ISSN 2518-1726 (Online),
ISSN 1991-346X (Print)

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ

Х А Б А Р Л А Р Ы

ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

N E W S

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА
СЕРИЯСЫ**

♦

**СЕРИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ**

♦

**PHYSICO-MATHEMATICAL
SERIES**

6 (316)

**ҚАРАША – ЖЕЛТОҚСАН 2017 Ж.
НОЯБРЬ – ДЕКАБРЬ 2017 г.
NOVEMBER – DECEMBER 2017**

1963 ЖЫЛДЫҢ ҚАҢТАР АЙЫНАН ШЫҒА БАСТАҒАН
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1963 ГОДА
PUBLISHED SINCE JANUARY 1963

ЖЫЛЫНА 6 РЕТ ШЫҒАДЫ
ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД
PUBLISHED 6 TIMES A YEAR

АЛМАТЫ, ҚР ҰҒА
АЛМАТЫ, НАН РК
ALMATY, NAS RK

«ҚР ҰҒА Хабарлары. Физика-математикалық сериясы».

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Меншіктенуші: «Қазақстан Республикасының Ұлттық ғылым академиясы» РҚБ (Алматы қ.)
Қазақстан республикасының Мәдениет пен ақпарат министрлігінің Ақпарат және мұрағат комитетінде 01.06.2006 ж. берілген **№5543-Ж** мерзімдік басылым тіркеуіне қойылу туралы куәлік

Мерзімділігі: жылына 6 рет.
Тиражы: 300 дана.

Редакцияның мекенжайы: 050010, Алматы қ., Шевченко көш., 28, 219 бөл., 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,
www:nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

Типографияның мекенжайы: «Аруна» ЖК, Алматы қ., Муратбаева көш., 75.

«Известия НАН РК. Серия физико-математическая».

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы)
Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации и архивов Министерства культуры и информации Республики Казахстан **№5543-Ж**, выданное 01.06.2006 г.

Периодичность: 6 раз в год.
Тираж: 300 экземпляров.

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, ком. 219, 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,
www:nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75.

News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physical-mathematical series.

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Owner: RPA "National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan" (Almaty)
The certificate of registration of a periodic printed publication in the Committee of information and archives of the Ministry of culture and information of the Republic of Kazakhstan N 5543-Ж, issued 01.06.2006

Periodicity: 6 times a year
Circulation: 300 copies

Editorial address: 28, Shevchenko str., of. 219, 220, Almaty, 050010, tel. 272-13-19, 272-13-18,
www:nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

Address of printing house: ST "Aruna", 75, Muratbayev str, Almaty

N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 6, Number 316 (2017), 85 – 95

K.B.Jakupov

Institute of mathematics and mathematical modeling, Almaty, Kazakhstan.
E-mail: jakupovKB@mail.ru

REPRESENTATION OF THE METHOD OF THE FICTION AREAS IN HYDRODYNAMICS

Annotation. The question of the representative application of the method of fictitious domains for numerical calculations of flows of a viscous incompressible fluid with use in the fictitious domain of an artificially formed system of equations of dynamics with a small parameter in the denominator and tending to zero is considered. It was investigated on a number of examples of linear differential equations of the influence of a small parameter on the convergence of the solution. The problems of establishing adequate initial and boundary conditions in a fictitious area are singled out. Specific examples with differential equations with a small parameter are given, which theoretically show the divergence of solutions as the small parameter tends to zero. Numerical calculations of flows of a viscous incompressible fluid in a channel with an internal shoulder for two types of artificial fictitious regions directly and exhaustively showed the falsity of the method of fictitious regions.

Keywords: equations, fictitious, region, parameter, representation.

УДК 519.6, 532.516

К.Б. Джакупов

Институт математики и математического моделирования МОН РК, Алматы, Казахстан

РЕПРЕЗЕНТАТИВНОСТЬ МЕТОДА ФИКТИВНЫХ ОБЛАСТЕЙ В ГИДРОДИНАМИКЕ

Аннотация. Рассматривается вопрос о репрезентативном применении метода фиктив- ных областей для численных расчетов течений вязкой несжимаемой жидкости с использованием в фиктивной области искусственно образованной системы уравнений динамики с малым параметром, стоящем в знаменателе и стремящемся к нулю. Исследовано на ряде примеров линейных дифференциальных уравнений влияния малого параметра на сходимость решения. Выделены проблемы постановки адекватных начальных и краевых условий в фиктивной области. Приведены конкретные примеры с дифференциальными урав- нениями с малым параметром, теоретически показывающие расходимость решений при стремлении малого параметра к нулю. Численные расчеты течений вязкой несжимаемой жидкости в канале с внутренним уступом для двух типов искусственных фиктивных областей непосредственно и исчерпывающе показали фальшивость метода фиктивных областей.

Ключевые слова: уравнения, фиктивная, область, параметр, репрезентативность.

Идею введения искусственно образованных *фиктивных областей* впервые предложил Саульев в [1-2] с целью численного решения параболического уравнения в области с криволинейной границей, «неудобной» для введения прямоугольной сетки, в силу чего фиктивные области должны быть прямоугольными в разностных методах. В гидродинамике [3] метод фиктивных областей (м.ф.о.) был сведен к тому, что на границе фиктивной области ошибочно поставили *нулевые* краевые условия для давления и скорости в задачах гидродинамики с целью перевода задачи Неймана для давления в задачу Дирихле. *Нулевые* краевые условия для давления противоречат физике течения жидкости в том смысле, что в уравнения динамики жидкости входит градиент давления, в силу чего давление определяется с точностью до аддитивной функции в нестационарных течениях и с точностью до произвольной константы в стационарных. Кроме указанного, фальшивость м.ф.о. состоит в том, что произвольно стыкуются решения двух самостоятельных начально-краевых задач для различных по существу систем дифференциальных урав- нений в частных производных, затем решение задачи в фиктивной нефизической области используется в основной исходной задаче гидродинамики в численных расчетах, что явным образом приводит к искажению решения основного уравнения в физической области.

Идея м.ф.о. в гидродинамике такова [3]. Пусть в физической области D с границей S необходимо численно решить начально-краевую задачу для уравнений Навье несжимаемой жидкости

$$\rho[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}]+\nabla p=\mu\Delta\mathbf{v}+\rho\mathbf{F}, \nabla\cdot\mathbf{v}=0, \mathbf{v}\big|_{t=0}=\mathbf{d}, \mathbf{v}\big|_{S}=\Phi \tag{1}$$

С данной целью в м.ф.о. физическая область D расширяется присоединением *фиктивной произвольной* области D_ε со своей границей S_ε, в кото- рой решается *искусственно* сформулированная задача [3] с нулевыми краевыми условиями для давления и компонент скорости:

$$\rho[\frac{\partial \mathbf{v}_\varepsilon}{\partial t}+(\mathbf{v}_\varepsilon\cdot\nabla)\mathbf{v}_\varepsilon]+\nabla p_\varepsilon=\mu\Delta\mathbf{v}_\varepsilon+\rho\mathbf{F}_\varepsilon-\frac{\mathbf{v}_\varepsilon}{\varepsilon}, \tag{2}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{v}_\varepsilon=0, \mathbf{v}_\varepsilon\big|_{t=0}=\mathbf{d}_\varepsilon, \mathbf{v}_\varepsilon\cdot\tau\big|_{S_\varepsilon}=0$$

Здесь особое внимание привлекает *дополнительный член* $\frac{\mathbf{v}_\varepsilon}{\varepsilon}$ *в системе* (2), где стоящий в знаменателе малый параметр стремится к нулю: $\varepsilon\to 0$!

Казалось бы, одного вида уравнения (2) достаточно для того чтобы забраковать м.ф.о. Очевидно, что ε - уравнение (2) совершенно **не совпадает с уравнением *Навье*** (1) при малом параметре $\varepsilon\to 0$, но стремится к нему при противоположно большом значении параметра $\varepsilon\to\infty$. Сразу же возникают следующие вопросы.

***Вопрос* 1**. Чему должно быть равно конкретное численное значение малого параметра (размерность [ε] = кг/($м^3$с))? Каковы критерии его выбора?

Он не может быть равным нулю. Если положить ε = 0, то *фиктивная* задача (2) переходит в тривиальное равенство

$$\mathbf{v}_\varepsilon=0 \tag{3}$$

на всей *фиктивной* области D_ε, следовательно, не будет необходимости в начально-краевой ε - задаче (2). В то же время, очевидно, что продолжение решения исходной *действительной* задачи (1) в фиктивную область D_ε будет ненулевым

$$\mathbf{v}\big|_{D_\varepsilon}\neq 0, \tag{4}$$

т.е. получается противоречие с (3).

***Вопрос* 2.** Если $\varepsilon\neq 0$, то каким краевым условием должен обладать вектор скорости $\mathbf{v}\big|_{S_\varepsilon}=\Phi_\varepsilon$ на границе S_ε, т.е. как должен быть выбран вектор Φ_ε для того чтобы решение *фиктивной* ε - задачи совпало с продолжением решения исходной физически *действительной* задачи (1) ? При несовпадении решений задач (1) и (2) в области D_ε использование “м.ф.о.” в ко- нечно-разностных методах с введением общей сеточной области **теряет смысл.** В дополнение к этим вопросам приведенных ниже контрпримеров будет достаточно, чтобы понять фальшивость “метода фиктивных областей”.

Контрпример 1. Рассмотрим проблему “м.ф.о.” с точки зрения второго закона Ньютона. Для этого уравнение динамики вязкой жидкости (1) запишем с помощью субстанциональной производной по времени

$$\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}+\nabla p=\mu\Delta\mathbf{v}+\rho\mathbf{F}, \tag{5}$$

умножая это уравнение на элементарный объем $\delta\tau$ приходим к формулировке второго закона *Ньютона* для массы $\delta m=\rho\delta\tau$:

$$\delta m\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\mathbf{f}\ , \tag{6}$$

$\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ - ускорение, $\mathbf{f}=(-\nabla p+\mu\Delta\mathbf{v}+\rho\mathbf{F})\delta\tau$ - главная сила.

Умножение на $\delta\tau$ уравнения динамики в системе (2), по аналогии с выражением (6), дает второй закон Ньютона в виде

$$\delta m\frac{d\mathbf{v}_\varepsilon}{dt}=\mathbf{f}_\varepsilon-\frac{\mathbf{v}_\varepsilon}{\varepsilon}\delta\tau, \tag{7}$$

где последний член $\frac{\mathbf{v}_\varepsilon}{\varepsilon}\delta\tau$ определяет реактивную силу трения, которая стремится к бесконечно большим значениям, так как $\varepsilon\to 0$. Получается в силу (7), что в фиктивной области на частицы жидкости действуют бесконечно большие пропорциональные скорости силы, зависящие от малого параметра ε. Дело в том, что сила $\mathbf{F}_{тр}=-k\mathbf{v}$ образует закон трения Ньютона [4-5] и переходит в уравнениях Навье в диссипативный член $\mu\Delta\mathbf{v}$.

Контрпример 2. Начнем с простейшего обыкновенного дифференциаль- ного уравнения первого порядка

$$y'=y,\ \ y(0)=1\ , \tag{8}$$

Условимся, что решение задачи *Коши* (1) ищется в *действительной* области $0\le x<\infty$. Точное тривиальное решение задачи (8) очевидно:

$$y(x)=e^x \tag{9}$$

Пусть область $-\infty<x\le 0$ согласно идее “м.ф.о.” будет *фиктивной* областью. По аналогии с (2) эта задача (8) стыкуется с ε - задачей

$$y'_\varepsilon=y_\varepsilon-\frac{1}{\varepsilon}y_\varepsilon, y_\varepsilon(0)=1 \tag{10}$$

Решение задачи Коши (10) имеет вид

$$y_\varepsilon=e^{(1-\frac{1}{\varepsilon})x} \tag{11}$$

Заметим, что начальное условие $y_\varepsilon(0)=1$ в (10) выполняется решением (11) при любом $\varepsilon\ne 0$. При $\varepsilon\to 0$ решение (11) в точке *x=0* будет иметь неопределенность в показателе степени

$$y_\varepsilon(0)=e^{\frac{0}{\varepsilon\to 0}} \tag{11'}$$

Таким образом, в “м.ф.о.” возникает проблема постановки начальных условий при $\varepsilon\to 0$.

Теорема 1. **При** $\varepsilon\to 0$ **решение** (11) **фиктивной задачи Коши (10) может на сколь угодно большую величину отличаться от продолжения в фиктивную область действии-тельного решения** (9) **исходной задачи** (8).

Доказательство. Положим $x=-b^2\in(-\infty,0],b\neq 0$. Для данной произ- вольной точки из фиктивной области решение (11) “фиктивной” задачи равно

$$y_\varepsilon(-b^2)= e^{(1-\frac{1}{\varepsilon})x}=e^x e^{-\frac{x}{\varepsilon}}=e^{-b^2}e^{-\frac{(-b^2)}{\varepsilon}}=e^{-b^2}e^{\frac{b^2}{\varepsilon}}=y(-b^2)e^{\frac{b^2}{\varepsilon}}, \qquad (12)$$

где $y(-b^2)$ - продолжение действительного решения (9) в фиктивную область $(-\infty,0]$. Составим отношение:

$$\frac{y_\varepsilon(-b^2)}{y(-b^2)}=e^{\frac{b^2}{\varepsilon}}, \qquad (13)$$

по которому видно, что при $\varepsilon\to 0$ решение (11) $y_\varepsilon(-b^2)$ отличается от продолжения точного решения (9) $y(-b^2)$ в фиктивную область на сколь угодно большую величину, т.к. $e^{\frac{b^2}{\varepsilon}}\to\infty$ стремится к бесконечности,

Рассмотрим их разность в действительной области.

Пусть $x=b^2\in[0,\infty),b\neq 0\cdot$

Тогда из равенств

$$y_\varepsilon(b^2)=e^{(1-\frac{1}{\varepsilon})x}=e^x e^{-\frac{x}{\varepsilon}}=e^{b^2}e^{-\frac{b^2}{\varepsilon}}=y(b^2)e^{-\frac{b^2}{\varepsilon}}$$

вытекает, что и в действительной области различие между решениями (9) и (11) при $\varepsilon\to 0$ становится сколь угодно большим, ибо $e^{-\frac{b^2}{\varepsilon}}\to 0$ и фиктивное решение стремится к нулю $y_\varepsilon(b^2)\to 0$, в то время как действительное решение отлично от нуля $y(b^2)\neq 0$. В данном примере решение (9) исходной задача Коши (8) так и решение (11) задачи “м.ф.о.” (10) точно удовлетворяют начальному условию $y_\varepsilon(0)=1$, $y(0)=1$.

Контрпример 3. Рассмотрим другой пример неоднородного уравнения

$$y'=y+1,\ y(0)=0, \qquad (14)$$

точное решение которого есть

$$y(x)=e^x-1 \qquad (15)$$

Условимся, что решение задачи Коши (14) ищется в *действительной* области $0\leq x<\infty$. Пусть отрицательная область $-\infty<x\leq 0$ согласно м.ф.о. будет *фиктивной* областью. По аналогии с (2) эта задача (14) стыкуется с ε-задачей

$$y'_\varepsilon=y_\varepsilon-\frac{1}{\varepsilon}y_\varepsilon+1,y_\varepsilon(0)=0 \qquad (16)$$

Решение задачи Коши (16) имеет вид

$$y_\varepsilon= e^{(1-\frac{1}{\varepsilon})x}-1/(1-\frac{1}{\varepsilon}) \qquad (17)$$

Решение фиктивной задачи (17) приближенно удовлетворяет начальному условию для $\varepsilon\neq 0$

$$y_\varepsilon(0)=1-1/(1-\frac{1}{\varepsilon}) \qquad (18)$$

При $\varepsilon \to 0$, аналогично (11'), возникает неопределенность в показателе степени $y_\varepsilon(0) = e^{-\frac{0}{\varepsilon\to 0}} - 1/(1-\frac{1}{\varepsilon \to 0})$ (18') Положим $x = -b^2 \in (-\infty, 0]$. Решение (17) в данной точке равно

$$y_\varepsilon(-b^2) = e^{-b^2} e^{\frac{b^2}{\varepsilon}} - 1/(1-\frac{1}{\varepsilon}) = (e^{-b^2} - 1)e^{\frac{b^2}{\varepsilon}} + e^{\frac{b^2}{\varepsilon}} - 1/(1-\frac{1}{\varepsilon}) =$$

$$= y(-b^2)e^{\frac{b^2}{\varepsilon}} + e^{\frac{b^2}{\varepsilon}} - 1/(1-\frac{1}{\varepsilon}), \qquad (19)$$

здесь $y(-b^2)$ есть продолжение в фиктивную область действительного решения (15). Из (19) видна *бесконечно большая разность* при $\varepsilon \to 0$ между фиктивным решением $y_\varepsilon(-b^2)$ и действительным решением (15) $y(-b^2)$.

В контрпримерах 2 и 3 показано, что решения м.ф.о. при $\varepsilon \to 0$ могут отличаться на сколь угодно большую величину от продолжения в фиктивную область действительного решения в силу (13) и (19), а ведь именно эти решения в фиктивной области используются в сеточных методах в качестве дополнительных условий для исходной задачи в действительной области.

Контрпример 4. Покажем несостоятельность "м.ф.о." на течении вязкой несжимаемой жидкости в канале с параллельными стенками (течение Пуазейля), то есть для краевой задачи. Для данного течения из уравнений Навье следует:

$$\mu \frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{dp}{dx} \qquad (20)$$

Точное решение данного уравнения:

$$u = -\frac{1}{2\mu} \cdot \frac{dp}{dx}(b^2 - y^2), \ \frac{dp}{dx} = const < 0, \qquad (21)$$

$$u(b) = u(-b) = 0 \qquad (22)$$

В фиктивной области D_ε по "м.ф.о." решается ε - уравнение

$$\frac{dp}{dx} = \mu \frac{d^2 u_\varepsilon}{dy^2} - \frac{1}{\varepsilon} u_\varepsilon, \qquad (23)$$

Точное решение уравнения (23) в физической области D при краевых условиях (22):

$$u_\varepsilon = -\varepsilon \cdot \frac{dp}{dx}\{1 - \frac{e^{(\frac{1}{\varepsilon\mu})^{\frac{1}{2}} \cdot y} + e^{-y(\frac{1}{\varepsilon\mu})^{\frac{1}{2}}}}{e^{b(\frac{1}{\varepsilon\mu})^{\frac{1}{2}}} + e^{-b(\frac{1}{\varepsilon\mu})^{\frac{1}{2}}}}\} \qquad (24)$$

Разность решений между (22) и (24)

$$\left|u(y)-u_{\varepsilon}(y)\right|=-\frac{dp}{dx}\left|\frac{1}{2\mu}(b^2-y^2)+\varepsilon(1-\frac{e^{y(\frac{1}{\varepsilon\mu})^{\frac{1}{2}}}+e^{-y(\frac{1}{\varepsilon\mu})^{\frac{1}{2}}}}{e^{b(\frac{1}{\varepsilon\mu})^{\frac{1}{2}}}+e^{-b(\frac{1}{\varepsilon\mu})^{\frac{1}{2}}}})\right| \qquad (25)$$

показывает, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left|u(y)-u_{\varepsilon}(y)\right|\neq 0,$ то есть при $\varepsilon\to 0$

фиктивное решение $u_{\varepsilon}(y)$ не стремится к *действительному* решению $u(y)$. Теперь рассмотрим решение уравнения (23) в фиктивной области D_{ε}. Согласно м.ф.о.” (2) на границе S_{ε} фиктивной области D_{ε} ставится однородное краевое условие $u_{\varepsilon}(-y_H)=0$, кроме этого на границе физической области дано $u_{\varepsilon}(-b)=0.$ Для данных краевых условий точное решение уравнения (23) в фиктивной области имеет следующий вид:

$$u_{\varepsilon}=-\varepsilon\cdot\frac{dp}{dx}\left[1-\frac{e^{(\frac{1}{\varepsilon\mu})^{\frac{1}{2}}\cdot(y+\frac{b}{2}+\frac{y_H}{2})}+e^{-(y+\frac{b}{2}+\frac{y_H}{2})\cdot(\frac{1}{\varepsilon\mu})^{\frac{1}{2}}}}{e^{(\frac{y_H}{2}-\frac{b}{2})\cdot(\frac{1}{\varepsilon\mu})^{\frac{1}{2}}}+e^{-(\frac{y_H}{2}-\frac{b}{2})\cdot(\frac{1}{\varepsilon\mu})^{\frac{1}{2}}}}\right] \qquad (26)$$

Аналогично (25) разность решений (21) и (26) в фиктивной области D_{ε} не стремится к нулю при $\varepsilon\to 0$. Отсюда следует вывод, что решение (26) в фиктивной области не сходится к решению уравнения Навье (21), поэтому в нефизической фиктивной области D_{ε} не должно применяться ε – уравнение.

Очевидный факт, точное решение уравнения Навье (21) на границе “$-y_H$” $\in S_{\varepsilon}$ фиктивной области не равно нулю

$$u(-y_H)=-\frac{1}{2\mu}\cdot\frac{dp}{dx}(b^2-y_H^2)\neq 0, \qquad (27)$$

поэтому однородное краевое условие $u_{\varepsilon}(-y_H)=0$ м.ф.о. (2) полностью противоречит точному решению (21), согласно которому $u(-y_H)\neq 0$, что видно из рисунка. Итак, в данном примере решение (26) в фиктивной области D_{ε} на сколь угодно большую величину отличается от продолжения решения (21) в эту область, поэтому указанное неравенство граничных значений

$$u_{\varepsilon}(-y_H)=0, u(-y_H)\neq 0, u_{\varepsilon}(-y_H)\neq u(-y_H) \qquad (28)$$

доказывает **бессмысленность применения м.ф.о. (2) в задачах гидродинамики.**

На данном гидродинамическом **контрпримере 4** убедительно показана проблема постановки адекватных продолжению в фиктивную (заграничную) область решению (27) граничных условий для фиктивной задачи (23), потому что однородное краевое условие $u_\varepsilon(-y_H) = 0$ "м.ф.о." (2) оказалось ошибочным. В данном примере рассмотрена простейшая область, причем здесь известно классическое аналитическое решение (21) действительной задачи, благодаря чему известно точное краевое условие (27).

При решении пространственных задач, где заранее не известно аналитическое решение типа (21), сложность, откровенно говоря, *неразрешимость* проблемы постановки граничных условий на фиктивной границе S_ε, не совпадающей с действительной границей S, в пространственных задачах гидродинамики неоспоримо очевидна.

Данные контрпримеры есть доказательство того, что верна

Теорема 2. **При $\varepsilon \to 0$ решение фиктивной задачи в фиктивной области не будет совпадать с продолжением решения в фиктивную область действительной задачи.**

Основная цель "м.ф.о." заключается в использовании решения фиктивной задачи в фиктивной области как дополнительных краевых условий в сеточных методах решения исходной основной задачи. Контрпримеры и теорема доказывают ошибочность и непригодность "м.ф.о." к решению уравнений гидродинамики в нестандартных областях.

Теорема 3. **При $\varepsilon \to \infty$ решение фиктивной задачи**

$$\rho[\frac{\partial \mathbf{v}_\varepsilon}{\partial t} + (\mathbf{v}_\varepsilon \cdot \nabla)\mathbf{v}_\varepsilon] + \nabla p_\varepsilon = \mu \Delta \mathbf{v}_\varepsilon + \rho \mathbf{F}_\varepsilon - \frac{\mathbf{v}_\varepsilon - \Phi}{\varepsilon},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_\varepsilon = 0, \mathbf{v}_\varepsilon \Big|_{t=0} = \mathbf{d}_\varepsilon, \mathbf{v}_\varepsilon \Big|_{S_\varepsilon} = \Phi_\varepsilon$$

в фиктивной области не будет совпадать с продолжением решения в фиктивную область действительной задачи:

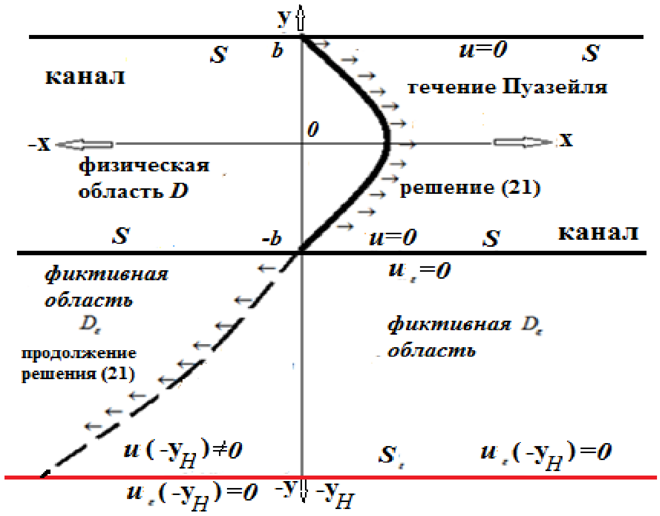
$$\rho[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}] + \nabla p = \mu \Delta \mathbf{v} + \rho \mathbf{F}, \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \mathbf{v}\big|_{t=0} = \mathbf{d}, \mathbf{v}\big|_S = \Phi$$

Доказательство теоремы опирается на предыдущие результаты и на здравый смысл, заключающийся в *абсолютной невозможности* поставить такие начальное и граничное условия

$$\mathbf{v}_\varepsilon \Big|_{t=0} = \mathbf{d}_\varepsilon, \mathbf{v}_\varepsilon \Big|_{S_\varepsilon} = \Phi_\varepsilon$$

в фиктивной задаче, при которых решение фиктивной задачи точно совпало бы с продолжением в фиктивную область решения исходной действительной задачи (*см.* (28)). Понятно, что если не будет требуемого точного совпадения, то решение фиктивной задачи, привлеченное как дополнительное условие, **сфальшивит решение** действительной задачи, что неприемлемо.

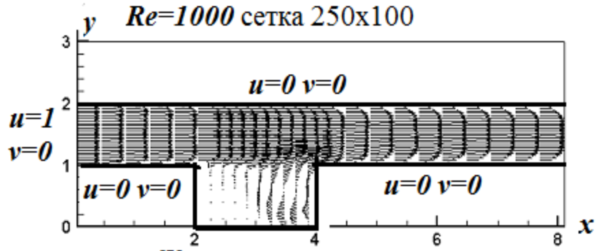
Предложение. В задачах о течениях в областях с твердой криволинейной границей более приемлемым является экстраполирование на узлы сетки в фиктивной области значений, полученных в узлах действительной области, причем для экстраполирования можно применять алгоритмы *сплайн-функций*, а давление должно вычисляться из уравнения неразрывности [4-5]. Это гораздо проще и экономичнее, чем решение в фиктивной области громоздкой, не соответствующей законам физики, системы надуманных уравнений с необоснованными начально-краевыми условиями.



Фальшивость метода фиктивной области в гидродинамике убедительно подверждена следующими расчета течения вязкой несжимаемой жидкости в канале с внутренним уступом. Рассмотрены 2 типа фиктивной области: узкая и широкая, в силу искусственности и произвольности образования фиктивных областей.

Течение в канале с уступом

1^{o}. Узкая фиктивная область

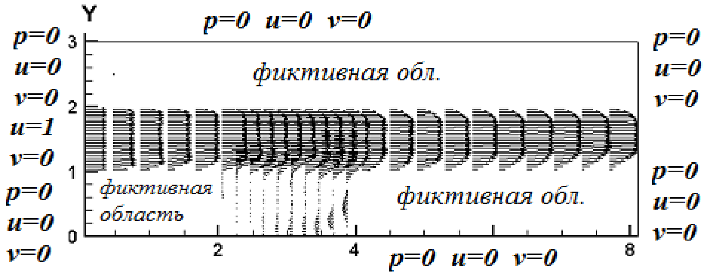


$$\rho[\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}+(\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V}]+\nabla P=\mu\Delta\mathbf{V}+\rho\mathbf{F},\quad \nabla\cdot\mathbf{V}=0$$

Фиг. 1

Фиг. 1 представляет поле вектора скорости, рассчитанное непосредственно в физической области. Фиг. 2 представляет поле вектора скорости, рассчитанное по м.ф.о. . К физической области течения присоединяется фиктивная область, на границе которой давление и компоненты скорости равны нулю. На фиг. 3 линии тока в физической области с образованием кругового течения в уступе. На фиг. 4 линии тока, полученные по методу фиктивной области.

$$\rho[\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}+(\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V}]+\nabla P=\mu\Delta\mathbf{V}+\rho\mathbf{F}-\frac{\mathbf{V}}{\varepsilon},\quad \nabla\cdot\mathbf{V}=0$$



Фигура 2

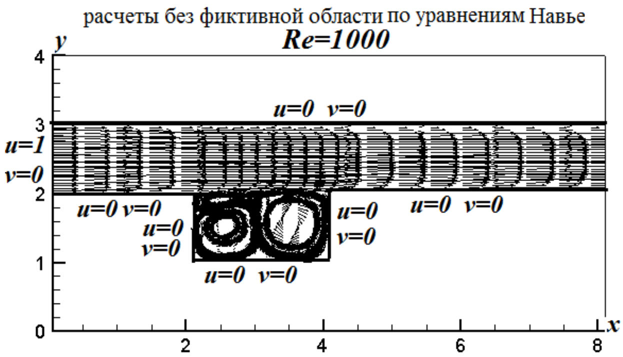
$$\rho[\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}+(\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V}]+\nabla P=\mu\Delta\mathbf{V}+\rho\mathbf{F},\quad \nabla\cdot\mathbf{V}=0$$

Фигура 3

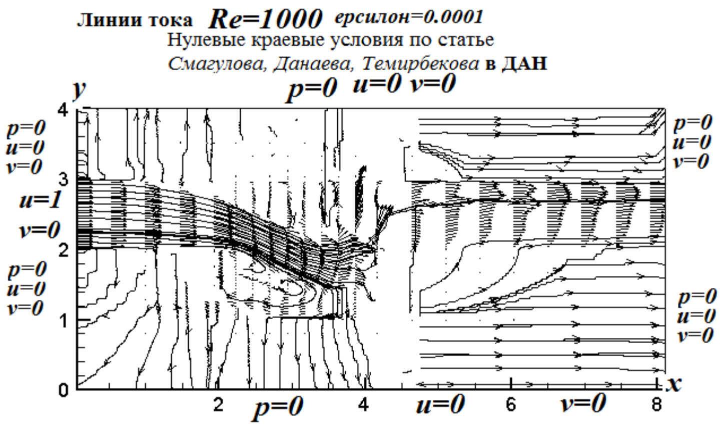
$$\rho[\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}+(\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V}]+\nabla P=\mu\Delta\mathbf{V}+\rho\mathbf{F}-\frac{\mathbf{V}}{\varepsilon},\quad \nabla\cdot\mathbf{V}=0$$

Фигура 4

2°. Широкая фиктивная область



Фигура 5



Фигура 6

Различия между результатами фиг. 1, 2, 3, 4, 5, 6 поразительные, что подтверждает справедливость вышеизложенных теорем и фальшивость м.ф.о. Линии тока по методу фиктивных областей на фиг. 4 и 6 противоречат действительным линиям тока на фиг. 3 и 5.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Саульев В.К. Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток. – М.: Физмат-из, 1960г.С.243.

[2] Вабищевич П.Н. Метод фиктивных областей в задачах математической физики. – М.: Изд-во МГУ, 1991г.С.156.

[3] Смагулов Ш., Данаев Н.Т., Темирбеков Н.М. Моделирование краевых условий для давления и полного напора в задачах гидродинамики с помощью метода фиктивных областей// ДАН, 2000г., том 374, № 3, с. 333-335.

[4] Jakupov K.B. RHEOLOGICAL LAWS OF VISCOUS FLUID DYNAMICS // Известия НАН РК, сер.физ.-мат., 1(293), январь-февраль 2014г.с.51-55.

[5] Джакупов К.Б. Коррекции теоретических парадоксов механики сплошной среды.-А: Типография «Ғылым Ордасы», 2016г. 431с

[6] Орунханов М.К. Докторская диссертация. – Алматы: КазНУ им.Аль-Фараби, 2000г.

[7] Джакупов К.Б. Моделирование термобародиффузий с химическими реакциями в жидкостях и газах // Известия НАН РК, серия физ.-мат., 6(310), ноябрь-декабрь. 2016 г.с.80-88.

[8] Джакупов К.Б. О $k-\varepsilon$, LES, Рейнольдси и степенных моделях // Известия НАН РК, серия физ.-мат.,1(311) январь-февраль 2017 г.с.144-159.

[9] Jakupov K.B. About gipotese of Stokes and rheological laws. -Almaty "Gylym Ordasy", P.172.

[10] U.Piomelli. Large-eddy simulation: achievements and challengs // Progress in Aerospace Sciences 35 (1999) 335-362.

[11] Spalart P. R.: Strategies for turbulence modelling and simulations, Int.J. Heat Fluid Flow, 21, pp. 2, (2000).

[12] Strelets, M.: Detached Eddy Simulation of massively separated flows. AIAA Paper 2001-879, (2001).

[13] Menter, F.R., Egorov, Y, (2010): The Scale-Adaptive Simulation Method for Unsteady Turbulent Flow Predictions. Part 1: Theory and Model Description, J. Flow Turbulence and Combustion, Vol. 85, No. 1

[14] Egorov, Y, Menter, F.R. and Cokljat D.: Scale-Adaptive Simulation Method for Unsteady Flow Predictions. Part 2: Application to Aerodynamic Flows, companion paper, J. Flow Turbulence and Combustion, Vol. 85, No. 1.

[15] Rotta J. C.: *Turbulente Strömumgen*. BG Teubner Stuttgart, (1972).

REFERENCES

[1] Sauliev V.K. Integration of parabolic equations by the grid method. - Moscow: Fizmat-out, **1960**. P.243.

[2] Vabishchevich PN Method of fictitious domains in problems of mathematical physics. - Moscow: Izd-vo MGU, **1991.** P.156.

[3] Smagulov Sh., Danaev NT, Temirbekov NM Simulation of boundary conditions for Pressure and total pressure in problems of hydrodynamics using the method of fictitious Regions // DAN, **2000**, volume 374, No. 3, p. 333-335.

[4] Jakupov K.B. RHEOLOGICAL LAWS OF VISCOUS FLUID DYNAMICS // Proceedings of the NAS of RK, ser.fiz.-mat., 1 (293), January-February **2014** g.s.51-55.

[5] Dzhakupov K.B. Corrections of theoretical paradoxes of continuum mechanics. -A: Printing house «Kylim Ordasy», **2016**g. 431c.

[6] Orunkhanov M.K. Doctoral dissertation. - Almaty: KazNU named after Al-Farabi, **2000.**

[7] Dzhakupov K.B. Modeling of thermobarodiffusion with chemical reactions in Fluids and gases // Izvestiya NAS RK, series of Physics and Mathematics, 6 (310), November-December **2016** g.80-88.

[8] Dzhakupov K.B. About, LES, Reynoldsi and power models // Izvestiya NAS RK, series of Physics and Mathematics, 1 (311) January-February **2017**, p.144-159.

[9] Jakupov K.B. About gipotese of Stokes and rheological laws. – Almaty: "Gylym Ordasy", P.172.

[10] U.Piomelli. Large-eddy simulation: achievements and challengs // Progress in Aerospace Sciences 35 (**1999**) 335-362.

[11] Spalart P. R.: Strategies for turbulence modelling and simulations, Int.J. Heat Fluid Flow, 21, pp. 2, (**2000**).

[12] Strelets, M.: Detached Eddy Simulation of massively separated flows. AIAA Paper 2001-879, (**2001**).

[13] Menter, F.R., Egorov, Y, (**2010**): The Scale-Adaptive Simulation Method for Unsteady Turbulent Flow Predictions. Part 1: Theory and Model Description, J. Flow Turbulence and Combustion, Vol. 85, No. 1

[14] Egorov, Y, Menter, F.R. and Cokljat D.: Scale-Adaptive Simulation Method for Unsteady Flow Predictions. Part 2: Application to Aerodynamic Flows, companion paper, J. Flow Turbulence and Combustion, Vol. 85, No. 1.

[15] Rotta J. C.: *Turbulente Strömumgen*. BG Teubner Stuttgart, (**1972**).

К. Б. Жақып-тегі

ҚР БҒМ Математика және математикалық моделдеу институты, Алматы, Қазақстан

ОЙДАН ШЫҒАРЫЛҒАН АЙМАҚТАР ӘДІСТЕМЕСІНІҢ ГИДРОДИНАМИКАДАҒЫ РЕПРЕЗЕНТАТТЫҒЫ

Аннотация. Қолдан жасалған, бөлшектің астында тұрған және нөлге ұмтылған уақ параметрлі, қозғалыс теңдеулерінің жүйесін ойдан шығарылған аймақта қолдану тұтқырлы сығылмайтын сұйықтықтардың ағыстарын сандық есептеу мәселесінде ойдан шығарылған аймақтар әдістемесінің репрезентаттығы туралы сұрақ қарастырылған. Уақ параметрдің шешімнің шектелуіне әсерлігі сызықты дифференциал теңдеулерінің бір қатар үлгілеріне зерттелген. Бастау және шеттік сәйкес шарттарды ойдан шығарылған аймақта дұрыстап қою мәселесі өрнектелен. Манағы уақ параметр нөлге ұмтылған да шешімнің шектелмейтінін теориялық көрсету үшін уақ параметрлі дифференциал теңдеулерінің нағыз улгілері келтірілген. Ішінде шұқыры бар жырақадағы тұтқырлы сығылмайтын сұйықтың ағысын сандық есептеу ойдан шығарылған аймақтар әдістемесін тіке және болжатпай жалғандығын көрсеткен.

Тірек сөздер: теңдеулер, жалған, аймақ, параметр, репрезентат.

Сведения об авторе:

Джакупов Кенес Бажкенович - доктор физико-математических наук,профессор, академик РАЕ, РГП Институт математики и математического моделирования КМ МОН РК, 050010, ул.Пушкина,125, г.Алматы, Казахстан

Домашний адрес:
050014, мкр. Айнабулак-3, д.158, кв. 20, г.Алматы, Казахстан
Контактные телефоны: 8 727 305 92 44, +7 701 667 88 59
Адрес электронной почты: E-mail: jakupovKB@mail.ru

МАЗМҰНЫ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

Publication Ethics and Publication Malpractice in the journals of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan

For information on Ethics in publishing and Ethical guidelines for journal publication see http://www.elsevier.com/publishingethics and http://www.elsevier.com/journal-authors/ethics.

Submission of an article to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan implies that the described work has not been published previously (except in the form of an abstract or as part of a published lecture or academic thesis or as an electronic preprint, see http://www.elsevier.com/postingpolicy), that it is not under consideration for publication elsewhere, that its publication is approved by all authors and tacitly or explicitly by the responsible authorities where the work was carried out, and that, if accepted, it will not be published elsewhere in the same form, in English or in any other language, including electronically without the written consent of the copyright-holder. In particular, translations into English of papers already published in another language are not accepted.

No other forms of scientific misconduct are allowed, such as plagiarism, falsification, fraudulent data, incorrect interpretation of other works, incorrect citations, etc. The National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan follows the Code of Conduct of the Committee on Publication Ethics (COPE), and follows the COPE Flowcharts for Resolving Cases of Suspected Misconduct (http://publicationethics.org/files/u2/New_Code.pdf). To verify originality, your article may be checked by the Cross Check originality detection service http://www.elsevier.com/editors/plagdetect.

The authors are obliged to participate in peer review process and be ready to provide corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. All authors of a paper should have significantly contributed to the research.

The reviewers should provide objective judgments and should point out relevant published works which are not yet cited. Reviewed articles should be treated confidentially. The reviewers will be chosen in such a way that there is no conflict of interests with respect to the research, the authors and/or the research funders.

The editors have complete responsibility and authority to reject or accept a paper, and they will only accept a paper when reasonably certain. They will preserve anonymity of reviewers and promote publication of corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. The acceptance of a paper automatically implies the copyright transfer to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.

The Editorial Board of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan will monitor and safeguard publishing ethics.

Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайтах:

www:nauka-nanrk.kz

http://www.physics-mathematics.kz

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Редакторы *М. С. Ахметова, Т.А. Апендиев*
Верстка на компьютере *А.М. Кульгинбаевой*

Подписано в печать 20.12.2017.
Формат 60х881/8. Бумага офсетная. Печать – ризограф.
11,2 п.л. Тираж 300. Заказ 6.

Национальная академия наук РК
050010, Алматы, ул. Шевченко, 28, т. 272-13-18, 272-13-19