (Kazakhstan)  
**Asanova A.T.** prof. (Kazakhstan)  
**Boshkayev K.A.** PhD (Kazakhstan)  
**Suragan D.** corr. member. (Kazakhstan)  
**Quevedo Hernando** prof. (Mexico),  
**Dzhunushaliyev V.D.** prof. (Kyrgyzstan)  
**Vishnevskiy I.N.** prof., academician (Ukraine)  
**Kovalev A.M.** prof., academician (Ukraine)  
**Mikhalevich A.A.** prof., academician (Belarus)  
**Pashayev A.** prof., academician (Azerbaijan)  
**Takibayev N.Zh.** prof., academician (Kazakhstan), deputy editor in chief.  
**Tiginyanu I.** prof., academician (Moldova)

**News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physical-mathematical series.**

**ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)**

Owner: RPA "National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan" (Almaty)

The certificate of registration of a periodic printed publication in the Committee of information and archives of the Ministry of culture and information of the Republic of Kazakhstan N 5543-Ж, issued 01.06.2006

Periodicity: 6 times a year

Circulation: 300 copies

Editorial address: 28, Shevchenko str., of. 219, 220, Almaty, 050010, tel. 272-13-19, 272-13-18,  
[www.nauka-nanrk.kz/physics-mathematics.kz](http://www.nauka-nanrk.kz/physics-mathematics.kz)

---

© National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, 2017

Address of printing house: ST "Aruna", 75, Muratbayev str, Almaty

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES**

ISSN 1991-346X

Volume 4, Number 314 (2017), 241 – 251

**К.В. Jakupov**

Institute of mathematics and mathematical modeling, Almaty, Kazakhstan.

E-mail: [jakupovKB@mail.ru](mailto:jakupovKB@mail.ru)**HOOK'S LAW IN THE THEORY OF ELASTICITY  
OF ANISOTROPIC BODIES**

**Abstract.** From Hook's law, the components of the stress tensor of an anisotropic solid deformable body are derived. The dependence of the second Lamé coefficient on the direction is taken into account. The asymmetry of the stress tensor of a solid deformed body is proved. New equations of the anisotropic theory of elasticity are derived. It is shown on a concrete example that the symmetrical half of the incomplete differential of displacement used in the Lamé hypothesis and equations, the antisymmetric half of which is discarded, the consequence of which is the symmetry of the stress tensor, leads to absurd physical results. For the new equations, an explicit scheme of the second order of accuracy is constructed, with the use of which the elastic state of a three-layered flat bar is numerically calculated under the action on the upper face of constant tangential and normal stresses. The same scheme is applied to the Lamé equations. The obtained pictures of the displacements distribution clearly demonstrate the difference in the solutions of the comparable systems of elasticity equations, as well as the inadequacy of solving the Lamé equations for a given state of a deformed body. The falsity of Lamé's equations is confirmed theoretically and physically.

**Keywords:** anisotropic, tension, stress, tensor, equations.

УДК 539.2/6

**К.Б. Джакупов**

Институт математики и математического моделирования МОН РК, Алматы, Казахстан

**ЗАКОН ГУКА В ТЕОРИИ УПРУГОСТИ АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ**

**Аннотация.** По закону Гука выводится тензор напряжений анизотропного твердого деформируемого тела. Учитывается зависимость второго коэффициента Ламе от направления. Доказана несимметричность тензора напряжений твердого деформируемого тела. Выведены новые уравнения анизотропной теории упругости. Показано на конкретных распределениях перемещений под действием внешних напряжений, что используемая в гипотезе и уравнениях Ламе симметричная половина неполного дифференциала смещения, антисимметричная половина которого отбрасывается, следствием чего является симметричность тензора напряжений, приводит к абсурдным физическим результатам. Для новых уравнений построена явная схема 2-го порядка точности, которая применена в численных расчетах упругого состояния двуслойного плоского бруска при действии на верхней грани постоянных касательных и нормальных напряжений. Такая же схема применена для уравнений Ламе. Полученные картины распределения смещений наглядно демонстрируют различие решений сравниваемых систем уравнений упругости, а также неадекватность решения уравнений Ламе данному состоянию деформируемого тела. Теоретически и физически подтверждена фальшивость уравнений Ламе.

**Ключевые слова:** анизотропность, растяжение, напряжения, тензор, уравнения.

**1. Касательные напряжения в обобщенном законе Гука**

**Закон Гука** — утверждение, согласно которому **деформация** возникающая в упругом теле **пропорциональна** приложенной к этому телу **силе**. Открыт в 1660 году английским учёным Робертом Гуком.

Следует иметь в виду, что закон Гука выполняется только при малых деформациях.

Для многих сред закон Гука неприменим даже при малых деформациях.

Уравнения упругости с несимметричным тензором напряжений **изотропного тела** изложен в [1] по закону Гука:  $\mathbf{F} = k\mathbf{u}, k > 0, \mathbf{F}_x = u\mathbf{i}, \mathbf{F}_y = v\mathbf{j}, \mathbf{F}_z = w\mathbf{k}, \mathbf{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$  – вектор перемещения,  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_x + \mathbf{F}_y + \mathbf{F}_z$  – внешняя сила, вызывающая перемещение.

В анизотропных средах, составленных из тел с различными упругими свойствами или в анизотропных телах, свойства которых зависят от направления, закон Гука должен быть типа

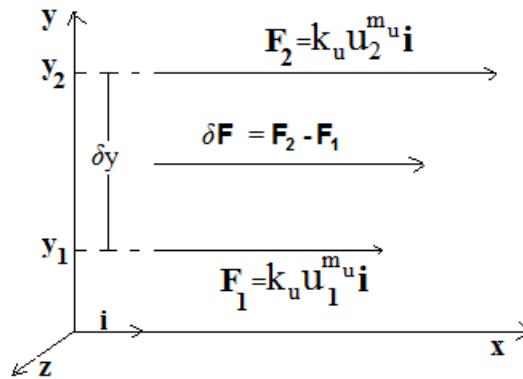
$$\mathbf{F} = k_u u\mathbf{i} + k_v v\mathbf{j} + k_w w\mathbf{k}, \quad k_u > 0, k_v > 0, k_w > 0 \quad (1.1)$$

Пусть на плоскости  $y_1$  сила вызывает перемещение по закону Гука  $\mathbf{F}_1 = k_u u_1 \mathbf{i}$ , также сила  $\mathbf{F}_2 = k_u u_2 \mathbf{i}$  образует перемещение на плоскости  $y_2 = y_1 + \delta y, \delta y > 0$ .

Приращения сил и перемещений между плоскостями равны:

$$\delta \mathbf{F} = \mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1 = k_u u_2 \mathbf{i} - k_u u_1 \mathbf{i} = k_u \delta u \mathbf{i}, \quad \delta u = u_2 - u_1 > 0.$$

Для конкретности положим  $|\mathbf{F}_2| > |\mathbf{F}_1|$ . В этом случае приращение силы направлено по оси  $x$ :  $\delta \mathbf{F} \uparrow \uparrow \mathbf{i}$ . Вводится линейная плотность  $\mathbf{f} = \frac{\delta \mathbf{F}}{\delta y}, \delta \mathbf{F} = \delta y \mathbf{f}$ . По определению вектор среднего касательного напряжения  $\mathbf{p}_{\text{ухср}} = \frac{\delta \mathbf{F}}{\delta \sigma}, \delta \sigma = \delta x \delta z$  параллелен и одинаково направлен с силой, вызывающей данное напряжение  $\mathbf{p}_{\text{ухср}} \uparrow \uparrow \delta \mathbf{F}, \mathbf{p}_{\text{ухср}} \uparrow \uparrow \mathbf{f}$ .



Ввод коэффициента пропорциональности образует связи:

$$\mathbf{f} = k' \mathbf{p}_{\text{ухср}}, k' > 0, \delta y \mathbf{f} = k' \mathbf{p}_{\text{ухср}} \delta y, \mathbf{p}_{\text{ухср}} \uparrow \uparrow \mathbf{i}, k' \mathbf{p}_{\text{ухср}} \delta y = k_u \delta u \mathbf{i}$$

Данное выражение умножается скалярно на орт  $\mathbf{i}$ :

$$k' \mathbf{p}_{\text{ухср}} \delta y \cdot \mathbf{i} = k_u \delta u \mathbf{i} \cdot \mathbf{i}$$

В результате получаются

$$k' \mathbf{p}_{\text{ухср}} \delta y \cdot \mathbf{i} = k' |\mathbf{p}_{\text{ухср}}| \delta y |\mathbf{i}| \cos 0^\circ = k' \mathbf{p}_{\text{ухср}} \delta y, \quad k_u \delta u \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = k_u \delta u$$

Равенства

$$k' \mathbf{p}_{\text{ухср}} \delta y = k_u \delta u, \quad \mathbf{p}_{\text{ухср}} = \frac{k_u}{k'} \frac{\delta u}{\delta y}$$

в пределе дают касательное напряжение

$$p_{yx} = \lim_{\delta y \rightarrow 0} \frac{k_u}{k'} \frac{\delta u}{\delta y} = \mu_u \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \mu_u = \frac{k_u}{k'} > 0$$

Аналогично касательные напряжения по другим направлениям:

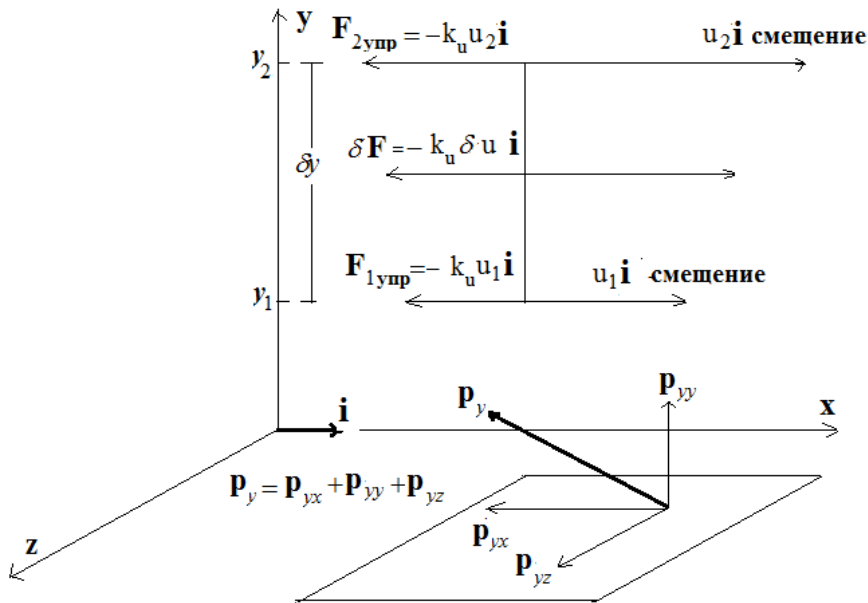
$$p_{xy} = \mu_v \frac{\partial v}{\partial x}, p_{zx} = \mu_u \frac{\partial u}{\partial z}, p_{xz} = \mu_w \frac{\partial w}{\partial x}, p_{yz} = \mu_w \frac{\partial w}{\partial y}, p_{zy} = \mu_v \frac{\partial v}{\partial z}$$

Формулы *несимметричных* касательных напряжений выведены для вызывающей растяжение тела *внешней* силы  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_x + \mathbf{F}_y + \mathbf{F}_z$ . Упругая сила в деформируемом теле по третьему закону Ньютона равна внешней со зна- ком минус  $\mathbf{F}_{\text{упр}} = -\mathbf{F}$ . Следовательно, линейный закон Гука для сил упругости будет иметь вид  $\mathbf{F}_{\text{упр}} = -k\mathbf{u}, \mathbf{F}_{\text{упр}} = -k_u\mathbf{i} - k_v\mathbf{j} - k_w\mathbf{k}$ .

Аналогичное представление для анизотропного закона Гука  $\mathbf{F}_{\text{упр}} = -k_u\mathbf{u}\mathbf{i} - k_v\mathbf{v}\mathbf{j} - k_w\mathbf{w}\mathbf{k}$ . Пусть на плоскости  $y_1$  сила вызывает перемещением  $\mathbf{F}_{1\text{упр}} = k_u u_1 \mathbf{i}$ , аналогично сила  $\mathbf{F}_{2\text{упр}} = k_u u_2 \mathbf{i}$  на плоскости  $y_2 = y_1 + \delta y, \delta y > 0$ .

Приращения сил и перемещений между слоями равны

$$\delta \mathbf{F} = \mathbf{F}_{2\text{упр}} - \mathbf{F}_{1\text{упр}} = -k_u u_2 \mathbf{i} + k_u u_1 \mathbf{i} = -k_u \delta u \mathbf{i}, \quad \delta u = u_2 - u_1 > 0.$$



Допустим  $|\mathbf{F}_2| > |\mathbf{F}_1|$ , в этом случае приращение силы направлено против оси  $x$ :  $\delta \mathbf{F} \uparrow \downarrow \mathbf{i}$ . Вводится линейная плотность  $\mathbf{f} = \delta \mathbf{F} / \delta y, \delta \mathbf{F} = \delta y \mathbf{f}$ .

По определению вектор среднего касательного напряжения  $\mathbf{p}_{\text{ухср}} = \frac{\delta \mathbf{F}}{\delta \sigma}, \delta \sigma = \delta x \delta z$  параллелен и одинаково направлен с силой, вызывающей конкретное напряжение  $\mathbf{p}_{\text{ухср}} \uparrow \uparrow \delta \mathbf{F}, \mathbf{p}_{\text{ухср}} \uparrow \uparrow \mathbf{f}$ .

Введением коэффициента пропорциональности образуются связи:

$$\mathbf{f} = k' \mathbf{p}_{\text{ухср}}, k' > 0, \delta y \mathbf{f} = k' \mathbf{p}_{\text{ухср}} \delta y, \mathbf{p}_{\text{ухср}} \uparrow \downarrow \mathbf{i}, k' \mathbf{p}_{\text{ухср}} \delta y = -k_u \delta u \mathbf{i}$$

Данное выражение умножается скалярно на орт  $\mathbf{i}$ :

$$k' \mathbf{p}_{\text{ухср}} \delta y \cdot \mathbf{i} = -k_u \delta u \mathbf{i} \cdot \mathbf{i}$$

В результате получаются

$$k' p_{yxcp} \delta y \cdot \mathbf{i} = k' |p_{yxcp}| |\delta y| |\mathbf{i}| \cos 180^\circ = -k' p_{yxcp} \delta y,$$

$$-k_u \delta u \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = -k_u \delta u$$

Равенства

$$k' p_{yxcp} \delta y = k_u \delta u, p_{yxcp} = \frac{k_u}{k'} \frac{\delta u}{\delta y}$$

в пределе дают касательное напряжение

$$p_{yx} = \lim_{\delta y \rightarrow 0} \frac{k_u}{k'} \frac{\delta u}{\delta y} = \mu_u \frac{\partial u}{\partial y}, \mu_u = \frac{k_u}{k'} > 0$$

Касательные напряжения по другим направлениям аналогичны:

$$p_{xy} = \mu_v \frac{\partial v}{\partial x}, p_{zx} = \mu_u \frac{\partial u}{\partial z}, p_{xz} = \mu_w \frac{\partial w}{\partial x}, p_{yz} = \mu_w \frac{\partial w}{\partial y}, p_{zy} = \mu_v \frac{\partial v}{\partial z}$$

Таким образом, формулы напряжений для внешних сил совпадают с формулами воздействия упругих сил, поэтому дальнейшие выводы делаются только для внешних сил.

## 2. Связь нормальных напряжений с законом Гука

Аналогичными рассуждениями устанавливается формула составляющей  $\mathbf{p}_{xx}^0$  нормального напряжения  $\mathbf{p}_{xx} = \lambda \operatorname{div} \mathbf{i} + \mathbf{p}_{xx}^0$ . Пусть внешние силы равны:  $\mathbf{F}_1 = k_u u_1 \mathbf{i}$  на плоскости  $x_1$  и  $\mathbf{F}_2 = k_u u_2 \mathbf{i}$  на плоскости  $x_2 = x_1 + \delta x, \delta x > 0$ . Образуются приращения сил и перемещений:

$$\delta \mathbf{F} = \mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1 = k_u u_2 \mathbf{i} - k_u u_1 \mathbf{i} = k_u \delta u \mathbf{i}, \delta u = u_2 - u_1 > 0.$$

По определению напряжений имеют место  $\mathbf{p}_{xxcp}^0 = \frac{\delta \mathbf{F}}{\delta \sigma}$ ,  $\delta \sigma = \delta y \delta z$  и одинаковая направленность векторов  $\delta \mathbf{F} \uparrow \uparrow \mathbf{i}$  в силу  $|\mathbf{F}_2| > |\mathbf{F}_1|$ .

Через линейную плотность

$$\mathbf{f} = \frac{\delta \mathbf{F}}{\delta x}, \delta \mathbf{F} = \delta x \mathbf{f}, \mathbf{f} = k'' \mathbf{p}_{xxcp}^0$$

получаются равенства  $\delta \mathbf{F} = k'' \delta x \mathbf{p}_{xxcp}^0$ ,  $k'' \delta x \mathbf{p}_{xxcp}^0 = k_u \delta u \mathbf{i}$ .

Последнее выражение умножается скалярно на орт  $\mathbf{i}$ :

$$k'' \delta x \mathbf{p}_{xxcp}^0 \cdot \mathbf{i} = k_u \delta u \mathbf{i} \cdot \mathbf{i}$$

Векторы параллельны по структуре  $\mathbf{p}_{xxcp}^0 \uparrow \uparrow \mathbf{i}$ .

Поэтому имеют место в скалярных произведениях равенства

$$k'' \delta x \mathbf{p}_{xxcp}^0 \cdot \mathbf{i} = k'' \delta x |p_{xxcp}^0| \cdot |\mathbf{i}| \cdot \cos 0^\circ = k'' \delta x p_{xxcp}^0, k_u \delta u \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = k_u \delta u.$$

В результате получается  $k'' \delta x p_{xxcp}^0 = k_u \delta u$ , откуда  $p_{xxcp}^0 = \frac{k_u}{k''} \frac{\delta u}{\delta x}$ .

В пределе вытекает формула составляющей нормального напряжения

$$p_{xx}^0 = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{k_u}{k''} \frac{\delta u}{\delta x} = \mu_u \frac{\partial u}{\partial x}, \mu_u = \frac{k_u}{k''}.$$

Такими же рассуждениями выводятся составляющие нормальных напряжений по другим направлениям:



$$p_{ii}^o = \mu_1 \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \quad \mu_i = \frac{k_i}{k^n}, \quad i=1,2,3; \quad u_1 \equiv u, u_2 \equiv v, u_3 \equiv w, x_1 \equiv x, x_2 \equiv y, x_3 \equiv z.$$

Такие же формулы нормальных напряжений получаются для сил упругости в твердом деформируемом теле  $\mathbf{F}_{\text{упр}} = -\mathbf{F}$ .

Таким образом, по закону Гука получается *несимметричный* тензор напряжений в анизотропном твердом деформируемом теле:

$$p_{ji} = \delta_{ji} \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu_i \varepsilon_{ji}, \quad \varepsilon_{ji} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad i,j=1,2,3, \quad (2.1)$$

$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{i} + u_2 \mathbf{j} + u_3 \mathbf{k}$  - вектор перемещения. В нормальных напряжениях  $\lambda \delta_{ji} \operatorname{div} \mathbf{u}$  по Ламе сохраняется,  $\delta_{ji}$  - символ Кронеккера.

### 3. Уравнения теории упругости с несимметричным тензором напряжений анизотропного тела

Элементы тензора деформаций  $\varepsilon_{ji} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, i,j=1,2,3$ , непосредственно вытекающие из закона

Гука [1], равны коэффициентам неполного дифференциала (3.4).

Несимметричный тензор напряжений анизотропного тела

$$p_{ji} = \delta_{ji} \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu_i \varepsilon_{ji}, \quad \varepsilon_{ji} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad i,j=1,2,3, \quad (4.1)$$

в уравнениях динамики сплошной среды в напряжениях

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \rho_0 F_i + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial p_{ji}}{\partial x_j}, \quad i=1,2,3$$

дает уравнение

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \rho_0 F_i + \lambda \frac{\partial}{\partial x_i} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu_i \Delta u_i, \quad i=1,2,3 \quad (4.2)$$

$$\mu_u = \mu_1, \mu_v = \mu_2, \mu_w = \mu_3.$$

### 4. О фальсификациях и непригодности уравнений Ламе в теории упругости анизотропных тел

Уравнения упругости твердого деформируемого тела

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \rho_0 \mathbf{F} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} \quad (3.1)$$

построены по гипотезе Ламе о *симметричности* тензора напряжений

$$p_{ji} = \lambda \delta_{ji} \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\mu \varepsilon_{ji}, \quad \varepsilon_{ji} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad p_{ji} = p_{ij}, \quad i,j=1,2,3, \quad (3.2)$$

Гипотеза Ламе заключается в том, что элементы  $\varepsilon_{ji}$  тензора деформаций  $\mathcal{E}$  должны быть равны *удвоенному* симметричному тензору скоростей деформаций, то есть *удвоенной* первой половине искусственной формулы

$$du_i = \sum_{j=1}^3 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] dx_j, i=1,2,3, \quad (3.3)$$

(вторая антисимметричная половина (3.3) игнорируется [3-11]).

Формула (3.3) образована из неполного дифференциала смещений

$$\tilde{d}u_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j, i=1,2,3, \quad (3.4)$$

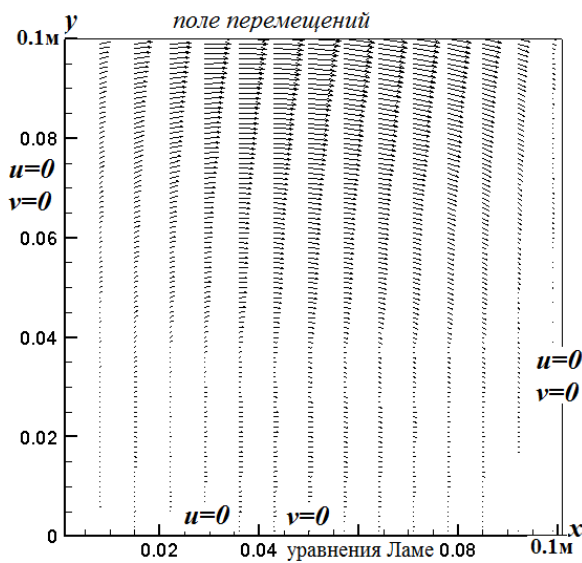
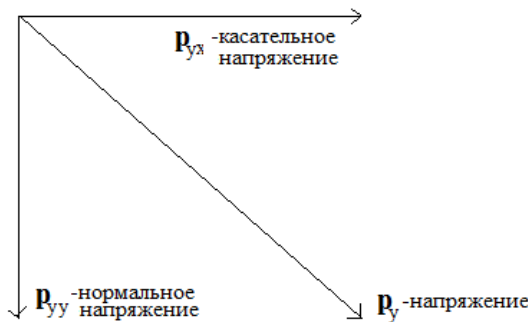
(Полный дифференциал:  $du = \frac{\partial u}{\partial t} dt + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u}{\partial x_j} dx_j = \frac{\partial u}{\partial t} dt + \tilde{d}u$ ).

Таким образом, в [3-11] тензор напряжений Ламе (3.2) не соответствует и не вытекает из закона Гука. Очевидно, уже по построению не годится в анизотропных средах.

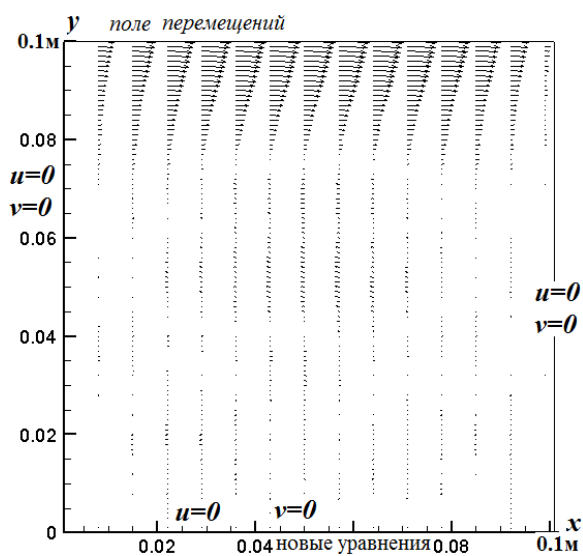
Изложенный выше метод автора противоположен гипотезе Ламе и физически основан на законе Гука, в точности следует определению, данному С.П. Тимошенко в [2]: «Основная задача теории упругости заключается в том, чтобы по заданным действующим на твердое тело внешним силам находить те изменения формы, которые тело претерпевает, и те внутренние силы упругости, которые при этих изменениях формы возникают между частями тела».

Для сравнения уравнений Ламе (3.1) с новыми уравнениями с несимметричным тензором напряжений в изотропном теле  $\mu_u = \mu_v = \mu_w = \mu$ :

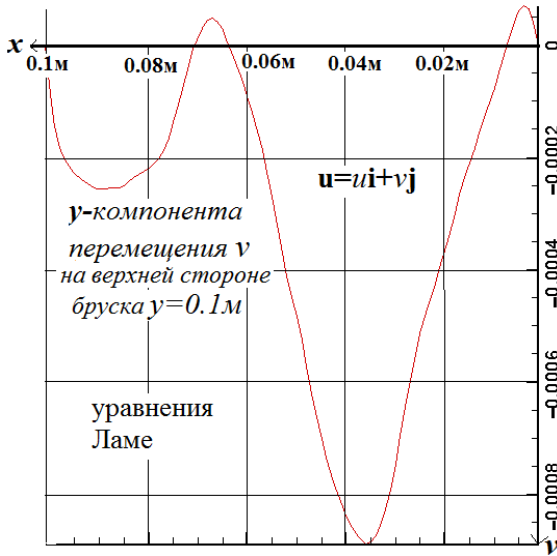
$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \rho_0 \mathbf{F} + \lambda \text{graddiv} \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} \quad (3.5)$$



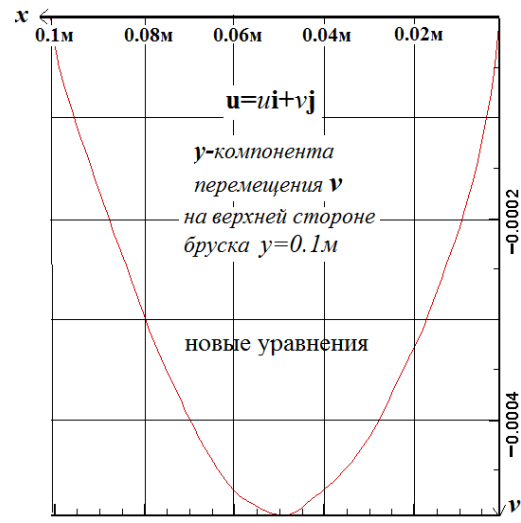
Фигура 1



Фигура 2



Фигура 3

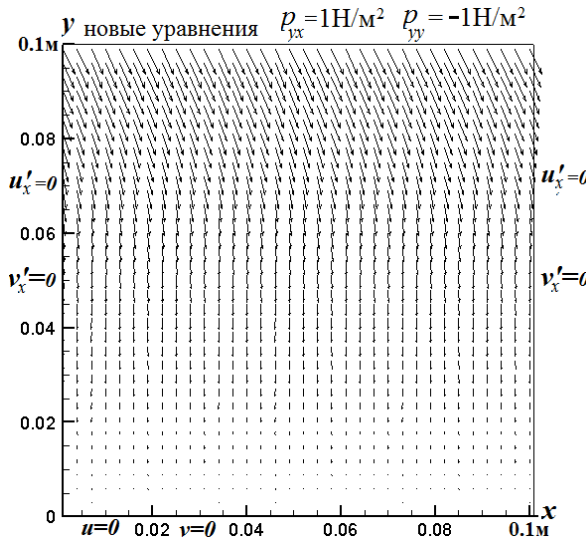


Фигура 4

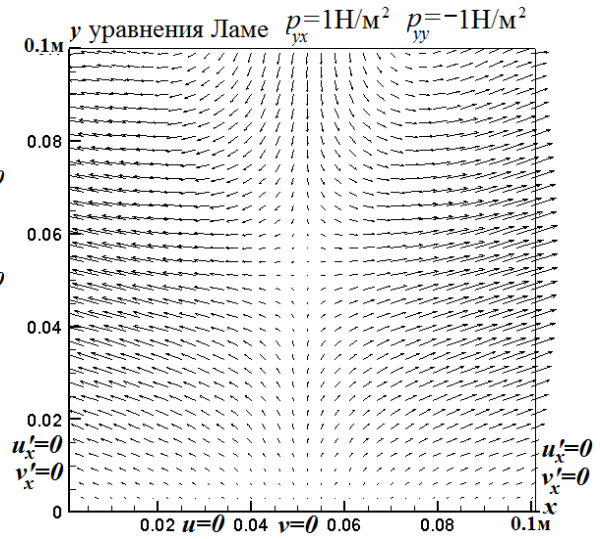
выполнен расчет перемещений в квадратном деформируемом бруске размером 0.1м на 0.1м.

Вектор внешней силы  $\mathbf{p}_y = \mathbf{p}_{yx} + \mathbf{p}_{yy} = p_{yx}\mathbf{i} + p_{yy}\mathbf{j}$  направлен под углом к верхней плоскости бруска.

На фиг. 1 и 2 представлены поля векторов перемещений  $\mathbf{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$ , на фиг. 3 и 4 эпюры поперечной скорости на верхней стороне бруска, всё на момент времени  $t=121.38$  с. Плотность тела  $\rho_0 = 7800\text{кг/м}^3$ . Конкретно положено  $p_{yy}=-1\text{Н/м}^2$ ,  $p_{yx}=10\text{ Н/м}^2$ . Остальные грани бруска жестко закреплены, смещения на них равны нулю. Коэффициенты Ламе выбраны равными  $\lambda = 1\text{ кз/(с}^2\text{м)}$ ,  $\mu = 100\text{ кз/(с}^2\text{м)}$ . Двумерные уравнения Ламе (3.1) и новые уравнения (3.5) реализованы по явным схемам [2] на сетке  $100 \times 100$  с шагом по времени равным  $0.0005\text{с}$ . Подтверждено явное различие между численными решениями, в особенности вертикальных перемещений на верхней стороне бруска на фиг. 3 и 4.



Фигура 5



Фигура 6

На фиг. 4 перемещение частиц верхней стороны бруска  $y=0.1\text{ м}$  происходит вниз, что подтверждается отрицательными значениями поперечного перемещения  $v$  по новым уравнениям. На фиг. 3 по уравнениям Ламе имеются положительные значения поперечной составляющей перемещения, что противоречит направлению действия внешней силы.

На фиг. 5 поле перемещений по новым уравнениям, на фиг. 6 поле перемещений по уравнениям Ламе. Напряжения действуют на всей верхней стороне бруска. Результаты фиг. 1 - 6 практически подтверждают фальшивость уравнений Ламе с симметричным тензором напряжений.

### 5. Явная схема уравнений анизотропной теории упругости

Рассматривается задача Коши-Дирихле для новых уравнений

$$\begin{aligned}\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} &= \rho_0 F_x + \lambda \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x} + \mu_u \Delta \mathbf{u}, \\ \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} &= \rho_0 F_y + \lambda \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial y} + \mu_v \Delta \mathbf{v}, \\ \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} &= \rho_0 F_z + \lambda \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial z} + \mu_w \Delta \mathbf{w}, \\ \mathbf{p} &= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial z}\end{aligned}$$

с начальными условиями:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}|_{t=0} &= \mathbf{d}_u(\mathbf{r}), \mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{d}_v(\mathbf{r}), \mathbf{w}|_{t=0} = \mathbf{d}_w(\mathbf{r}), \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}|_{t=0} &= \mathbf{d}_{uu}(\mathbf{r}), \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}|_{t=0} = \mathbf{d}_{vv}(\mathbf{r}), \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}|_{t=0} = \mathbf{d}_{ww}(\mathbf{r})\end{aligned}$$

и краевыми условиями на границе  $S$ :

$$\mathbf{u}|_S = \mathbf{q}_u(\mathbf{r}), \mathbf{v}|_S = \mathbf{q}_v(\mathbf{r}), \mathbf{w}|_S = \mathbf{q}_w(\mathbf{r}),$$

В области интегрирования задается равномерная сетка

$\bar{\Omega}_h = \{x_i = ih_x, y_j = jh_y, z_k = kh_z, 0 \leq i \leq N_x, 0 \leq j \leq N_y, 0 \leq k \leq N_z\}$ , и сетка по времени  $\bar{\Omega}_\tau = \{t_n = n\tau, n = 0, 1, \dots, N_\tau\}$ .

Обозначения сеточных функций:  $f_{ijk}^n \equiv f(x_i, y_j, z_k, t_n)$ .

Начальные условия задаются во внутренних узлах:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_{ijk}^0 &= \mathbf{d}_{uijk}, \mathbf{v}_{ijk}^0 = \mathbf{d}_{vijk}, \mathbf{w}_{ijk}^0 = \mathbf{d}_{wijk}, \\ \mathbf{u}_{ijk}^1 &= \mathbf{d}_{uijk} + \tau \mathbf{d}_{uuijk}, \mathbf{v}_{ijk}^1 = \mathbf{d}_{vijk} + \tau \mathbf{d}_{vvijk}, \mathbf{w}_{ijk}^1 = \mathbf{d}_{wijk} + \tau \mathbf{d}_{wwijk}, \\ 1 \leq i \leq N_x - 1, 1 \leq j \leq N_y - 1, 1 \leq k \leq N_z - 1\end{aligned}$$

краевые условия в граничных узлах.

Явная разностная схема:

$$\begin{aligned}Q_{uijk}^n &= \mu_u \left[ \frac{u_{i-1jk}^n - 2u_{ijk}^n + u_{i+1jk}^n}{h_x^2} + \frac{u_{ij-1k}^n - 2u_{ijk}^n + u_{ij+1k}^n}{h_y^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{u_{ijk-1}^n - 2u_{ijk}^n + u_{ijk+1}^n}{h_z^2} + \rho_0 F_{xijk} \right], \\ Q_{vijk}^n &= \mu_v \left[ \frac{v_{i-1jk}^n - 2v_{ijk}^n + v_{i+1jk}^n}{h_x^2} + \frac{v_{ij-1k}^n - 2v_{ijk}^n + v_{ij+1k}^n}{h_y^2} + \right.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{v_{ijk-1}^n - 2v_{ijk}^n + v_{ijk+1}^n}{h_z^2} + \rho_0 F_{yijk} ], \\
Q_{wijk}^n = & \mu_w \left[ \frac{w_{i-1jk}^n - 2w_{ijk}^n + w_{i+1jk}^n}{h_x^2} + \frac{w_{ij-1k}^n - 2w_{ijk}^n + w_{ij+1k}^n}{h_y^2} + \right. \\
& \left. + \frac{w_{ijk-1}^n - 2w_{ijk}^n + w_{ijk+1}^n}{h_z^2} + \rho_0 F_{zijk} \right], \\
\rho_0 \frac{u_{ijk}^{n+1} - 2u_{ijk}^n + u_{ijk}^{n-1}}{\tau^2} = & Q_{uijk}^n + \lambda \left( \frac{u_{i-1jk}^n - 2u_{ijk}^n + u_{i+1jk}^n}{h_x^2} + \right. \\
& \left. + \frac{v_{i+1j+1k}^n - v_{i+1j-1k}^n - v_{i-1j+1k}^n + v_{i-1j-1k}^n}{4h_x h_y} + \frac{w_{i+1jk+1}^n - w_{i+1jk-1}^n - w_{i-1jk+1}^n + w_{i-1jk-1}^n}{4h_x h_z} \right), \\
\rho_0 \frac{v_{ijk}^{n+1} - 2v_{ijk}^n + v_{ijk}^{n-1}}{\tau^2} = & Q_{vijk}^n + \lambda \left( \frac{v_{ij-1k}^n - 2v_{ijk}^n + v_{ij+1k}^n}{h_y^2} + \right. \\
& \left. + \frac{u_{i+1j+1k}^n - u_{i+1j-1k}^n - u_{i-1j+1k}^n + u_{i-1j-1k}^n}{4h_x h_y} + \frac{w_{ij+1k+1}^n - w_{ij+1k-1}^n - w_{ij-1k+1}^n + w_{ij-1k-1}^n}{4h_z h_y} \right), \\
\rho_0 \frac{w_{ijk}^{n+1} - 2w_{ijk}^n + w_{ijk}^{n-1}}{\tau^2} = & Q_{wijk}^n + \lambda \left( \frac{w_{ijk-1}^n - 2w_{ijk}^n + w_{ijk+1}^n}{h_z^2} + \right. \\
& \left. + \frac{u_{i+1jk+1}^n - u_{i+1jk-1}^n - u_{i-1jk+1}^n + u_{i-1jk-1}^n}{4h_x h_z} + \frac{v_{ij+1k+1}^n - v_{ij+1k-1}^n - v_{ij-1k+1}^n + v_{ij-1k-1}^n}{4h_z h_y} \right), \\
& i=1, \dots, N_x - 1, j=1, \dots, N_y - 1, k=1, \dots, N_z - 1
\end{aligned}$$

Явная схема имеет погрешность 2-го порядка по всем переменным

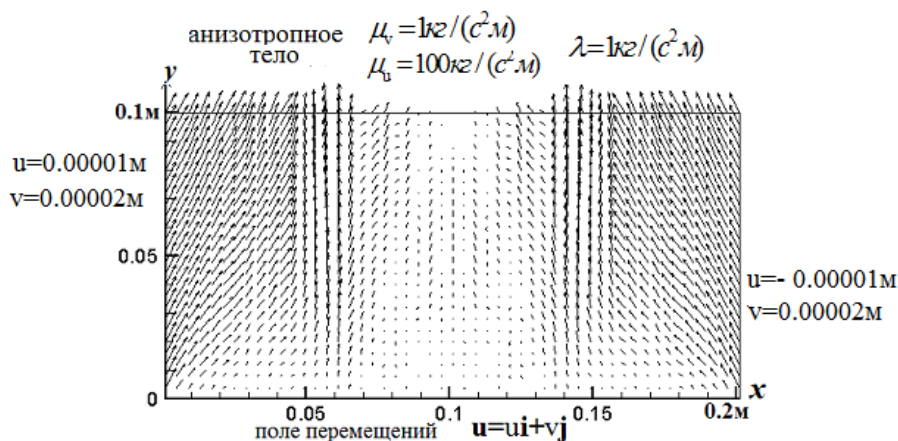
$$O(\tau^2) + O(h_x^2) + O(h_y^2) + O(h_z^2).$$

Устойчивость схемы обеспечивается условием Куранта:

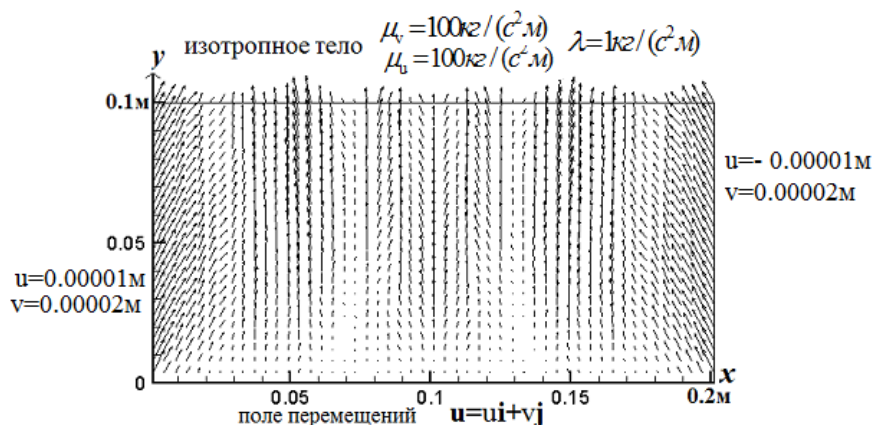
$$\frac{\tau^2 \mu}{h_x^2 + h_y^2 + h_z^2} \leq 1, \quad \mu = \max \{ \mu_u, \mu_v, \mu_w \}.$$

На фиг.7 представлено поле перемещений в анизотропном теле, на фиг.8 в изотропном теле. На верхней плоскости бруска ставится краевое условие Неймана  $\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ .

Очевидно, различие в коэффициентах  $\mu_v$  приводит к разным полям перемещений, следовательно, к различным полям внутренним напряжениям.



Фигура 7



Фигура 8

## Выводы

Физические выводы нормальных и касательных напряжений доказывают *несимметричность* тензора напряжений в твердом деформируемом теле как для изотропного закона Гука, так и для анизотропного. Конкретные примеры численных расчетов состояния упругого тела показывают неадекватность и несостоятельность гипотезы о *симметричности* тензора напряжений сплошной среды и соответственно уравнений теории упругости Ламе.

Несимметричность тензора напряжений открывает широкие возможности для моделирования перемещений в твердом деформируемом теле, что пока-зано на примере анизотропного тела фиг. 7.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Джакупов К.Б. Моделирование по закону Гука в теории упругости. Несимметричность тензора напряжений // Известия НАН РК, серия физ.-мат., 6(310), ноябрь - декабрь 2016 г. с.96-103.
- [2] Тимошенко С.П. Курс теории упругости. - Киев: «Наукова думка», 1972г. С.503.
- [3] Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред. - М.: Мир, 1974г. 318с.
- [4] Седов Л.И. Механика сплошной среды, т.1. М.: «Наука»,1973г. 315с.
- [5] Лурье А.И. Теория упругости. М.: «Наука»,1970г. 984с.
- [6] Ильюшин А.А. Механика сплошной среды.М.: Изд-во МГУ, 1978г. 287с.
- [7] Ильюшин А.А., Победра Б.Е. Основы математической теории термовязко-упругости. М.: «Наука»,1970г. 547с.
- [8] Pyushin A.A., Lenski V.S. Strength of Materials. N.Y. Pergamon press, 1967.
- [9] Eringen A.C. Mechanics of Continua.N.Y. , Wiley, 1967.
- [10] Новацкий В. Теория упругости. М.: «Мир», 1975.
- [11] Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных тел. М.: Изд-во МГУ, 1976.
- [12] Джакупов К.Б. Коррекции теоретических парадоксов механики сплошной среды.- Алматы: Изд-во «Ғылым ордасы», 2016г. С.418.

## REFERENCES

- [1] Джакупов К.Б. Моделирование по закону Гука в теории упругости. Несимметричность тензора напряжений //Известия НАН РК, серия физ.-мат., 6(310), ноябрь - декабрь 2016 г. с.96-103.
- [2] Тимошенко С.П. Курс теории упругости.- Киев: «Наукова думка», 1972г.С.503.
- [3] Mase G.E. Theory and Problems of Continuum Mechanics. М.: "Mir", 1974. P.318.
- [4] Sedov L.I. Continuum Mechanics , Vol.1 . М.: "Science", 1973 . P.315.
- [5] Lurie A.I. The theory of elasticity . М.: "Science" , 1970 . P.984 .
- [6] Ilyushin A.A. Continuum Mechanics sredi.M.: MGU , 1978 . P.287.
- [7] Ilyushin AA Pobedria BE Fundamentals of the mathematical theory of thermo – viscoelasticity . М.: "Science" , 1970 . 547s .
- [8] Ilyushin A.A., Lenski V.S. Strength of Materials. N.Y. Pergamon press, 1967 .
- [9] Eringen A.C. Mechanics of Continua.N.Y. , Wiley, 1967 .
- [10] Nowacki W. Theory of Elasticity . М.: "Mir" , 1975.
- [11] Lomakin V.A .Theory of elasticity of inhomogeneous bodies . М.: MGU , 1976.
- [12] Jakupov K.B. Correction of continuum mechanics theoretical paradoxes – Almaty: publishing house «Ғылым ордасы», 2015г. P.376.

ӘОЖ: 539.2/.6

## К.Б. Жақып-тегі

Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы қ., Қазақстан

## ГУКТЫҢ ЗАҢЫ АНИЗОТРОПТЫҚ ДЕНЕЛЕРДІҢ СЕРПІЛІМДІК ТЕОРИЯСЫНДА

**Аннотация.** Тікелей Гук заңымен анизотроптық қатты майысқақ денелердің кернеулер тензорының компоненттері шығарылған. Ламенің екінші еселенуінің бағыттан тәуелділігі есептелген. Майысқақ қатты дененің серпілімдік теориясының кернеулер тензорының беттеспегендігі дәлелденген. Осыған сәйкес анизотроптық майысқақ қатты дененің серпілімдік теориясының теңдеулері жасалынған. Ламе гипотезасында толық емес жылжу дифференциалының беттескен жартысы қана пайдаланғаны көрсетілген, екінші антибеттескен жартысы лақтырылынған, соның салдарынан Ламе кернеулер тензорының беттескендігі шыққан. Жаңа теңдеулер үшін 2 ретті нақтылығы бар айқын схема жасалынған, соны пайдаланып жазық жолақтың серпілімдік күйі саналған, үстіңгі жақтауының ортасына жанама кернеулер және тік кернеулер әсер еткенде. Дәл сондай схема Ламе теңдеулеріне де қолдалынған. Саналған жылжулардың үлестірулік суреттері салыстырынып жатқан теңдеулердің айырмашылықтарын бейнелейді және Ламе теңдеулерінің майысқақ қатты дененің күйіне сәйкес еместігін көрсетеді. Ламе теңдеулерінің жалғандығы теориялық және физикалық тұрпатта бекітілген.

**Түйін сөздер:** анизотроптылық, созылу, кернеулер, тензор, теңдеулер.

**Сведения об авторе:**

Джакупов Кенес Баженович - доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент Российской Академии Естествознания,

Служебный адрес: РГП Институт математики и математического моделирования КМ МОН РК, 050010, ул.Пушкина,125, г.Алматы, Казахстан,

Домашний адрес: 050014, мкр. Айнабулак-3, д.158, кв. 20, г.Алматы, Казахстан

Контактные телефоны: 8 727 305 92 44, +7 701 667 88 59, Адрес электронной почты: E-mail: jakupovKB@mail.ru

## МАЗМҰНЫ

<i>Сайдуллаева Н.С., Қабылбеков К.А., Пазылова Д.Т., Тагаев Н.С., Каликулова А.О.</i> Электр тізбегінің сыртқы кедергісінде бөлінетін қуатты зерттеуге арналған компьютерлік зертханалық жұмысты орындауды ұйымдастыру.....	5
<i>Асанова А.Т., Аширбаев Х.А., Сабалахова А.П.</i> Гиперболалық тектес дербес туындылы интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін бейлокал есеп туралы.....	11
<i>Сайдуллаева Н.С., Қабылбеков К.А., Пазылова Д.Т., Аширбаев Х.А., Каликулова А.О.</i> Компьютерлік зертханалық жұмыстарды орындау үшін бірімді емес есептер мен берілгендері түгел емес есептерді құрастыру.....	19

### Аспан механикасының, жұлдыздар жүйесінің және ядролық астрофизика мәселелері

<i>Дубовиченко С.Б., Буркова Н.А., Джазаиров-Кахраманов А.В., Ткаченко А.С., Бейсенов Б.У., Мукаева А.Р.</i> Радиациялық ${}^3\text{He}{}^4\text{He}$ басып алу астрофизикалық S-факторы.....	25
<i>Ибраимова А.Т.</i> Жұлдызды шоғырлардың сандық үлгілеріндегі жарқырағыштылық кескіні.....	32
<i>Гайсина В.Н., Денисюк Э.К., Валиуллин Р.Р., Кусакин А.В., Шомшекова С.А., Рева И.В.</i> , NGC 5548 Айнымалы сейферт ғаламы.....	41
<i>Демченко Б.И., Воропаев В.А., Комаров А.А., Серебрянский А.В., Усольцева Л.А., Акниязов Ч.Б.</i> , KAZSAT-2 және KAZSAT-3 Қазақстандық байланыс серіктері үшін әлеуетті қауіпті геотұрақты серіктер .....	50
<i>Акниязов Ч.Б.</i> Ғарыштық коқыс бұлтындағы объекттердің соқтығысу ықтималдылығын анықтауды болжауға арналған қысқа және ұзақ мерзімді әдіс.....	57
<i>Серебрянский А.В., Кругов М.А., Валиуллин Р.Р., Комаров А.А., Демченко Б.И., Усольцева Л.А., Акниязов Ч.Б.</i> , Қазақстандағы ассы-түрген обсерваториясының жаңа оптикалық кешені .....	66
<i>Демченко Б.И., Комаров А.А., Кругов М.А., Рева И.В., Серебрянский А.В., Усольцева Л.А.</i> , 2016 жылы Тянь-шань және ассы-түрген обсерваторияларында геостационар серіктерді бақылау нәтижелері.....	74

### Жұлдыздардың және тұмандықтардың зерттеулері

<i>Кондратьева Л.Н., Рспаев Ф.К., Кругов М.А.</i> , PC 12 және M1-46 планеталық тұмандықтардың спектрлік зерттеулері.....	81
<i>Павлова Л.А., Вильковиский Э.Я.</i> Жас жұлдыздарда X-гау эмиссиялар құрылуының негізгі механизмдері .....	90
<i>Павлова Л.А., Вильковиский Э.Я.</i> Хебигтің AeBe қос жұлдыздарынан X-гау эмиссияларды бақылау .....	96
<i>Павлова Л.А.</i> Жас жұлдыздар қабаттарындағы айнымалылықтың құрылымдарын және механизмдерін зерттеу.....	102
<i>Тереценько В.М.</i> , «Жұлдыздардың спектродетекциялық каталогы» O-B-жұлдыздар үшін бақыланатын және есептелген жұлдыздар шамасын және түстерінің көрсеткіштерін салыстыру.....	110
<i>Шестакова Л.И., Рева И.В., Кусакин А.В.</i> WD1145+017 ақ ергежей маңындағы планетоидтардың транзиттік өтуі және олардың термиялық эволюциясы.....	117
<i>Серебрянский А.В., Шестакова Л.И., Рева И.В.</i> WD1145 + 017 ақ ергежейдің жарқырау қисығының талдауы.....	123
<i>Айманова Г.К., Серебрянский А.В., Рева И.В.</i> SDSS 1507 + 52 катаклизмалық айнымаланың фотометрлік зерттеулері.....	129
<i>Тереценько В.М.</i> , Фотометрлік мәліметтер бойынша энергияның спектрлік таралуының абсолютизациясы.....	136
<i>Шестакова Л.И., Демченко Б.И.</i> , Соңғы спектрлік кластардағы жұлдыздар жанында сублимациялану процесінде шаң-тозаңды бөлшектердің орбиталық эволюциясы.....	143
<i>Шомшекова С.А., Рева И.В., Кондратьева Л.Н.</i> , Тянь-Шань Астрономиялық Обсерваториясындағы 1-метрлік телескопқа арналған фотометрлік жүйені стандарттау.....	155

### Күннің және күн жүйесі денелерінің физикасы

<i>Минасянц Г.С., Минасянц Т.М.</i> , Жеделдетілген протондар қуатына корональ шығарулардың соққы толқынының әсері.....	162
<i>Вдовиченко В.Д., Кириенко Г.А.</i> , 2004-2016 жылдары Юпитердің солтүстік және оңтүстік жартышарларында аммиактың жұту жолында асимметрияны зерттеу.....	170
<i>Каримов А.М., Лысенко П.Г., Тейфель В.Г., Филиппов В.А.</i> Юпитердің галилейлік серіктеріндегі өзара бірігулерді және тұтылуды зерттеу (халықаралық бағдарлама РНЕМУ-15). .....	179
<i>Тейфель В.Г., Каримов А.М., Лысенко П.Г., Филиппов В.А., Харитоновна Г.А., Хоженец А.П.</i> , Юпитер: көпжылдық бақылаулар бойынша бес негізгі ендік белдіктерінде молекулалық жұтудың вариациясы.....	185
<i>Вдовиченко В.Д., Кириенко Г.А., Лысенко П.Г.</i> 2016 жылы экватор бойында және юпитердің орталық меридианында аммиак және метанның жұту вариациясы. 8 Жұту жолағы үшін салыстырмалы талдау.....	192
<i>Вдовиченко В.Д., Кириенко Г.А., Лысенко П.Г.</i> Юпитер дискісі бойынша аммиакты және метанды жұтудың кеңістікті-уақыттық вариациясы параметрлерінің корреляциялық өзара байланысы және олардың күн қарқындылығы индексімен байланысы .....	204
<i>Серебрянский А.В., Усольцева Л.А., Комаров А.А., Рева И.В.</i> Атмосфералық экстинкцияның лездік мәндері және ауысуы коэффициенттері.....	209



\* \* \*

<i>Ақылбаев М.И., Бесбаев Г.А., Шалданбаев А.Ш.</i> Коэффициенті айнымалы, бірінші ретті кәдімгі дифференциалдық теңдеудің сингуляр әсерленген Коши есебін спектралді таралым әдісі арқылы шешу.....	215
<i>Құдайберген А.Д., Байгісова Қ.Б., Жетпісбаев Қ.У., Алжамбекова Г.Т., Сәрсембаева Б.Д.</i> Нанокұрылымдардың ЖТАӨ қасиеттеріне әсері.....	223
<i>Бесбаев Г.А., Шалданбаев А.Ш., Ақылбаев М.И.</i> Коэффициенттері тұрақты екінші ретті кәдімгі дифференциалдық теңдеудің сингуляр әсерленген Кошилік есебін шешудің операторлық әдісі туралы.....	230
<i>Жақып-тегі К.Б.</i> Гуктың заңы анизотроптық денелердің серпілімдік теориясында.....	241
<i>Қабылбеков К.А., Аширбаев Х.А., Абдрахманова Х.К., Джумагалиева А.И., Қыдырбекова Ж.Б.</i> MATLAB бағдарламалық пакетін қолданып «Тікбұрыш екі диэлектрик жазықтық ішінде орналасқан ұзын, зарядталған өткізгіштен құралған жүйенің электр өрісін модельдеу» атты зертханалық жұмысты орындауды ұйымдастыру ....	252
<i>Қабылбеков К.А., Саидахметов П.А., Омашова Г.Ш., Тоқжигитова А.А., Абдикерова Ж.Р.</i> Айнымалы ток тізбегіндегі индуктивті катушканың реактивті кедергісінің тоқ жиілігіне тәуелдігін зерттеуге арналған компьютерлік зертханалық жұмысты ұйымдастыру.....	259
<i>Нысанбаева С.Қ., Тұрлыбекова Г.Қ., Майлина Х.Р., Манабаев Н.К., Омаров Т.К., Мырзашева Ф.Т.</i> Акустикалық интерферометрде конденсирленген орталардағы ультрадыбыстық жұтылу коэффициентін зерттеу.....	266
<i>Сэрээтэр Гульбахыт, Дюсембина Ж.К.</i> Модульдік оқыту технологиясын математика сабағында қолдану.....	274

## СОДЕРЖАНИЕ

<i>Сайдуллаева Н.С., Кабылбеков К.А., Пазылова Д.Т., Тагаев Н.С., Каликулова А.О.</i> Организация выполнения компьютерной лабораторной работы по исследованию мощности выделяемой на внешней нагрузке электрической цепи.....	5
<i>Асанова А.Т., Аширбаев Х.А., Сабалахова А.П.</i> О Нелокальной задаче для системы интегро-дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа.....	11
<i>Сайдуллаева Н.С., Кабылбеков К.А., Пазылова Д.Т., Аширбаев Х.А., Каликулова А.О.</i> Конструирование неоднозначных задач и задач с недостающими данными для выполнения компьютерных лабораторных работ .....	19

**Проблемы небесной механики, динамики звездных систем и ядерной астрофизики**

<i>Дубовиченко С.Б., Буркова Н.А., Джазаиров-Кахраманов А.В., Ткаченко А.С., Бейсенов Б.У., Мукаева А.Р.,</i> Астрофизический S-фактор радиационного $^3\text{He}^4\text{He}$ захвата.....	25
<i>Ибраимова А.Т.,</i> Профили светимости в численных моделях звездных скоплений.....	32
<i>Гайсина В.Н., Денисюк Э.К., Валиуллин Р.Р., Кусакин А.В., Шомшекова С.А., Рева И.В.,</i> Переменность сейфертовской галактики NGC 5548.....	41
<i>Демченко Б.И., Воропаев В.А., Комаров А.А., Серебрянский А.В., Усольцева Л.А., Акниязов Ч.Б.,</i> Геостационарные спутники, потенциально опасные для Казахских спутников связи KAZSAT-2 и KAZSAT-3.....	50
<i>Акниязов Ч.Б.,</i> Коротко-временной и долговременной подход для прогноза определения вероятности столкновения объектов в облаке космического мусора.....	57
<i>Серебрянский А.В., Кругов М.А., Валиуллин Р.Р., Комаров А.А., Демченко Б.И., Усольцева Л.А., Акниязов Ч.Б.,</i> Новый оптический комплекс на обсерватории Ассы-Турген в Казахстане.....	66
<i>Демченко Б.И., Комаров А.А., Кругов М.А., Рева И.В., Серебрянский А.В., Усольцева Л.А.,</i> Результаты наблюдений геостационарных спутников в Тянь-Шанской и Ассы-Тургенской обсерваториях в 2016 году.....	74

**Исследование звезд и туманностей**

<i>Кондратьева Л.Н., Рспаев Ф.К., Кругов М.А.,</i> Спектральные исследования планетарных туманностей PC 12 и M1-46.....	81
<i>Павлова Л.А., Вильковиский Э.Я.,</i> Основные механизмы формирования X-гау эмиссии в молодых звездах.....	90
<i>Павлова Л.А., Вильковиский Э.Я.,</i> Наблюдения X-гау эмиссии от двойных звезд AeVe Хербига.....	96
<i>Павлова Л.А.,</i> Исследование структуры и механизмов переменности в оболочках молодых звезд.....	102
<i>Терецко В.М.,</i> Сравнение наблюдаемых и вычисленных звездных величин и показателей цвета для O-B-звезд «Спектрофотометрического каталога звезд».....	110
<i>Шестакова Л.И., Рева И.В., Кусакин А.В.,</i> Транзитные прохождения планетоидов около белого карлика WD1145+017 и их термическая эволюция.....	117
<i>Серебрянский А.В., Шестакова Л.И., Рева И.В.,</i> Анализ кривой блеска белого карлика WD1145+017.....	123
<i>Айманова Г.К., Серебрянский А.В., Рева И.В.</i> Фотометрические исследования катаклизмической переменной SDSS 1507 + 52 .....	129
<i>Терецко В.М.,</i> Абсолютизация спектрального распределения энергии звезд по фотометрическим данным.....	136
<i>Шестакова Л.И., Демченко Б.И.,</i> Орбитальная эволюция пылевых частиц в процессе сублимации около звезд поздних спектральных классов.....	143
<i>Шомшекова С.А., Рева И.В., Кондратьева Л.Н.,</i> Стандартизация фотометрической системы 1-метрового телескопа ТШАО.....	155

**Физика Солнца и тел солнечной системы**

<i>Минасянц Г.С., Минасянц Т.М.,</i> Влияние ударной волны корональных выбросов на энергию ускоренных протонов... 162	
<i>Вдовиченко В.Д., Кириенко Г.А.,</i> Исследование асимметрии в ходе поглощения аммиака в северном и южном полушариях Юпитера в 2004-2016 годах.....	170
<i>Каримов А.М., Лысенко П.Г., Тейфель В.Г., Филиппов В.А.,</i> Наблюдения взаимных соединений и затмений галилеевых спутников Юпитера (Международная программа RHEMU-15).....	179
<i>Тейфель В.Г., Каримов А.М., Лысенко П.Г., Филиппов В.А., Харитонова Г.А., Хоженец А.П.,</i> Юпитер: вариации молекулярного поглощения в пяти основных широтных поясах по многолетним наблюдениям.....	185
<i>Вдовиченко В.Д., Кириенко Г.А., Лысенко П.Г.</i> Вариации поглощения аммиака и метана вдоль экватора и центрального меридиана юпитера в 2016 году. Сравнительный анализ для 8 полос поглощения.....	192
<i>Вдовиченко В.Д., Кириенко Г.А., Лысенко П.Г.,</i> Корреляционные взаимосвязи параметров пространственно-временных вариаций аммиачного и метанового поглощения по диску Юпитера и их связь с индексом солнечной активности.....	204
<i>Серебрянский А.В., Усольцева Л.А., Комаров А.А., Рева И.В.,</i> Коэффициенты перехода и мгновенные значения атмосферной экстинкции.....	209

\* \* \*

<i>Ақылбаев М.И., Бесбаев Г.А., Шалданбаев А.Ш.</i> Решение сингулярно возмущенной задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка с переменным коэффициентом, методом отклоняющегося аргумента.....	215
<i>Кудайберген А.Д., Байгисова К.Б., Жетписбаев К.У., Алджамбекова Г.Т., Сарсембаева Б.Д.</i> Влияние наноструктуры на свойства ВТСП .....	223
<i>Бесбаев Г.А., Шалданбаев А.Ш., Ақылбаев М.И.</i> Решение сингулярно возмущенной задачи Коши, для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, операторным методом.....	230
<i>Джакупов К.Б.</i> Закон Гука в теории упругости анизотропных тел .....	241
<i>Кабылбеков К.А., Аширбаев Х.А., Абдрахманова Х.К., Джумагалиева А.И., Кыдырбекова Ж.Б.</i> Организация выполнения лабораторной работы «Моделирование электрического поля системы, состоящей из диэлектрического угольника и длинного заряженного проводника» с использованием пакета программ MATLAB.....	252
<i>Кабылбеков К.А., Саидахметов П.А., Омашова Г.Ш., Токжигитова А.А., Абдикерова Ж.Р.</i> Организация выполнения компьютерной лабораторной работы по исследованию зависимости реактивного сопротивления катушки индуктивности от частоты переменного тока.....	259
<i>Нысанбаева С.К., Турлыбекова Г.К., Майлина Х.Р., Манабаев Н.К., Омаров Т.К., Мырзаешева Ф.Т.</i> Исследование коэффициента ультразвукового поглощения в конденсированных средах на акустическом интерферометре .....	266
<i>Сэрээтэр Гульбахыт, Дюсембина Ж.К.</i> Технология модульного обучения на уроках математики.....	274

## CONTENTS

<i>Saidullayeva N.S., Kabyrbekov K.A., Pazylova D.T., Tagaev N.S., Kalikulova A.O.</i> Organization of computer lab work to study the power of an electrical circuit oozed on an exterior loading.....	5
<i>Assanova A.T., Ashirbaev H.A., Sabalakhova A.P.</i> On the nonlocal problem for a system of the partial integro-differential equations of hyperbolic type.....	11
<i>Saidullayeva N.S., Kabyrbekov K.A., Pazylova D.T., Ashirbaev Kh.A., Kalikulova A.O.</i> Designing the ambiguous tasks and tasks with missing data for performance of computer laboratory works.....	19

**Problems of celestial mechanics, dynamics of stellar systems and nuclear astrophysics**

<i>Dubovichenko S. B., Burkova N.A., Dzhezairov-Kakhramanov A.V., Tkachenko A.S., Beisenov B.U., Mukaeva A.R.</i> Astrophysical S-factor for the radiative $^3\text{He}^4\text{He}$ capture.....	25
<i>Ibraimova A.T.</i> Luminosity profiles in numerical models of star clusters.....	32
<i>Gaisina V., Denissyuk E., Valiullin R., Kusakin A., Shomsheikova S., Reva I.</i> Variability of Seyfert galaxy NGC 5548.....	41
<i>Demchenko B. I., Komarov A. A., Serebryansky A. V., Voropaev V. A., Usoltseva L. A., Akniyazov C. B.</i> Geostationary satellites, potentially dangerous for Kazakhstan communication satellites KAZSAT-2 AND KAZSAT-3.....	50
<i>Akniyazov C. B.</i> Short- and long- term approach collision probability of the objects in space debris cloud.....	57
<i>Serebryanskiy A., Krugov M., Valiullin R., Komarov A., Demchenko B., Usoltseva L., Akniyazov Ch.</i> The new optical complex at assy-turgen observatory in Kazakhstan.....	66
<i>Demchenko B. I., Komarov A. A., Krugov M.A., Reva I.V., Serebryansky A.V., Usoltseva L. A.</i> Results of observations of geostationary satellites at Tien Shan and Assy- Turgen astronomical observatory in 2016 .....	74

**The study of stars and nebulae**

<i>Kondratyeva L., Rspaev F., Krugov M.</i> Spectral study of the planetary nebulae PC 12 and M1-46.....	81
<i>Pavlova L.A., Vil'koviskij E.Ya.</i> The main formation mechanisms of X-Ray emission of the young stars.....	90
<i>Pavlova L.A., Vilkoviskij E.Ya.</i> Observations of X-ray emission from binaries herbig AeBe stars.....	96
<i>Pavlova L.A.</i> Investigating of the structure and mechanisms variability in envelopes of young stars.....	102
<i>Tereschenko V. M.</i> The comparison of the observed and calculated magnitudes and color-indexes for O-B-stars of "Spectrophometrical catalogue of stars".....	110
<i>Shestakova L.I., Pesa H.B., Kysakun A.B.</i> Transit passages of planetoids near white dwarf WD1145 + 017 and their thermal evolution.....	117
<i>Serebryanskiy A.V., Shestakova L.I., Reva I.V.</i> Analysis of light curves of the white DWARF .....	123
<i>Aimanova G. K., Serebryanskiy A. V., Reva I.V.</i> Photometric studies of the cataclysmic variable SDSS 1507 + 52.....	129
<i>Tereschenko V. M.</i> The absolutization of spectral energy distribution of stars on spectral and photometric data .....	136
<i>Shestakova L.I., Demchenko B.I.</i> Orbital evolution of dust particles in the sublimation process around stars of late spectral classes .....	143
<i>Shomsheikova S. A., Reva I. V., Kondratyeva L.N.</i> Standardization of the photometric system of the 1-meter telescope on TShAO.....	155

**Physics of the Sun and solar system bodies**

<i>Minasyants G.S., Minasyants T.M.</i> Effect of the shock wave of coronal ejection on the energy of accelerated protons.....	162
<i>Vdovichenko V.D., Kirienko G.A.</i> Ammonia absorption asymmetry along the latitudes of the northern and southern hemispheres of Jupiter from 2004-2016 observations .....	170
<i>Karimov A.M., Lysenko P.G., Tejfel V.G., Filippov V.A.</i> The observations of the Jipiter galilean satellites mutual occultations and eclipses (PHEMU-15 international program).....	179
<i>Tejfel V.G., Karimov A.M., Lysenko P.G., Filippov V.A., Kharitonova G.A., Khozhenetz A.P.</i> Jupiter: variations of the molecular absorption at five main latitudinal belts from longtime observations.....	185
<i>Vdovichenko V.D., Kirienko G.A., Lysenko P.G.</i> The variations of ammonia and methane absorption along the jovian equator and central meridian in 2016. Comparative analysis of the eight absorption bands.....	192
<i>Vdovichenko V.D., Kirienko G.A., Lysenko P.G.</i> Mutual correlations of the parameters of the methane and ammonia absorption spatial-temporal variations over jovian disk and their connections with the solar activity index .....	204
<i>Serebryanskiy A., Usoltseva L., Komarov A., Reva I.</i> The trasformation coefficients and instantaneous values of atmospheric extinction.....	209

\* \* \*

<i>Akylbaev M.I., Besbayev G.A., Shaldanbaev A.Sh.</i> Solution of a singularly perturbed Cauchy problem, for an ordinary differential equation of the first order with a variable coefficient, by the method of a deviating argument.....	215
<i>Kudaibergen A.D., Baigisova K.B., Zhetpisbayev K.U., Aldzhambekova G.T., Sarsembayeva B.D.</i> Effect of nanostructures on HTSC properties .....	223
<i>Besbayev G.A., Shaldanbaev A.Sh., Akylbayev M.I.</i> Solution of a singularly perturbed Cauchy problem, for an ordinary differential equation of the second order with constant coefficients, by the operator method.....	230
<i>Jakupov K.B.</i> Hook's law in the theory of elasticity of anisotropic bodies.....	241
<i>Kabyrbekov K. A., Ashirbaev H.A., Abdrahmanova H. K., Dzhumagalieva A.I., Kydybekova Zh.B.</i> Managing the implementation of laboratory work "Simulation of the electric field of a system consisting of dielectric triangles and long conductor charged" with using MATLAB software package .....	252
<i>Kabyrbekov K.A., Saidahmetov P.A., Omashova G.Sh., Tokzhigitova A.A., Abdikerova Zh.R.</i> The organization of performance of computer laboratory operation on examination of dependence of condensance of inductance coils from frequency of the alternating current.....	259
<i>Nysanbaeva S.K., Turlybekova G.K., Maylina Kh.R., Manabaev N.K., Omarov T.K., Myrzacheva F.T.</i> Research of the ultrasonic absorption coefficient in condensed states on acoustic interferometer.....	266
<i>Sereeter G., Dyusembina Zh.K.</i> Using modular technology at math lesson.....	274

---

**Publication Ethics and Publication Malpractice  
in the journals of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan**

---

For information on Ethics in publishing and Ethical guidelines for journal publication see <http://www.elsevier.com/publishingethics> and <http://www.elsevier.com/journal-authors/ethics>.

Submission of an article to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan implies that the described work has not been published previously (except in the form of an abstract or as part of a published lecture or academic thesis or as an electronic preprint, see <http://www.elsevier.com/postingpolicy>), that it is not under consideration for publication elsewhere, that its publication is approved by all authors and tacitly or explicitly by the responsible authorities where the work was carried out, and that, if accepted, it will not be published elsewhere in the same form, in English or in any other language, including electronically without the written consent of the copyright-holder. In particular, translations into English of papers already published in another language are not accepted.

No other forms of scientific misconduct are allowed, such as plagiarism, falsification, fraudulent data, incorrect interpretation of other works, incorrect citations, etc. The National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan follows the Code of Conduct of the Committee on Publication Ethics (COPE), and follows the COPE Flowcharts for Resolving Cases of Suspected Misconduct ([http://publicationethics.org/files/u2/New\\_Code.pdf](http://publicationethics.org/files/u2/New_Code.pdf)). To verify originality, your article may be checked by the Cross Check originality detection service <http://www.elsevier.com/editors/plagdetect>.

The authors are obliged to participate in peer review process and be ready to provide corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. All authors of a paper should have significantly contributed to the research.

The reviewers should provide objective judgments and should point out relevant published works which are not yet cited. Reviewed articles should be treated confidentially. The reviewers will be chosen in such a way that there is no conflict of interests with respect to the research, the authors and/or the research funders.

The editors have complete responsibility and authority to reject or accept a paper, and they will only accept a paper when reasonably certain. They will preserve anonymity of reviewers and promote publication of corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. The acceptance of a paper automatically implies the copyright transfer to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.

The Editorial Board of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan will monitor and safeguard publishing ethics.

Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайтах:

[www.nauka-nanrk.kz](http://www.nauka-nanrk.kz)

<http://www.physics-mathematics.kz>

**ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)**

Редакторы *М. С. Ахметова, Д.С. Аленов, Т.А. Апендиев*  
Верстка на компьютере *А.М. Кульгинбаевой*

Подписано в печать 27.07.2017.  
Формат 60x881/8. Бумага офсетная. Печать – ризограф.  
17,8 п.л. Тираж 300. Заказ 4.

---

*Национальная академия наук РК*  
*050010, Алматы, ул. Шевченко, 28, т. 272-13-18, 272-13-19*