

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ  
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ

# ХАБАРЛАРЫ

---

---

# ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК  
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

СЕРИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

**2 (282)**

НАУРЫЗ–СӘУІР 2012 ж.  
МАРТ–АПРЕЛЬ 2012 г.

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1963 ГОДА

ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД

АЛМАТЫ  
НАН РК  
ҒЫЛЫМ

Бас редактор  
ҚР ҰҒА академигі  
**Б. Т. Жұмағұлов**

Редакция алқасы:

физика-математика ғылымдарының докторы **Н. М. Темірбеков** (бас редактордың орынбасары), ҚР ҰҒА-ның академиктері **М. М. Әбділдин, Т. Ш. Калменов, Н. Қ. Блиев, В. И. Дробжев, Қ. Ә. Қасымов, Б. Н. Мұқашев, М. Ө. Өтелбаев**, физика-математика ғылымдарының докторы **Қ. Қ. Қадыржанов**, физика-математика ғылымдарының докторы **Н. Т. Данаев**, физика-математика ғылымдарының докторы **Т. С. Рамазанов**, физика-математика ғылымдарының докторы **Ө. Ө. Өмірбаев**, химия ғылымдарының докторы **Н. Е. Коробова** (жауапты хатшы)

Главный редактор  
академик НАН РК  
**Б. Т. Жумагулов**

Редакционная коллегия:

доктор физико-математических наук **Н. М. Темірбеков** (заместитель главного редактора), академики НАН РК **М. М. Абдильдин, Т. Ш. Кальменов, Н. К. Блиев, В. И. Дробжев, К. А. Касымов, Б. Н. Мукашев, М. О. Отелбаев**, доктор физико-математических наук **К. К. Қадыржанов**, доктор физико-математических наук **Н. Т. Данаев**, доктор физико-математических наук **Т. С. Рамазанов**, доктор физико-математических наук **У. У. Умирбаев**, доктор химических наук **Н. Е. Коробова** (ответственный секретарь)

Editor-in-chief  
academician of the NAS of the RK  
**B. T. Zhumagulov**

Editorial staff:

doctor of physical and mathematical sciences **N.M. Temirbekov** (deputy editor-in-chief), academicians of the NAS of the RK **M. M. Abdildin, T. Sh. Kalmenov, N. K. Bliev, V. I. Drobzhev, K. A. Kasymov, B. N. Mukashev, M. O. Otelbaev**, doctor of physical and mathematical sciences **K. K. Kadirzhanov**, doctor of physical and mathematical sciences **N. T. Danaev**, doctor of physical and mathematical sciences **T. S. Ramazanov**, doctor of physical and mathematical sciences **U. U. Umirbaev**, doctor of chemical sciences **N. E. Korobova** (secretary)

«Известия НАН РК. Серия физико-математическая» I ISSN 1991-346X

Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы)

Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации и архивов Министерства культуры и информации Республики Казахстан №5543-Ж, выданное 01.06.2006 г.

Периодичность: 6 раз в год.

Тираж: 300 экземпляров.

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, ком. 218–220, тел.: 261-06-33, 272-13-19, 272-13-18.

Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75.

---

© Национальная академия наук Республики Казахстан, 2012

УДК 539.3 + 65.035(076.2)

Л. А. АЛЕКСЕЕВА, С. Р. ГИРНИС, В. Н. УКРАИНЕЦ

## ЗАДАЧА О ДЕЙСТВИИ ТРАНСПОРТНОЙ НАГРУЗКИ НА МНОГОСЛОЙНУЮ ОБОЛОЧКУ В УПРУГОМ МАССИВЕ

Институт математики МОН РК, г. Алматы,  
Гос. технический университет им. С. Торайгырова, г. Павлодар

*Решена задача о действии на подкреплённую многослойной круговой цилиндрической оболочкой полость, расположенную в упругом пространстве, стационарной подвижной нагрузки произвольного профиля. Движение слоев оболочки и упругого пространства описывается динамическими уравнениями теории упругости в подвижной системе координат. Получено аналитическое решение задачи определения компонент напряженно-деформированного состояния массива и оболочки при дозвуковых скоростях движения. В качестве примера рассмотрено динамическое поведение стальной оболочки в массиве алеврита при действии транспортной нагрузки.*

**Ключевые слова:** упругость, транспортная нагрузка, многослойная цилиндрическая оболочка, напряженно-деформированное состояние.

Важный класс задач динамики подземных сооружений связан с расчетом напряженно-деформированного состояния самого сооружения и окружающего массива при действии транспортных нагрузок, величину которых, характер распределения по поверхности сооружения и скорость движения следует учитывать при расчете прочностных характеристик и надежности всей конструкции при эксплуатации. На практике (особенно в метростроении) широко распространены тоннели глубокого заложения, подкрепленные многослойными упругими цилиндрическими оболочками с различными условиями взаимодействия на контактных поверхностях и с окружающим породным массивом. Исследование таких конструкций на моделях однослойных оболочек проводилось ранее в работах ряда авторов [1-4] и др. Воздействие транспортных нагрузок на многослойные оболочки малоизучено [5].

Здесь разработана теория расчета динамики круговых тоннелей, подкрепленных многослойными упругими круговыми цилиндрическими оболочками различной толщины, при движении транспортных нагрузок в дозвуковом диапазоне скоростей с учетом различных условий контактного взаимодействия конструктивных элементов.

**1. Постановка задачи. Уравнения движения. Контактные условия.** Рассмотрим бесконечно длинную многослойную круговую цилиндрическую оболочку, состоящую из  $N$  концентрических слоёв с разными физико-механическими и геометрическими характеристиками, расположенную в линейно-упругом, однородном и изотропном пространстве, отнесённом к неподвижной цилиндрической системе координат  $r, \theta, z$  (рис. 1). Контакт между оболочкой и окружающей её упругой средой (массивом) будем полагать либо жестким, либо скользящим при двусторонней связи в радиальном направлении. Контакт между слоями оболочки полагаем жёстким.

На внутреннюю поверхность оболочки действует движущаяся с постоянной скоростью  $c$  в направлении оси  $z$  нагрузка (транспортная нагрузка) интенсивностью  $P$ . Скорость движения нагрузки меньше скорости распространения волн сдвига в окружающей оболочку среде (дозвуковой случай).

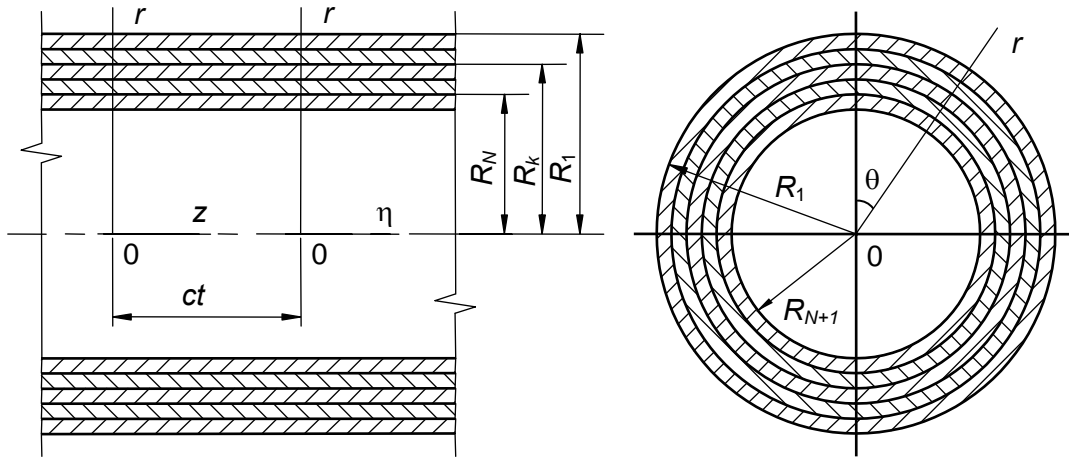


Рис. 1. Многослойная оболочка в упругом пространстве

Последовательно пронумеруем слои оболочки, присвоив контактирующему с массивом слою порядковый номер 2. Физико-механические свойства материала массива и слоев оболочки характеризуются соответственно следующими постоянными:  $\nu_1, \mu_1, \rho_1$ ;  $\nu_i, \mu_i, \rho_i$  ( $i = 2, 3, \dots, N+1$ ), где  $\nu_k$  – коэффициент Пуассона,  $\mu_k = E_k / 2(1 + \nu_k)$  – модуль сдвига,  $\rho_k$  – плотность,  $E_k$  – модуль упругости ( $k = 1, 2, \dots, N+1$ ). В дальнейшем индекс  $k = 1$  относится к массиву, а  $k = 2, 3, \dots, N+1$  – к слоям оболочки.

Определим реакцию упругого пространства и оболочки на данную подвижную нагрузку, используя для описания движения массива и слоев оболочки динамические уравнения теории упругости [6]:

$$(\lambda_k + \mu_k) \text{grad div} \mathbf{u}_k + \mu_k \Delta \mathbf{u}_k = \rho_k \frac{\partial^2 \mathbf{u}_k}{\partial t^2}, \quad k = 1, 2, \dots, N+1, \quad (1)$$

где  $\lambda_k = 2\mu_k \nu_k / (1 - 2\nu_k)$ ,  $\nabla^2$  – оператор Лапласа;  $\mathbf{u}_k$  – вектора смещений массива и слоев оболочки. Так как рассматривается установившийся процесс, то картина деформаций стационарна по отношению к движущейся нагрузке. Поэтому удобно перейти к подвижной системе координат  $r, \theta, \eta = z - ct$ . Тогда уравнения (1) примут вид

$$\left( \frac{1}{M_{pk}^2} - \frac{1}{M_{sk}^2} \right) \text{grad div} \mathbf{u}_k + \frac{1}{M_{sk}^2} \Delta \mathbf{u}_k = \frac{\partial^2 \mathbf{u}_k}{\partial \eta^2}, \quad k = 1, 2, \dots, N+1, \quad (2)$$

где  $M_{pk} = c/c_{pk}$ ,  $M_{sk} = c/c_{sk}$  – числа Маха;  $c_{pk} = \sqrt{(\lambda_k + 2\mu_k)/\rho_k}$ ,  $c_{sk} = \sqrt{\mu_k/\rho_k}$  – скорости распространения волн расширения-сжатия и сдвига в массиве ( $k = 1$ ) и слоях оболочки ( $k = 2, 3, \dots, N+1$ ).

Выражая  $\mathbf{u}_k$  через потенциалы Ламе [3]

$$\mathbf{u}_k = \text{grad} \varphi_{1k} + \text{rot}(\varphi_{2k} \mathbf{e}_\eta) + \text{rot rot}(\varphi_{3k} \mathbf{e}_\eta), \quad k = 1, 2, \dots, N+1, \quad (3)$$

преобразуем уравнения (2) к виду

$$\Delta \varphi_{jk} = M_{jk}^2 \frac{\partial^2 \varphi_{jk}}{\partial \eta^2}, \quad j = 1, 2, 3, \quad k = 1, 2, \dots, N+1. \quad (4)$$

Здесь  $M_{1k} = M_{pk}$ ,  $M_{2k} = M_{3k} = M_{sk}$ . Выразим компоненты напряженно-деформированного состояния оболочки и массива через потенциалы  $\varphi_{jk}$ .

Компоненты вектора  $\mathbf{u}_k$  (3):

$$\begin{aligned} u_{rk} &= \frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \varphi_{3k}}{\partial \eta \partial r}, & u_{\theta k} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial \theta} - \frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_{3k}}{\partial \eta \partial \theta}, \\ u_{\eta k} &= \frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial \eta} + m_{sk}^2 \frac{\partial^2 \varphi_{3k}}{\partial \eta^2}, & m_{sk}^2 &= 1 - M_{sk}^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Используя закон Гука и соотношения (5), получаем выражения для компонент тензора напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_{\eta\eta k} &= (2\mu_k + \lambda_k M_{pk}^2) \frac{\partial^2 \varphi_{1k}}{\partial \eta^2} + 2\mu_k m_{sk}^2 \frac{\partial^3 \varphi_{3k}}{\partial \eta^3}, \\ \sigma_{\theta\theta k} &= \lambda_k M_{pk}^2 \frac{\partial^2 \varphi_{1k}}{\partial \eta^2} + \frac{2\mu_k}{r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_{1k}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 \varphi_{2k}}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \varphi_{3k}}{\partial \theta^2 \partial \eta} + \frac{\partial^2 \varphi_{3k}}{\partial r \partial \eta} \right), \\ \sigma_{rrk} &= \lambda_k M_{pk}^2 \frac{\partial^2 \varphi_{1k}}{\partial \eta^2} + 2\mu_k \left( \frac{\partial^2 \varphi_{1k}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_{2k}}{\partial \theta \partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial \theta} + \frac{\partial^3 \varphi_{3k}}{\partial r^2 \partial \eta} \right), \\ \sigma_{r\eta k} &= \mu_k \left( 2 \frac{\partial^2 \varphi_{1k}}{\partial \eta \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_{2k}}{\partial \theta \partial \eta} + (1 + m_{sk}^2) \frac{\partial^3 \varphi_{3k}}{\partial \eta^2 \partial r} \right), \\ \sigma_{\eta\theta k} &= \mu_k \left( \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \varphi_{1k}}{\partial \theta \partial \eta} - \frac{\partial^2 \varphi_{2k}}{\partial r \partial \eta} + \frac{(1 + m_{sk}^2)}{r} \frac{\partial^3 \varphi_{3k}}{\partial \theta \partial \eta^2} \right), \\ \sigma_{r\theta k} &= 2\mu_k \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_{1k}}{\partial \theta \partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 \varphi_{2k}}{\partial r^2} - \frac{m_{sk}^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi_{2k}}{\partial \eta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \varphi_{3k}}{\partial r \partial \eta \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi_{3k}}{\partial \eta \partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Таким образом, для определения компонент напряжённо-деформированного состояния оболочки и массива необходимо решить уравнения (4), используя следующие граничные условия:

- для скользящего контакта оболочки с массивом

$$\text{при } r = R_1 \quad u_{r1} = u_{r2}, \sigma_{rr1} = \sigma_{rr2}, \sigma_{r\eta 1} = 0, \sigma_{r\theta 1} = 0, \sigma_{r\eta 2} = 0, \sigma_{r\theta 2} = 0,$$

$$\text{при } r = R_k \quad u_{jk} = u_{jk+1}, \sigma_{rjk} = \sigma_{rjk+1},$$

$$\text{при } r = R_{N+1} \quad \sigma_{rjN+1} = P_j(\theta, \eta), \quad j = r, \theta, \eta, \quad k = 2, 3, \dots, N; \quad (7, a)$$

- для жёсткого контакта оболочки с массивом

$$\text{при } r = R_k \quad u_{jk} = u_{jk+1}, \sigma_{rjk} = \sigma_{rjk+1},$$

$$\text{при } r = R_{N+1} \quad \sigma_{rjN+1} = P_j(\theta, \eta), \quad j = r, \theta, \eta, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (7, b)$$

Здесь  $P_j(\theta, \eta)$  – составляющие интенсивности подвижной нагрузки  $P(\theta, \eta)$ .

**2. Решение периодической задачи.** Пусть подвижная нагрузка  $P(\theta, \eta)$  периодична по  $\eta$  и предстает в виде синусоидальной нагрузки с произвольной зависимостью от угловой координаты

$$P(\theta, \eta) = p(\theta) e^{i\xi\eta}, \quad p(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n e^{in\theta},$$

$$P_j(\theta, \eta) = p_j(\theta) e^{i\xi\eta}, \quad p_j(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_{nj} e^{in\theta}, \quad j = r, \theta, \eta, \quad (8)$$

где константа  $\xi$  определяет период  $T = 2\pi/\xi$  действующей нагрузки.

Потенциалы  $\varphi_{jk}$  также будем искать в виде периодических функций по  $\eta$

$$\varphi_{jk}(r, \theta, \eta) = \Phi_{jk}(r, \theta) e^{i\xi\eta}. \quad (9)$$

Подставляя (9) в (4), получим видоизменённые уравнения Гельмгольца

$$\Delta_2 \Phi_{jk} - m_{jk}^2 \xi^2 \Phi_{jk} = 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad k = 1, 2, \dots, N + 1, \quad (10)$$

где  $\Delta_2$  – двумерный оператор Лапласа,  $m_{jk}^2 = 1 - M_{jk}^2$ ,  $m_{1k} \equiv m_{pk}$ ,  $m_{2k} = m_{3k} \equiv m_{sk}$ .

В дозвуковом случае  $M_{sk} < 1$  ( $m_{2k} = m_{3k} = m_{sk} > 0$ ,  $k = 1, 2, \dots, N+1$ ), и мы приходим к известным решениям уравнений (10):

- для массива

$$\Phi_{j1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj} K_n(k_{j1} r) e^{in\theta}, \quad (11, a)$$

- для слоев оболочки

$$\Phi_{jk} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_{nj+3(2k-3)} K_n(k_{jk}r) + a_{nj+6(k-1)} I_n(k_{jk}r)) e^{in\theta}, \quad k = 2, 3, \dots, N+1. \quad (11,b)$$

Здесь  $I_n(kr)$ ,  $K_n(kr)$  – соответственно модифицированные функции Бесселя и функции Макдональда,  $k_{j1} = |m_{j1}\xi|$ ,  $k_{jk} = |m_{jk}\xi|$ ,  $j = 1, 2, 3$ ;  $a_{n1}, \dots, a_{n(6N+3)}$  – неизвестные коэффициенты, подлежащие определению. Подставляя (11,а) с учётом (9) в (5), (6), получаем формулы для вычислений компонент напряженно-деформированного состояния массива (\* означает, что данные компоненты найдены при решении периодической задачи)

$$u_{l1}^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^3 T_{lj1} (K_n(k_{j1}r)) e^{i(\xi\eta+n\theta)} a_{nj}, \quad \frac{\sigma_{lm1}^*}{\mu_1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^3 S_{lmj1} (K_n(k_{j1}r)) e^{i(\xi\eta+n\theta)} a_{nj}, \quad (12)$$

где  $l = r, \theta, \eta$ ,  $m = r, \theta, \eta$ ;  $T_{r11} = k_{11}K'_n(k_{11}r)$ ,  $T_{r21} = -\frac{n}{r}K_n(k_{21}r)$ ,  $T_{r31} = -\xi k_{31}K'_n(k_{31}r)$ ,

$T_{\theta11} = \frac{n}{r}K_n(k_{11}r)i$ ,  $T_{\theta21} = -k_{21}K'_n(k_{21}r)i$ ,  $T_{\theta31} = -\frac{n}{r}\xi K_n(k_{31}r)i$ ,  $T_{\eta11} = \xi K_n(k_{11}r)i$ ,  $T_{\eta21} = 0$ ,

$T_{\eta31} = -k_{31}^2 K_n(k_{31}r)i$   $S_{rr11} = 2\left(k_{11}^2 + \frac{n^2}{r^2} - \frac{\lambda_1 M_{p1}^2 \xi^2}{2\mu_1}\right) K_n(k_{11}r) - \frac{2k_{11}K'_n(k_{11}r)}{r}$ ,

$S_{rr21} = \frac{2n}{r^2} K_n(k_{21}r) - \frac{2k_{21}K'_n(k_{21}r)}{r}$ ,  $S_{rr31} = -2\xi\left(k_{31}^2 + \frac{n^2}{r^2}\right) K_n(k_{31}r) + \frac{2\xi k_{31}K'_n(k_{31}r)}{r}$ ,

$S_{\theta\theta11} = -2\left(\frac{n^2}{r^2} + \frac{\lambda_1 M_{p1}^2 \xi^2}{2\mu_1}\right) K_n(k_{11}r) + \frac{2k_{11}K'_n(k_{11}r)}{r}$ ,  $S_{\theta\theta21} = -\frac{2nK_n(k_{21}r)}{r^2} + \frac{2nk_{21}K'_n(k_{21}r)}{r}$ ,

$S_{\theta\theta31} = \frac{2\xi n^2 K_n(k_{31}r)}{r^2} - \frac{2\xi k_{31}K'_n(k_{31}r)}{r}$ ,  $S_{\eta\eta11} = -2\xi^2 \left(\frac{1 + \lambda_1 M_{p1}^2}{2\mu_1}\right) K_n(k_{11}r)$ ,

$S_{\eta\eta21}^{(1)} = 0$ ,  $S_{\eta\eta31}^{(1)} = 2m_{31}^2 \xi^3 K_n(k_{31}r)$ ,  $S_{r\theta11} = \left(-\frac{2nK_n(k_{11}r)}{r^2} + \frac{2nk_{11}K'_n(k_{11}r)}{r}\right) i$ ,

$S_{r\theta21} = \left(-\left(k_{21}^2 + \frac{2n^2}{r^2}\right) K_n(k_{21}r) + \frac{2k_{21}K'_n(k_{21}r)}{r}\right) i$ ,  $S_{r\theta31} = \left(\frac{2n\xi K_n(k_{31}r)}{r^2} - \frac{2n\xi k_{31}K'_n(k_{31}r)}{r}\right) i$ ,

$S_{\theta\eta11} = -\frac{2n\xi K_n(k_{11}r)}{r}$ ,  $S_{\theta\eta21} = \xi k_{21}K'_n(k_{21}r)$ ,  $S_{\theta\eta31} = \frac{n\xi^2(1 + m_{31}^2)K_n(k_{31}r)}{r}$ ,

$S_{r\eta11} = 2\xi k_{11}K'_n(k_{11}r)i$ ,  $S_{r\eta21} = -\frac{\xi n K_n(k_{21}r)i}{r}$ ,  $S_{r\eta31} = -\xi^2 k_{31}(1 + m_{31}^2)K'_n(k_{31}r)i$ .

Аналогично подставляя (11,b) в (5), (6), получаем формулы для вычислений компонент напряженно-деформированного состояния слоев оболочки

$$u_{lk}^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^3 [T_{lj1}^{(1)}(K_n(k_{jk}r)) a_{nj+3(2k-3)} + T_{lj1}^{(2)}(I_n(k_{jk}r)) a_{nj+6(k-1)}] e^{i(\xi\eta+n\theta)}, \quad (13)$$

$$\frac{\sigma_{lmk}^*}{\mu_k} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^3 [S_{lmj1}^{(1)}(K_n(k_{jk}r)) a_{nj+3(2k-3)} + S_{lmj1}^{(2)}(I_n(k_{jk}r)) a_{nj+6(k-1)}] e^{i(\xi\eta+n\theta)}.$$

Здесь  $l = r, \theta, \eta$ ,  $m = r, \theta, \eta$ ,  $k = 2, 3, \dots, N+1$ ;

$T_{r1k}^{(1)} = k_{1k}K'_n(k_{1k}r)$ ,  $T_{r2k}^{(1)} = -\frac{n}{r}K_n(k_{2k}r)$ ,  $T_{r3k}^{(1)} = -\xi k_{3k}K'_n(k_{3k}r)$ ,

$$\begin{aligned}
 T_{\theta 1k}^{(1)} &= \frac{n}{r} K_n(k_{1k}r) i, & T_{\theta 2k}^{(1)} &= -k_{2k} K_n'(k_{2k}r) i, & T_{\theta 3k}^{(1)} &= -\frac{n}{r} \xi K_n(k_{3k}r) i, \\
 T_{\eta 1k}^{(1)} &= \xi K_n(k_{1k}r) i, & T_{\eta 2k}^{(1)} &= 0, & T_{\eta 3k}^{(1)} &= -k_{3k}^2 K_n(k_{3k}r) i, \\
 S_{rr1k}^{(1)} &= 2 \left( k_{1k}^2 + \frac{n^2}{r^2} - \frac{\lambda_k M_{pk}^2 \xi^2}{2\mu_k} \right) K_n(k_{1k}r) - \frac{2k_{1k} K_n'(k_{1k}r)}{r}, \\
 S_{rr2k}^{(1)} &= \frac{2n}{r^2} K_n(k_{2k}r) - \frac{2k_{2k} K_n'(k_{2k}r)}{r}, & S_{rr3k}^{(1)} &= -2\xi \left( k_{3k}^2 + \frac{n^2}{r^2} \right) K_n(k_{3k}r) + \frac{2\xi k_{3k} K_n'(k_{3k}r)}{r}, \\
 S_{\theta\theta 1k}^{(1)} &= -2 \left( \frac{n^2}{r^2} + \frac{\lambda_k M_{pk}^2 \xi^2}{2\mu_k} \right) K_n(k_{1k}r) + \frac{2k_{1k} K_n'(k_{1k}r)}{r}, \\
 S_{\theta\theta 2k}^{(1)} &= -\frac{2n K_n(k_{2k}r)}{r^2} + \frac{2nk_{2k} K_n'(k_{2k}r)}{r}, & S_{\theta\theta 3k}^{(1)} &= \frac{2\xi n^2 K_n(k_{3k}r)}{r^2} - \frac{2\xi k_{3k} K_n'(k_{3k}r)}{r}, \\
 S_{\eta\eta 1k}^{(1)} &= -2\xi^2 \left( \frac{1 + \lambda_k M_{pk}^2}{2\mu_k} \right) K_n(k_{1k}r), & S_{\eta\eta 2k}^{(1)} &= 0, & S_{\eta\eta 3k}^{(1)} &= 2m_{3k}^2 \xi^3 K_n(k_{3k}r), \\
 S_{r\theta 1k}^{(1)} &= \left( -\frac{2n K_n(k_{1k}r)}{r^2} + \frac{2nk_{1k} K_n'(k_{1k}r)}{r} \right) i, \\
 S_{r\theta 2k}^{(1)} &= \left( -\left( k_{2k}^2 + \frac{2n^2}{r^2} \right) K_n(k_{2k}r) + \frac{2k_{2k} K_n'(k_{2k}r)}{r} \right) i, & S_{r\theta 3k}^{(1)} &= \left( \frac{2n\xi K_n(k_{3k}r)}{r^2} - \frac{2n\xi k_{3k} K_n'(k_{3k}r)}{r} \right) i, \\
 S_{\theta\eta 1k}^{(1)} &= -\frac{2n\xi K_n(k_{1k}r)}{r}, & S_{\theta\eta 2k}^{(1)} &= \xi k_{2k} K_n'(k_{2k}r), & S_{\theta\eta 3k}^{(1)} &= \frac{n\xi^2 (1 + m_{3k}^2) K_n(k_{3k}r)}{r}, \\
 S_{r\eta 1k}^{(1)} &= 2\xi k_{1k} K_n'(k_{1k}r) i, & S_{r\eta 2k}^{(1)} &= -\frac{\xi n K_n(k_{2k}r) i}{r}, & S_{r\eta 3k}^{(1)} &= -\xi^2 k_{3k} (1 + m_{3k}^2) K_n'(k_{3k}r) i; \\
 K_n'(k_{jk}r) &= \frac{dK_n(k_{jk}r)}{d(k_{jk}r)}; & T_{ljk}^{(2)}, & S_{lmjk}^{(2)} & \text{получаются из } T_{ljk}^{(1)}, S_{lmjk}^{(1)} \text{ заменой } K_n \text{ на } I_n.
 \end{aligned}$$

Для определения коэффициентов  $a_{n1}, \dots, a_{n(6N+3)}$  воспользуемся граничными условиями (7,a) или (7,b), переписанными для периодической задачи с учётом (8), (12), (13).

Приравнявая коэффициенты рядов при  $e^{im\theta}$ , получим бесконечную систему ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) линейных алгебраических уравнений блочно-диагонального вида:

- при скользящем контакте оболочки с массивом

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^3 [T_{rj1} (K_n(k_{j1}R_1)) a_{nj} - T_{rj2}^{(1)} (K_n(k_{j2}R_1)) a_{nj+3} - T_{rj2}^{(2)} (I_n(k_{j2}R_1)) a_{nj+6}] &= 0, \\
 \sum_{j=1}^3 [S_{rrj1} (K_n(k_{j1}R_1)) a_{nj} - \tau_1 S_{rrj2}^{(1)} (K_n(k_{j2}R_1)) a_{nj+3} - \tau_1 S_{rrj2}^{(2)} (I_n(k_{j2}R_1)) a_{nj+6}] &= 0, \\
 \sum_{j=1}^3 S_{r\eta j1} (K_n(k_{j1}R_1)) a_{nj} = 0, & \sum_{j=1}^3 S_{r\theta j1} (K_n(k_{j1}R_1)) a_{nj} = 0, \\
 \sum_{j=1}^3 [S_{r\eta j2}^{(1)} (K_n(k_{j2}R_1)) a_{nj+3} + S_{r\eta j2}^{(2)} (I_n(k_{j2}R_1)) a_{nj+6}] &= 0, \\
 \sum_{j=1}^3 [S_{r\theta j2}^{(1)} (K_n(k_{j2}R_1)) a_{nj+3} + S_{r\theta j2}^{(2)} (I_n(k_{j2}R_1)) a_{nj+6}] &= 0, \tag{14,a}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^3 \left[ T_{mj}^{(1)}(K_n(k_{jk}R_k)) a_{nj+3(2k-3)} + T_{mj}^{(2)}(I_n(k_{jk}R_k)) a_{nj+6(k-1)} - \right. \\ & \left. - T_{mj+1}^{(1)}(K_n(k_{jk+1}R_k)) a_{nj+3(2k-1)} - T_{mj+1}^{(2)}(I_n(k_{jk+1}R_k)) a_{nj+6k} \right] = 0, \\ & \sum_{j=1}^3 \left[ S_{lmjk}^{(1)}(K_n(k_{jk}R_k)) a_{nj+3(2k-3)} + S_{lmjk}^{(2)}(I_n(k_{jk}R_k)) a_{nj+6(k-1)} - \right. \\ & \left. - \tau_k S_{lmjk+1}^{(1)}(K_n(k_{jk+1}R_k)) a_{nj+3(2k-1)} - \tau_k S_{lmjk+1}^{(2)}(I_n(k_{jk+1}R_k)) a_{nj+6k} \right] = 0, \\ & \sum_{j=1}^3 \left[ \tau S_{rmjN+1}^{(1)}(K_n(k_{jN+1}R_{N+1})) a_{nj+3(2N-1)} + \tau S_{rmjN+1}^{(2)}(I_n(k_{jN+1}R_{N+1})) a_{nj+6N} \right] = P_{nm} / \mu_1, \end{aligned}$$

где  $m = r, \theta, \eta$ ,  $\tau_1 = \mu_2 / \mu_1$ ,  $\tau = \mu_{N+1} / \mu_1$ ,  $\tau_k = \mu_{k+1} / \mu_k$ ,  $k = 2, 3, \dots, N$ ;

- при жёстком контакте оболочки с массивом

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^3 \left[ T_{mj1}^{(1)}(K_n(k_{j1}R_1)) a_{nj} - T_{mj2}^{(1)}(K_n(k_{j2}R_1)) a_{nj+3} - T_{mj2}^{(2)}(I_n(k_{j2}R_1)) a_{nj+6} \right] = 0, \\ & \sum_{j=1}^3 \left[ S_{rmj1}^{(1)}(K_n(k_{j1}R_1)) a_{nj} - \tau_1 S_{rmj2}^{(1)}(K_n(k_{j2}R_1)) a_{nj+3} - \tau_1 S_{rmj2}^{(2)}(I_n(k_{j2}R_1)) a_{nj+6} \right] = 0, \end{aligned} \quad (14,b)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^3 \left[ T_{mj}^{(1)}(K_n(k_{jk}R_k)) a_{nj+3(2k-3)} + T_{mj}^{(2)}(I_n(k_{jk}R_k)) a_{nj+6(k-1)} - \right. \\ & \left. - T_{mj+1}^{(1)}(K_n(k_{jk+1}R_k)) a_{nj+3(2k-1)} - T_{mj+1}^{(2)}(I_n(k_{jk+1}R_k)) a_{nj+6k} \right] = 0, \\ & \sum_{j=1}^3 \left[ S_{lmjk}^{(1)}(K_n(k_{jk}R_k)) a_{nj+3(2k-3)} + S_{lmjk}^{(2)}(I_n(k_{jk}R_k)) a_{nj+6(k-1)} - \right. \\ & \left. - \tau_k S_{lmjk+1}^{(1)}(K_n(k_{jk+1}R_k)) a_{nj+3(2k-1)} - \tau_k S_{lmjk+1}^{(2)}(I_n(k_{jk+1}R_k)) a_{nj+6k} \right] = 0, \\ & \sum_{j=1}^3 \left[ \tau S_{rmjN+1}^{(1)}(K_n(k_{jN+1}R_{N+1})) a_{nj+3(2N-1)} + \tau S_{rmjN+1}^{(2)}(I_n(k_{jN+1}R_{N+1})) a_{nj+6N} \right] = P_{nm} / \mu_1 \end{aligned}$$

где  $m = r, \theta, \eta$ ,  $\tau = \mu_{N+1} / \mu_1$ ,  $\tau_k = \mu_{k+1} / \mu_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ .

Решение системы уравнений (14,a) или (14,b) находим известным методом, если соответствующий для каждого  $n$  определитель системы  $\Delta_n(\xi, c)$  отличен от нуля.

После определения коэффициентов  $a_{nJ}$  ( $J = 1, 2, \dots, 6N+3$ ), компоненты напряжённо-деформированного состояния массива и слоев оболочки при действии синусоидальной бегущей нагрузки можно вычислить по формулам (12), (13).

**3. Решение аперидической задачи.** Зная решение (12), (13) задачи для синусоидальной нагрузки (8), реакцию оболочки и окружающей её среды на движущуюся с постоянной скоростью аперидическую (локальную) нагрузку вида  $P(\theta, \eta) = p(\theta)p(\eta)$  (характерного для транспортных средств) можно найти при помощи суперпозиции, используя представление нагрузки и компонент напряженно-деформированного состояния оболочки и массива в виде интегралов Фурье

$$\begin{aligned} P(\theta, \eta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P^*(\theta, \xi) e^{i\xi\eta} d\xi = p(\theta)p(\eta) = p(\theta) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p^*(\xi) e^{i\xi\eta} d\xi, \\ P_m(\theta, \eta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P_m^*(\theta, \xi) e^{i\xi\eta} d\xi = p_m(\theta)p(\eta) = p_m(\theta) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p^*(\xi) e^{i\xi\eta} d\xi, \quad m = r, \theta, \eta; \\ u_{lk}(r, \theta, \eta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u_{lk}^*(r, \theta, \xi) p^*(\xi) d\xi, \quad \sigma_{lmk}(r, \theta, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{lmk}^*(r, \theta, \xi) p^*(\xi) d\xi \quad (16) \\ & \quad l = r, \theta, \eta, \quad m = r, \theta, \eta, \quad k = 1, 2, \dots, N+1. \end{aligned}$$



Здесь  $p^*(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\eta)e^{-i\xi\eta} d\eta$ . Для вычисления интегралов (16) можно использовать любой численный метод, если дозвуковая скорость движения нагрузки меньше её критических скоростей, значения которых определяются при исследовании определителей  $\Delta_n(\xi, c)$  разрешающей системы уравнений (14,а) или (14,б). Окончательное решение будет зависеть от конкретного вида движущейся нагрузки.

**4. Численный эксперимент.** В качестве примера рассмотрим динамическое поведение однослойной стальной ( $\nu_2 = 0,3$ ,  $\mu_2 = 8,08 \cdot 10^{10}$  Па,  $\rho_2 = 7,8 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>;  $c_{s2} = 3218,54$  м/с,  $c_{p2} = 6021,33$  м/с) цилиндрической оболочки с радиусами поверхностей  $R_1 = 1,1$  м,  $R_2 = 1$  м, находящейся на большой глубине в породном массиве с характеристиками:  $\nu_1 = 0,25$ ,  $\mu_1 = 4,0 \cdot 10^9$  Па,  $\rho_1 = 2,6 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>;  $c_{s1} = 1240,35$  м/с,  $c_{p1} = 2148,34$  м/с. По нижней половине оболочки с постоянной скоростью  $c = 100$  м/с движется нагрузка давления  $P_r$ , приложенная равномерно в интервале  $|\eta| \leq 0,2R_2$ . Интенсивность нагрузки –  $P_0$ .

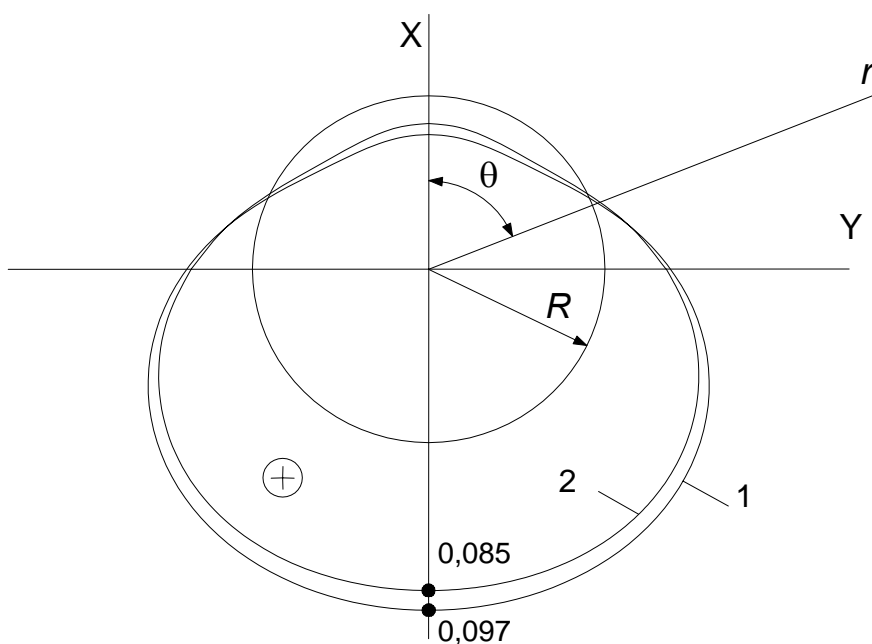


Рис. 2. Эпюры радиальных перемещений  $u = u, \mu_1/P_0$ , м на контуре полости

Как показали проведенные для данного случая численные исследования определителей разрешающих систем уравнений,  $\Delta(\xi, c) \neq 0$  для любых  $\xi \in (-\infty, \infty)$  и  $0 < c < c_s$ .

На рис. 2 в поперечном сечении  $\eta = 0$  показаны эпюры радиальных перемещений  $u = u, \mu_1/P_0$ , м на контуре полости ( $r = R = R_1$ ). Кривая 1 соответствует скользящему контакту оболочки со средой,

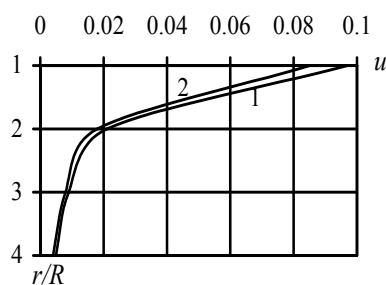


Рис. 3. Изменения радиальных перемещений  $u = u, \mu_1/P_0$ , м с удалением от контура полости при  $\eta = 0$

кривая 2 – жесткому контакту. Из анализа поведения кривых следует, что при жестком контакте перемещения  $u_r$  на контактной поверхности среды меньше, чем при скользящем.

С удалением от границы полости эффект динамического воздействия бегущей нагрузки на массив снижается. В частности, радиальные перемещения точек среды быстро убывают с глубиной, и при  $r/R = r/R_1 = 4$  они становятся практически несущественными при любых контактных условиях оболочки со средой (рис. 3, нумерация кривых сохраняет прежний смысл).

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 Пожуев В.И. Реакция цилиндрической оболочки в упругой среде на подвижную гармоничную нагрузку // Проблемы машиностроения. – Киев, 1982. – № 17. – С. 49-54.
- 2 Пожуев В.И. Действие подвижной скручивающей нагрузки на цилиндрическую оболочку в упругой среде // Строит. механика и расчет сооружений. – 1984. – № 6. – С. 58-61.
- 3 Ержанов Ж.С., Айтиалиев Ш.М., Алексеева Л.А. Динамика тоннелей и подземных трубопроводов. – Алма-Ата: Наука КазССР, 1989. – 240 с.
- 4 Алексеева Л.А., Украинец В.Н. Динамика упругого полупространства с подкрепленной цилиндрической полостью при подвижных нагрузках // Прикладная механика. – 2009. – № 9. – С. 75-85.
- 5 Алексеева Л.А., Украинец В.Н. Критическая скорость движущейся нагрузки в тоннеле, подкрепленном двухслойной оболочкой // Изв. АН СССР. МТТ. – 1987. – № 4. – С. 156-161.
- 6 Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975. 872 с.

*L. A. Alexeyeva, S. R. Girmis, V. N. Ukrainets*

#### PROBLEM ABOUT ACTION OF THE STATIONARY MOVING LOAD ON LAMINATED SHELL IN ELASTIC SPACE

It is solved the problem about action on supported by multi-layer circular cylindrical shell cavity, located in elastic space, stationary rolling load of the free profile. Motion of shell layers and elastic space are described by dynamic equations of elasticity theory in moving coordinate system. Analytical decision of the problem of determination of components of deflected mode of elastic array and shell layers is received under subsonic velocity of a motion. As example the behavior of steel shell in siltstone array is considered by the action of transport load.

**Key words:** transport load, elasticity, transport load, multilayer cylindrical shell, deflected mode.

Ж. ИСКАКОВ

## ТІК ҚАТАҢ ТЕҢГЕРЛМЕГЕН ГИРОСКОПТЫҚ РОТОРДЫҢ СЫЗЫҚТЫ ЕМЕС РЕЗОНАНСТЫҚ ТЕРБЕЛІСТЕРІНІҢ ОРНЫҚТЫЛЫҒЫ

Алматы энергетика және байланыс университеті, Алматы қ.

Дискісінің массасының дисбалансы және еңкіштігі бар тік қатаң гироскоптық ротор қарастырылады. Ротордың динамикалық моделін құру мақсатында ротордың кинетикалық энергиясының, Рэлейдің сызықты емес функциясының, серпімді тірегінің геометриялық сызықты емес сипаттамасы ескерілген потенциалдық энергиясының, сыртқы күштер моменттерінің өрнектері табылады және Лагранж түріндегі қозғалыс теңдеулері жазылады. Тербелістің орнықтылығын зерттеу үшін олардың негізінде вариациялық түрдегі, мұнан әрі Хилл типіндегі теңдеулер құрылады. Флоке теориясына сәйкесті шешімдері бұл теңдеулерге қойылып, гармоникалық баланс әдісі пайдаланылып, орнықтылық критерийі табылады. Ротордың резонанстық орнықсыздық облысы графикалық анықталады және оған дисбаланстар бағдарлары арасындағы бұрыштың, дискінің қалыңдығының және сызықтық еместік шамасының әсері зерттеледі.

Әртүрлі роторлық машиналардың тербелістеріне және орнықтылығына дискінің еңкіштігі мен массаның дисбалансының біріккен әсері – түбегейлі зерттелмеген мәселелердің бірі болып келеді. [1-4] жұмыстарында геометриясы әртүрлі роторлардың қалыптасқан сызықты тербелістеріне дискінің еңкіштігі мен массаның дисбалансының біліктің консолдық шамасының, дискінің симметриялы емес орналасу шамасының, сыртқы үйкеліс коэффициентінің әсері зерттеледі, нәтижесінде прецессия жасаушы ротордың ерекше фазалық-жиілік сипаттамасы болады, мұнымен бірге кіші айналу жиіліктерінде тербеліс фазасы дисбаланс бағдарына сәйкес келуі міндетті емес екен [6] жұмыста [5] жұмыстың зерттеу әдістемесі бас гармоникалық және субгармоникалық тербелістерді зерттеу үшін пайдаланылады. Алдыңғы жұмыстардан ерекшелігі субгармоникалық резонанстық тербелістер түбегейлі зерттеледі, бас және субрезонанстарға сәйкесті орнықсыздық облыстары анықталады [7] жұмыста еркіншілік дәрежесі бірге тең сызықты емес жүйенің гармоникалық және субгармоникалық тербелістеріне және орнықтылығына сызықты емес тұтқыр үйкелістің әсері қарастырылады. Берілген жұмыста тік қатаң гироскоптық ротордың резонанстық тербелістерінің орнықтылығына дисбаланстар бағдарлары арасындағы бұрыштың, диск қалыңдығының және серпімді тірегінің сызықты емес параметрінің әсері зерттеледі.

1-суретте ротордың геометриялық сұлбасы ұсынылған. Ұзындығы  $L$  және қатаңдығы  $EI$  білік төменгі шарнирлі және онан  $\ell_0$  қашықтықтағы жоғарғы серпімді тіректің көмегімен тік орнатылған. Біліктің бос ұшына массасы  $m$  (салмағы  $G$ ) үйектік инерция моменті  $I_p$  және кез келген бағыт үшін бірдей көлденең инерция моменті  $I_T$  болатын диск бекітілген. Біліктің  $\omega$  айналу жылдамдығы соншалықты үлкендіктен роторды қозғалмайтын нүктесі біліктің төменгі нүктесі болатын гироскоп деп қарастыруға болады. Дискінің геометриялық центрі  $S$   $x$ ,  $y$  координаталарымен, ал біліктің және толығымен ротордың кеңістіктегі орны  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  бұрыштарымен және  $\varphi = \omega t$  бұрылу бұрышымен анықталады. Сызықты эксцентриситет  $e$   $SX$  осінде жатыр, бұрыштық  $\tau$  эксцентриситеттен  $\beta$  бұрышына қалады деп ұйғарамыз. Ротор білігінің кіші ауытқуларымен шектелеміз, сол себепті есептеулерде  $e$ ,  $\tau$ ,  $\theta_x$ ,  $\theta_y$ ,  $x$ ,  $y$  аз шамаларына қатысты сызықты мүшелерді ғана ескереміз. Серпімді тіректің қаттылық коэффициенті  $k_1$  және серпімділік күшінің сызықты емес мүшесінің коэффициенті  $k_2$ . Сыртқы демпферлеу коэффициенті  $\mu_e$ . Жүйенің кинетикалық және потенциалдық энергияларының, Рэлей функциясының, сыртқы күштердің моменттерінің өрнектерін жазып Лагранж формасында ротордың қозғалыс теңдеулерін құрамыз. Өлшемсіз параметрлерді келесі формулалар

$$\varepsilon = e/L; \ell = \ell_0/L; \bar{t} = t(2EI/mL^3)^{1/2}; \Omega = \omega(mL^3/2EI)^{1/2}; \bar{I}_p = I_p/mL^2; \bar{I}_T = I_T/mL^2; \\ K_1 = k_1(L^3/EI); K_2 = k_2(L^5/EI); P = G(L^2/EI); \mu = \mu_e(1/E \text{Im} L); \quad (1)$$

көмегімен ендіріп, тендеулердің оң жақтарында

$$M = \sqrt{[(\Omega^2 + P)\varepsilon + H\tau\Omega^2 \cos \beta]^2 + H\tau^2\Omega^4 \sin^2 \beta} \quad (2)$$

- мәжбүрлеуші моменттің амплитудасы өрнегінің және оның

$$\gamma = \arctg \frac{H\tau\Omega^2 \sin \beta}{(\Omega^2 + P)\varepsilon + H\tau\Omega^2 \cos \beta} \quad (3)$$

- бастапқы фазасы өрнегінің белгілеулерін пайдаланып бір ғана гармониялық функциялармен өрнектеп қозғалыс тендеулеріне ықшам түр беруге болады

$$(1 + \bar{I}_T)\theta_x'' + \bar{I}_p\Omega\theta_y' + \mu\theta_x' + (K_1l^2 - P)\theta_x + K_2l^4\theta_x^3 = M \cos(\Omega\bar{t} + \gamma), \quad (4)$$

$$(1 + \bar{I}_T)\theta_y'' - \bar{I}_p\Omega\theta_x' + \mu\theta_y' + (K_1l^2 - P)\theta_y + K_2l^4\theta_y^3 = M \sin(\Omega\bar{t} + \gamma), \quad (5)$$

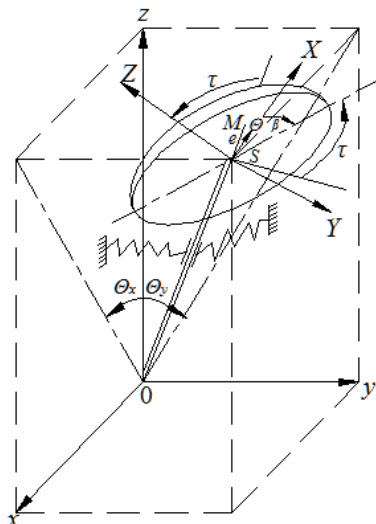
Бұл жерде  $H = \bar{I}_p - \bar{I}_T$  – дискінің шартты қалыңдығы.

Мәжбүрлеуші моменттің жиілігіне тең тербеліс жиілігіндегі қарапайым гармониканың негізгі резонансы жағдайында (4)-(5) тендеулерінің шешімдерін жуықтау

$$\theta_x = A_1 \cos(\Omega\bar{t} - \alpha_1) \quad (6)$$

$$\theta_y = A_1 \sin(\Omega\bar{t} - \alpha_1) \quad (7)$$

тендеулерін қанағаттандырады.



1-сурет. Ротордың геометриясы

Орнықтылық мәселесін шешу үшін периодты тепе-теңдік күйден  $\delta\theta_x$  және  $\delta\theta_y$  ауытқуларын қарастырамыз және (4), (5) тендеулеріндегі  $\theta_x$  және  $\theta_y$  шамаларын  $\theta_{x0} + \delta\theta_x$  және  $\theta_{y0} + \delta\theta_y$  шамаларымен ауыстырамыз. Бұл жерде  $\theta_{x0}$  және  $\theta_{y0}$  (4), (5) тендеулерінің орнықтылығы зерттелетін шешімдері. Мұнан әрі [5, 6] әдістемесі бойынша  $\delta\theta_x$  және  $\delta\theta_y$  бірден жоғары дәрежелерін елемей  $\delta\theta_x$  және  $\delta\theta_y$  вариацияларына қатысты тендеулерді аламыз

$$(1 + I_T)\frac{d^2\delta\theta_x}{dt^2} + I_p\Omega\frac{d\delta\theta_y}{dt} + \mu\frac{d\delta\theta_x}{dt} + [(K_1l^2 - P) + 3K_2l^4\theta_{x0}^2]\delta\theta_x = 0, \quad (8)$$

$$(1 + I_T)\frac{d^2\delta\theta_y}{dt^2} - I_p\Omega\frac{d\delta\theta_x}{dt} + \mu\frac{d\delta\theta_y}{dt} + [(K_1l^2 - P) + 3K_2l^4\theta_{y0}^2]\delta\theta_y = 0. \quad (9)$$

$\delta\theta_x$  және  $\delta\theta_y$  шамаларының уақыт бойынша сипаты сәйкесті  $\theta_{x0}(\tau)$  және  $\theta_{y0}(\tau)$  шешімдерінің орнықтылығын анықтайды: егер (8) және (9) тендеулерінің барлық  $\delta\theta_x$  және  $\delta\theta_y$  шешімдері

$\tau \rightarrow \infty$  кезінде шектелсе, онда анықтама бойынша  $\theta_{x_0}(\tau)$  және  $\theta_{y_0}(\tau)$  шешімдері орнықты, егер  $\delta\theta_x$  және  $\delta\theta_y$  шамалары  $\tau \rightarrow \infty$  кезінде шектеусіз артса, онда  $\theta_{x_0}(\tau)$  және  $\theta_{y_0}(\tau)$  шешімдері Ляпунов бойынша орнықсыз.

$$\delta\theta_x = e^{-0,5\mu t} \xi \text{ және } \delta\theta_y = e^{-0,5\mu t} \eta \quad (10)$$

түрлендірулерін пайдаланып және  $\theta_{x_0}$  және  $\theta_{y_0}$  шамаларын олардың (6) және (7) жіктелулерімен алмастырып Хилл типіндегі теңдеулерге келтіреміз

$$(1 + I_T) \frac{d^2 \xi}{dt^2} - \mu I_T \frac{d\xi}{dt} + (\theta_{01} + \theta_{2C} \cos 2\Omega t + \theta_{2S} \sin 2\Omega t) \xi + I_p \Omega \frac{d\eta}{dt} - \frac{1}{2} \mu I_p \Omega \eta = 0, \quad (11)$$

$$(1 + I_T) \frac{d^2 \eta}{dt^2} - \mu I_T \frac{d\eta}{dt} + (\theta_{01} + \theta_{2C} \sin 2\Omega t - \theta_{2S} \cos 2\Omega t) \eta - I_p \Omega \frac{d\xi}{dt} + \frac{1}{2} \mu I_p \Omega \xi = 0, \quad (12)$$

мұндағы

$$\begin{aligned} \theta_{01} &= \frac{1}{4}(1 + I_T) \mu^2 - \frac{1}{2} \mu + (K_1 l^2 - P) + \frac{2}{3} K_2 l^4 A_1^2; \\ \theta_{2C} &= \frac{2}{3} K_2 l^4 A_1^2 \cos 2\alpha_1; \\ \theta_{2S} &= \frac{2}{3} K_2 l^4 A_1^2 \sin 2\alpha_1 - \end{aligned} \quad (13)$$

$A_1, \alpha_1$  аргументтерінен қайсыбір функциялар. Флоке теориясына сәйкесті (11) және (12) теңдеулерінің дербес шешімдерін мына түрде іздейміз

$$\xi = e^{\lambda t} a_1 \cos(\Omega t - \delta_1), \quad (14)$$

$$\eta = e^{\lambda t} a_1 \sin(\Omega t - \delta_1), \quad (15)$$

мұндағы  $\lambda$  – сипаттамалық көрсеткіш (нақты немесе жорымал).

(10), (14) және (15) қатыстарын талдаудан шығатыны:  $\theta_{x_0}$  және  $\theta_{y_0}$  шешімдерінің орнықтылық шарттары келесі түрде болады

$$\operatorname{Re} \left( \lambda - \frac{\mu}{2} \right) < 0, \quad (16)$$

ал орнықты және орнықсыз облыстар шекарасында

$$\operatorname{Re} \left( \lambda - \frac{\mu}{2} \right) = 0. \quad (17)$$

$\lambda$  сипаттамалық көрсеткіші нақты болуы мүмкін немесе таза жорымал болуы мүмкін, онда (16) шарты келесі шартқа баламалы

$$\frac{\mu}{2} > 0 \text{ және } \left( \frac{\mu}{2} \right)^2 > \lambda^2.$$

(14) және (15) шешімдерін (11) және (12) теңдеулеріне қойып, гармоникалық баланс әдісін пайдаланып, яғни бірдей жиіліктер жанындағы коэффициенттерді теңестіріп, нәтижесінде  $a_1$  және  $\alpha_1$  шамаларының кез келген мардымсыз емес шешімдерінде қанағаттандырылатын біртекті теңдеулер жүйесін аламыз. Сондықтан оның коэффициенттерінен құралған сипаттауыш анықтауыш нөлге айналуы қажет. Бұл анықтауыш  $\lambda$  шамасынан тәуелді. Сонымен,

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} (1 + I_T)(\lambda^2 - \Omega^2) - \mu I_T \lambda + \theta_{01} + \frac{1}{2} \theta_{2C} + I_p \Omega^2; & -2(1 + I_T) \Omega \lambda + \mu I_T \Omega + \frac{1}{2} \theta_{2S} + I_p \Omega \lambda - \frac{1}{2} \mu I_p \Omega; \\ 2(1 + I_T) \Omega \lambda - \mu I_T \Omega + \frac{1}{2} \theta_{2S} - I_p \Omega \lambda + \frac{1}{2} \mu I_p \Omega; & (1 + I_T)(\lambda^2 - \Omega^2) - \mu I_T \lambda + \theta_{01} - \frac{1}{2} \theta_{2C} + I_p \Omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (18)$$

(16)-(17) шарттарынан шығатыны:

орнықтылық облысы мен орнықсыздық облысы шекарасында  $\Delta\left(\frac{\mu}{2}\right) = 0$  және орнықтылық облысында  $\Delta\left(\frac{\mu}{2}\right) > 0$ .

Жоғарыда көрсетілген анықтауышты ашып және (17) өрнегін ескеріп резонанстық қисықтағы орнықсыздық облысының шекарасын анықтайтын қатысты аламыз:

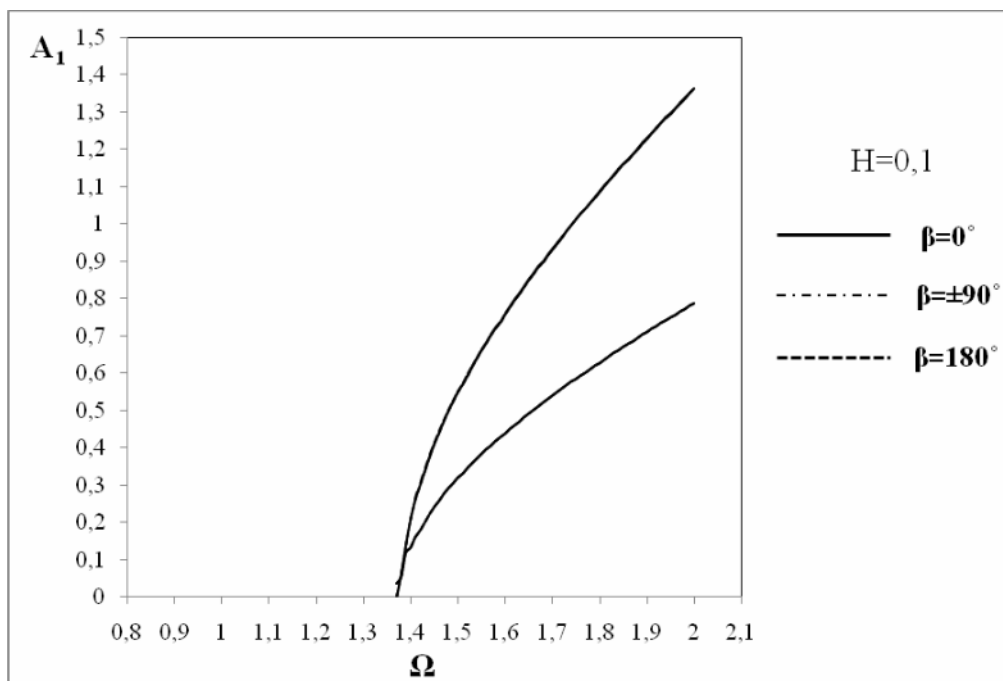
$$R(A_1, \alpha_1, \Omega, \mu, K_2, H, \beta) = \left[ 0,25(1+I_T)\mu^2 - 0,5\mu^2 I_T - (1-H)\Omega^2 + \theta_{01} \right]^2 + \left[ 0,5(2+2I_T - I_p)\Omega\mu + \mu\left(\frac{1}{2}I_p - I_T\right)\Omega \right]^2 - \frac{1}{4}(\theta_{2c}^2 + \theta_{2s}^2) = 0. \quad (19)$$

Бұл кезде орнықтылық облысы

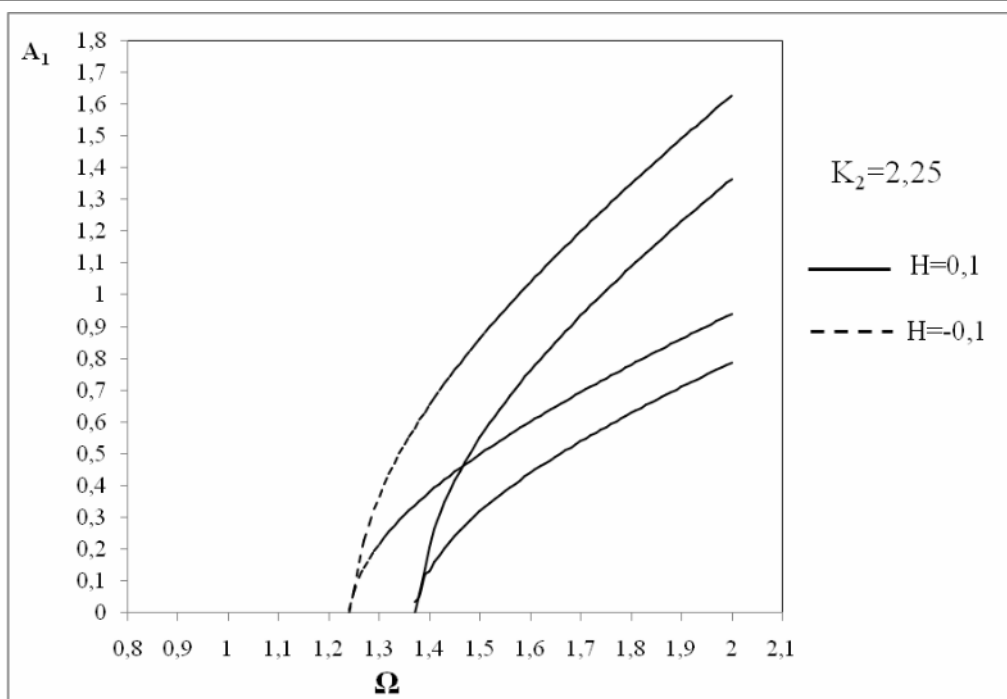
$$R > 0 \quad (20)$$

теңсіздігімен сипатталады.

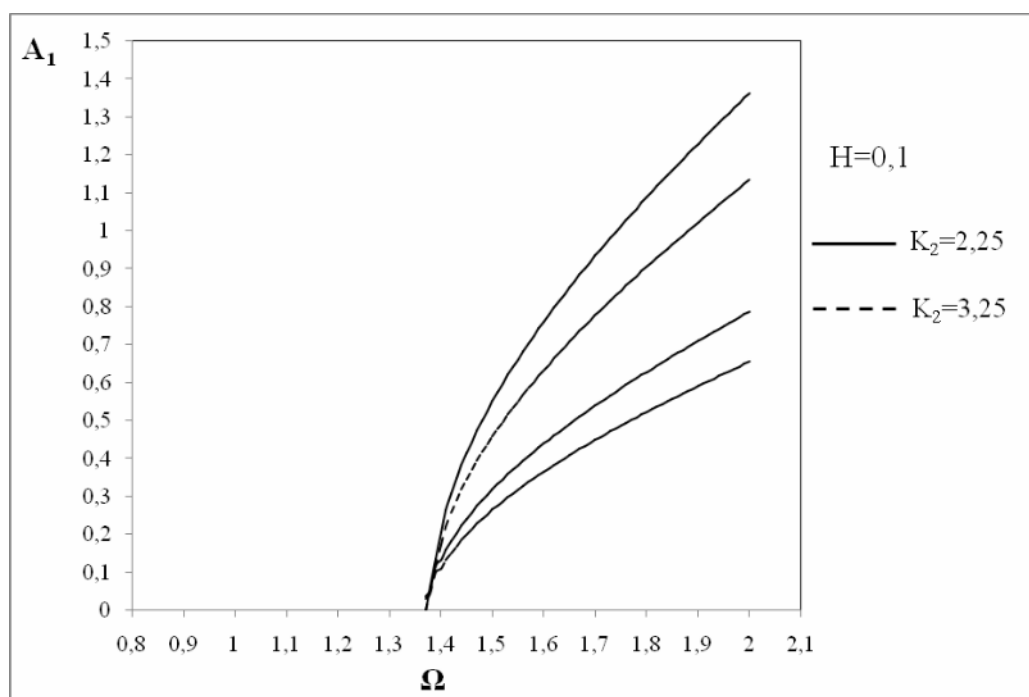
(19) теңдеу ротордың келесі параметрлері:  $H = +0,1(\bar{I}_p = 1,008; \bar{I}_T = 0,909)$ ,  $H = -0,1(\bar{I}_p = 0,909; \bar{I}_T = 1,008)$ ,  $K_2 = 2,25$ ;  $\beta = 0^\circ, \pm 90^\circ, 180^\circ$ ;  $K_1 = 2,25$ ;  $\ell = 0,88$ ;  $P = 0,02$ ;  $\mu_e = 0,01$ ;  $\varepsilon = 0,01$ ;  $\tau = 0,02$ ;  $\Omega = 0,8 \div 2$  үшін электрондық есептеуіш машинасында «Maple 11» символдық есептеулер жүйесінде сандық шешілді. Сандық есептеулер нәтижелерінен және 2-суреттен резонанстық орнықсыздық облысы шекараларының дисбаланстар бағдарлары арасындағы бұрыштан әлсіз байланыста болатындығын байқаймыз. 3-суреттен ротордың дискісінің қалыңдығының резонанстық орнықсыздық облысының орналасуына және оның еніне әсер ететінін көреміз. Бірдей айналу бұрыштық жылдамдығында жұқа дискілі ротордың орнықсыздық облысының ені қалың дискілі ротордікімен салыстырғанда кіші болады екен. 4-суреттегі графиктер сызықты еместік шамасының артуымен резонанстық орнықсыздық облысы төмен қарай ығысып, ені кішірейетіндігін көрсетеді.



2-сурет. Негізгі резонанстық орнықсыздық облысы шекарасына дисбаланстар бағдарлары арасындағы бұрыштың әсері. Жұқа дискі жағдайы



3-сурет. Негізгі резонанстық орнықсыздық облысы шекарасына диск қалыңдығының әсері



4-сурет. Негізгі резонанстық орнықсыздық облысы шекарасына сызықты еместік шамасының әсері.  
Жұқа дискі жағдайы

Құрылғының параметрлері ротордың орнықсыздық облысының өрнегіне (19) енеді екен. Оларды өзгерте отырып, резонанстық құбылысты шығарып тастайтындай ротордың тиімді жұмыс режимін таңдап алуымызға болады. Сонымен, ротордың диск қалыңдығының, масса дисбалансы мен еңкіштігінің, олардың өзара бағдарлануының, серпімді тірегінің сызықты емес параметрінің, сол сияқты тұтқыр үйкелістің машинаның бас резонанстық тербелістерінің орнықтылығына зерттеу нәтижелері ротордың қауіпсіз жұмыс жасайтын жылдамдықтар облысын анықтауға, жүйенің сенімді жұмыс істеуі үшін тиімді параметрлерін табуға мүмкіндік береді.

ӘДЕБИЕТ

- 1 Бенсон. Установившиеся колебания консольного ротора с перекосом и дисбалансом диска // Конструирование и технология машиностроения. – 1983. – Т. 105, № 4. – С. 35-40.
- 2 Исаков Ж. Установившиеся колебания двух опорного консольного ротора с перекосом и дисбалансом диска. // Доклады АН. – 2008. – № 1. – С. 18-25.
- 3 Тулешов А.К., Исаков Ж., Калыбаева А.К. Динамика вертикального гироскопического ротора с перекосом диска и дисбалансом массы. // Вестник КазНПУ им. Абая. Сер. физ.-мат. наук. – 2010. – № 3(31). – С. 184-194.
- 4 Төлешов А.К., Исаков Ж., Калыбаева А.К. Массасының дисбалансы мен дискісінің еңкіштігі бар бейсимметриялық ротордың орныққан тербелістері. // Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университетінің Хабаршысы. – 2010. – № 4(67). – Б. 264-271.
- 5 Хаяси Т. Нелинейные колебания в физических системах. – М.: Мир, 1968.
- 6 Szemplinska-Stupnicka W. Higher harmonic oscillations in heteronomous nonlinear systems with one degree of freedom // Internal. J. Nonlinear Mech. – 1968. – Vol. 3, N 1. – P. 17-30.
- 7 Кыдырбекулы А.Б. Колебания и устойчивость роторных систем и плоских механизмов с нелинейно-упругими характеристиками: Дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. – Алматы, 2011. – 271 с.

REFERENCES

1. Benson. Ustanovivshiesya kolebaniya konsol'nogo rotora s perekosom i disbalansom diska // Konstruirovaniye i tehnologiya mashinostroeniya. – 1983. -T.105, №4. – С.35-40.
2. Isakov ZH. Ustanovivshiesya kolebaniya dvuh opornogo konsol'nogo rotora s perekosom i disbalansom diska. // Doklady Akademii nauk Respubliki Kazakhstan. – 2008. -№ 1. – С.18 – 25.
3. Tuleshov A.K., Isakov ZH., Kalibaeva A.K. Dinamika vertikal'nogo geroskopicheskogo rotora s perekosom diska i disbalansom massy. // Vestnik KazNPU imeni Abaya. Seriya fiziko – matematicheskikh nauk. – Almaty, 2010. - № 3 (31). - С. 184 – 194.
4. Toleshov A.K., Isakov ZH., Kalibaeva A.K. Massasinin disbalansi men diskisinin enkishtigi bar beysimetriyalik rotordyn ornykkan terbelisteri. // All-Farabi atyndagy Kazak Ul'tytk Universitetinin Habarshysy. – Almaty, 2010. -№ 4(67). – B. 264 – 271.
5. Hayasi T. Nelineynie kolebaniya v fizicheskikh sistemah. M.: Mir, 1968.
6. Szemplinska-Stupnicka W. Higher harmonic oscillations in heteronomous nonlinear systems with one degree of freedom //Internal.J.Nonlinear Mech.-1968.-Vol.3, N1.-P.17-30.
7. Kidirbekuli A.B. Kolebaniya istoychivost' rotornih system i ploskih mehanizmov s nelieyno-uprugimi haraktersitikami: Dis. Dokt. tehn. nauk:01.02.06.- Almaty, 2011.-271s.

Ж. Исаков

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕЗОНАНСНОГО КОЛЕБАНИЯ  
ВЕРТИКАЛЬНОГО ЖЕСТКОГО ГИРОСКОПА

Рассматривается вертикальный жесткий гироскопический ротор, у которого диск имеет перекос и дисбаланс массы. С целью построения динамической модели машины найдены выражения кинетической энергии, нелинейной функции Рэлея, потенциальной энергии ротора с учетом геометрически нелинейной характеристики упругой опоры, моменты внешних сил и составлены уравнения движения в форме Лагранжа. Для исследования устойчивости на их основе записываются уравнения в вариациях, а затем уравнения типа Хилла. В соответствии с теорией Флоке решения ставятся в эти уравнения и используя метод гармонического баланса находится критерий устойчивости. Графически определяется область резонансной неустойчивости и исследуется влияние на нее угла между ориентациями дисбалансов, толщины диска и величины нелинейности.

Zh. Isakov

TIK QATAŇ TEŇGERILMEGEN GIROSKOPTYQ ROTORDYŇ SYZYQTY EMES  
REZONANSTYQ TERBELISTERINIŇ ORNYQTYLYGY

A vertical hard gyroscopic rotor at that a disk has a defect and disbalance of mass is examined. For complete description of motion of rotor the dynamic model of machine is built. Expressions of kinetic energy, nonlinear function of Рэлея are found for this purpose, to potential energy of rotor taking into account geometrically nonlinear description of resilient support, moments of external forces and worked out equations of motion in form Lagrange. For research of stability on their basis equalizations are written down in variations, and then equalizations of type of Hill. In accordance with the theory of Floke of decision put in these equalizations and using the method of harmonic balance to be criterion of stability. The area of resonant instability is graphically determined and influence is investigated on her corner between the orientations of disbalances, thickness of disk and size of non-linearity.



М. Д. ШИНИБАЕВ<sup>1</sup>, А. А. БЕКОВ<sup>1</sup>, С. К. ДОСЫБЕКОВ<sup>2</sup>,  
А. М. ТАСКУЛОВА<sup>2</sup>, К. С. НУРСЕЙТОВ<sup>2</sup>, К. С. АСТЕМЕСОВА<sup>3</sup>

## МЕТОД КЕПЛЕРОВСКИХ ОСКУЛИРУЮЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ ВО ВТОРОЙ ЗАДАЧЕ ХИЛЛА

<sup>1</sup>Институт космических исследований им. У. М. Султангазина, АО «НЦКИТ», г. Алматы;

<sup>2</sup>Южно-Казахстанский государственный университет им. М. О. Ауезова, г. Шымкент;

<sup>3</sup>Казахский национальный технический университет им. К. И. Сатпаева, г. Алматы

*Предлагается метод решения второй задачи Хилла в кеплеровских оскулирующих элементах.*

В работе [1] была решена вторая задача Хилла методом обращения эллиптических интегралов 1-го рода в цилиндрической системе координат. Это решение обладало следующими недостатками:

- 1) решение давало только часть орбиты эллиптического типа.
- 2) решение было справедливо только для орбит малого наклона.

Поэтому в [2] была сделана попытка решения второй задачи Хилла в кеплеровских оскулирующих элементах, и было получено решение в квадратурах.

В данной работе предлагается новый приближенный метод решения второй задачи Хилла в оскулирующих кеплеровских элементах.

Силовая функция Хилла имеет вид:

$$U = \frac{\mu}{r} + \frac{1}{2}vr^2 + \frac{1}{2}(v' - v)Z^2, \quad (1)$$

здесь  $\mu$  – произведение постоянной тяготения на сумму масс центрального тела и спутника (пробного тела);  $v$  и  $v'$  – постоянные коэффициенты;  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ;  $x, y, z$  – планетоцентрические координаты спутника.

Силовая функция (1) аппроксимирует нецентральное поле тяготения сжатого сфероида (Земли).

Введем неподвижную систему координат  $Oxyz$  с началом в центре масс Земли, тогда дифференциальные уравнения движения спутника будут иметь вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu \frac{x}{r^3} = X, \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \mu \frac{y}{r^3} = Y, \quad \frac{d^2z}{dt^2} + \mu \frac{z}{r^3} = Z, \quad (2)$$

где  $X = vx$ ,  $Y = vy$ ,  $Z = v'z$ .

Если учесть, что  $v$  и  $v'$  – малые величины, то уравнения первого приближения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu \frac{x}{r^3} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \mu \frac{y}{r^3} = 0, \quad \frac{d^2z}{dt^2} + \mu \frac{z}{r^3} = 0 \quad (3)$$

допускают общее решение [3]

$$\left. \begin{aligned} x &= r\alpha, \quad y = r\beta, \quad z = r\gamma, \quad r = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta}, \\ \dot{x} &= \sqrt{\frac{\mu}{p}} [\alpha e \sin \vartheta + \alpha'(1 + e \cos \vartheta)], \\ \dot{y} &= \sqrt{\frac{\mu}{p}} [\beta e \sin \vartheta + \beta'(1 + e \cos \vartheta)], \\ \dot{z} &= \sqrt{\frac{\mu}{p}} [\gamma e \sin \vartheta + \gamma'(1 + e \cos \vartheta)], \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i, & \alpha' &= \frac{d\alpha}{du}, \\ \beta &= \cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i, & \beta' &= \frac{d\beta}{du}, \\ \gamma &= \sin u \sin i, & \gamma' &= \frac{d\gamma}{du}, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

аргумент широты

$$u = \vartheta + \omega, \quad (6)$$

истинная аномалия  $\vartheta$  связана со временем  $t$  следующим соотношением

$$t - \tau = \frac{p^{3/2}}{\mu^{1/2}} \int_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{(1 + e \cos \vartheta)^2}, \quad (7)$$

параметр орбиты

$$p = \frac{c^2}{\mu}, \quad (8)$$

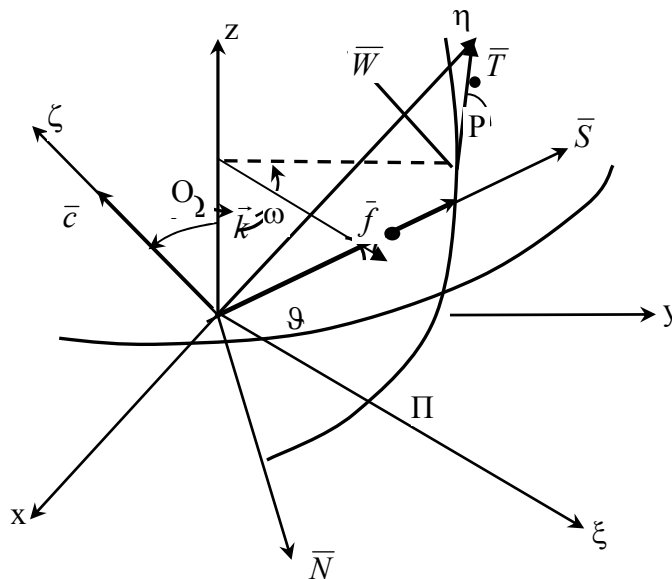
$c$  – постоянная интеграла площадей;  $f$  – модуль вектора Лапласа;  $e$  – эксцентриситет орбиты;  $\tau$  – время прохождения через перигеум;  $\Omega$  – долгота восходящего узла;  $\omega$  – угловое расстояние перигеума; произвольными постоянными интегрирования в этих формулах являются элементы кеплеровской орбиты  $\Omega, i, \omega, p, e, \tau$ .

Пусть начальные условия

$$t = t_0, \quad x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0, \quad \dot{x} = \dot{x}_0, \quad \dot{y} = \dot{y}_0, \quad \dot{z} = \dot{z}_0 \quad (9)$$

допускают эллиптический тип движения, тогда в соответствии с методом Лагранжа истинное движение спутника, определяемое дифференциальными уравнениями (2), будет представлять собой непрерывно изменяющийся кеплеровский эллипс. При этом общее решение уравнений (2) будет иметь вид, совпадающий с решением (4), только в них кеплеровские элементы будут непрерывными функциями времени, т.е.

$$\Omega(t), \quad i(t), \quad \omega(t), \quad p(t), \quad e(t), \quad \tau(t).$$



Введем в рассмотрение две системы координат: неподвижную  $Oxyz$  и подвижную  $PSTW$  с началом в центре масс спутника, здесь  $\bar{S}$  направлено по радиусу-вектору,  $\bar{T}$  направлено перпендикулярно радиусу-вектору в плоскости мгновенной орбиты и  $\bar{W}$  направлено перпендикулярно

плоскости ST.

В этих предположениях запишем уравнения Ньютона [3]

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Omega}{d\vartheta} &= \frac{r}{p} \sin u \cos eci \cdot \tilde{W}^*, \quad \frac{di}{d\vartheta} = \frac{r}{p} \cos u \cdot \tilde{W}^*, \\ \frac{d\omega}{d\vartheta} &= -\frac{\cos \vartheta}{e} \cdot \tilde{S}^* + \frac{\sin \vartheta}{e} \left(1 + \frac{r}{p}\right) \tilde{T}^* - \frac{r}{p} \sin u \operatorname{ctg} i \cdot \tilde{W}^*, \\ \frac{dp}{d\vartheta} &= 2r\tilde{T}^*, \quad \frac{de}{d\vartheta} = \tilde{S}^* \sin \vartheta + \left[ \cos \vartheta + (\cos \vartheta + e) \frac{r}{p} \right] \cdot \tilde{T}^*, \\ \frac{d\tau}{d\vartheta} &= \frac{p}{e} \sqrt{\frac{p}{e}} \cdot \left[ (eN \sin \vartheta - \cos \vartheta) \tilde{S}^* + \frac{p}{r} N \tilde{T}^* \right] \frac{r^2}{p^2}, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

где

$$\tilde{S}^* = K\tilde{S}, \quad \tilde{T}^* = K\tilde{T}, \quad \tilde{W}^* = K\tilde{W} \quad (11)$$

и

$$K = \left[ \frac{\sqrt{\mu} \sqrt{p}}{r^2} + \frac{\cos \vartheta}{e} \tilde{S} - \frac{\sin \vartheta}{e} \left(1 + \frac{r}{p}\right) \tilde{T} \right]^{-1}, \quad (12)$$

$$S = \alpha X + \beta Y + \gamma Z, \quad T = \alpha' X + \beta' Y + \gamma' Z, \quad W = \alpha'' X + \beta'' Y + \gamma'' Z, \quad (13)$$

$$\tilde{S} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \cdot S, \quad \tilde{T} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \cdot T, \quad \tilde{W} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \cdot W, \quad (14)$$

$$N = 2 \frac{p^2}{r^2} \int_0^\vartheta \frac{\cos \vartheta}{(1 + e \cos \vartheta)^2} d\vartheta, \quad (15)$$

$$\alpha'' = \sin \Omega \sin i, \quad \beta'' = -\cos \Omega \sin i, \quad \gamma'' = \cos i. \quad (16)$$

Выполним следующие разложения в степенные ряды с точностью  $O(e^2)$  и  $O(v)$  для исходного эллипса с кеплеровскими элементами  $\Omega_0, i_0, \omega_0, p_0, e_0, \tau_0$ :

$$\frac{r_0}{p_0} = 1 - e_0 \cos \vartheta + e_0^2 \cos^2 \vartheta + O(e^3), \quad (17)$$

$$\left( \frac{r_0}{p_0} \right)^2 = 1 - 2e_0 \cos \vartheta + \frac{3}{2} e_0^2 + \frac{3}{2} e_0^2 \cos 2\vartheta + O(e^3), \quad (18)$$

$$t - \tau_0 = p_0 \sqrt{\frac{p_0}{\mu}} \left( \vartheta - 2e_0 \sin \vartheta + \frac{3}{2} e_0^2 \vartheta + \frac{3}{4} e_0^2 \sin 2\vartheta \right) + O(e^3), \quad (19)$$

$$N_0 = \left( 2 + \frac{1}{2} e_0^2 \right) \sin \vartheta - 2e_0 \vartheta + e_0 \sin 2\vartheta - \frac{1}{2} e_0^2 \sin 3\vartheta - 4e_0^2 \vartheta \cos \vartheta + O(e^3). \quad (20)$$

Из (5) имеем

$$\alpha_0 = \alpha_1 \cos \vartheta + \alpha_2 \sin \vartheta, \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \cos \Omega_0 \cos \omega_0 - \sin \Omega_0 \cos i_0 \sin \omega_0, \\ \alpha_2 &= -(\cos \Omega_0 \sin \omega_0 + \sin \Omega_0 \cos i_0 \cos \omega_0); \\ \beta_0 &= \beta_1 \cos \vartheta + \beta_2 \sin \vartheta, \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \cos \omega_0 \cos \Omega_0 + \sin \omega_0 \cos \Omega_0 \cos i_0, \\ \beta_2 &= \cos \omega_0 \cos \Omega_0 \cos i_0 - \sin \omega_0 \sin \Omega_0; \\ \gamma_0 &= \gamma_1 \cos \vartheta + \gamma_2 \sin \vartheta,\end{aligned}\quad (23)$$

где

$$\gamma_1 = \sin \omega_0 \sin i_0, \quad \gamma_2 = \cos \omega_0 \sin i_0.$$

Из (16) находим

$$\alpha_0'' = \sin \Omega_0 \sin i_0, \quad \beta_0'' = -\cos \Omega_0 \sin i_0, \quad \gamma_0'' = \cos i_0. \quad (24)$$

Из (5) найдем

$$\alpha'_0 = \alpha'_1 \cos \vartheta + \alpha'_2 \sin \vartheta, \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned}\alpha'_1 &= -\cos \Omega_0 \sin \omega_0 - \sin \Omega_0 \cos i_0, \\ \alpha'_2 &= \sin \Omega_0 \sin \omega_0 \cos i_0 - \cos \Omega_0 \cos \omega_0; \\ \beta'_0 &= \beta'_1 \cos \vartheta + \beta'_2 \sin \vartheta,\end{aligned}\quad (26)$$

где

$$\begin{aligned}\beta'_1 &= -\sin \Omega_0 \sin \omega_0 + \cos \Omega_0 \cos i_0 \cos \omega_0, \\ \beta'_2 &= -\sin \Omega_0 \cos \omega_0 - \cos \Omega_0 \cos i_0 \sin \omega_0; \\ \gamma'_0 &= \gamma'_1 \cos \vartheta + \gamma'_2 \sin \vartheta,\end{aligned}\quad (27)$$

где

$$\gamma'_1 = \cos \omega_0 \sin i_0, \quad \gamma'_2 = -\sin \omega_0 \sin i_0.$$

Далее из (11)÷(14) находим

$$\begin{aligned}K &= K_0 + K_1 e_0^2 + K_2 v + (K_3 e_0 + K_4 v) \cos \vartheta + K_5 e_0^2 \cos 2\vartheta + K_6 v \cos 3\vartheta + \\ &+ K_7 v \cos 4\vartheta + K_8 v \sin \vartheta + K_9 v \sin 2\vartheta + K_{10} v \sin 3\vartheta + K_{11} v \sin 4\vartheta,\end{aligned}\quad (28)$$

$$\tilde{S}^* = vK_0 (A_1 + A_2 \cos 2\vartheta + A_3 \sin 2\vartheta), \quad (29)$$

$$\tilde{T}^* = vK_0 (B_1 + B_2 \cos 2\vartheta + B_3 \sin 2\vartheta), \quad (30)$$

$$\tilde{W}^* = vK_0 (C_1 \cos \vartheta + C_2 \sin \vartheta), \quad (31)$$

где

$$K_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu} \cdot \sqrt{p_0} \cdot p_0^2}, \quad K_1 = -\frac{3}{2} K_0, \quad K_2 = -K_0^2 \cdot \frac{1}{4} \bar{B}_3, \quad K_3 = 2K_0, \quad K_4 = -K_0^2 \cdot \frac{A_2 - 2B_3 + 2A_1}{2e_0},$$

$$K_5 = K_1, \quad K_6 = -K_0^2 \cdot \frac{A_2 + 2B_3}{2e_0}, \quad K_7 = K_0^2 \cdot \frac{B_3}{4}, \quad K_8 = K_0^2 \cdot \frac{(4B_1 - A_3 - 2B_2)}{2e_0}, \quad K_9 = -\frac{K_0^2 B_1}{2},$$

$$K_{10} = \frac{K_0^2 (2B_2 - A_3)}{2e_0}, \quad K_{11} = -\frac{K_0^2 B_2}{4};$$

$$A_1 = \sqrt{\frac{p_0}{\mu}} \cdot \left[ a_1 + b_1 + \left( \frac{v'}{v} \right) c_1 \right], \quad A_2 = \sqrt{\frac{p_0}{\mu}} \cdot \left[ a_2 + b_2 + \left( \frac{v'}{v} \right) c_2 \right],$$

$$A_3 = \sqrt{\frac{p_0}{\mu}} \cdot \left[ a_3 + b_3 + \left( \frac{v'}{v} \right) c_3 \right];$$

$$a_1 = p_0 \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{2}, \quad a_2 = p_0 \frac{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}{2}, \quad a_3 = p_0 \alpha_1 \alpha_2;$$

$$\begin{aligned}
 b_1 &= p_0 \frac{\beta_1^2 + \beta_2^2}{2}, \quad b_2 = p_0 \frac{\beta_1^2 - \beta_2^2}{2}, \quad b_3 = p_0 \beta_1 \beta_2; \\
 c_1 &= p_0 \frac{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}{2}, \quad c_2 = p_0 \frac{\gamma_1^2 - \gamma_2^2}{2}, \quad c_3 = p_0 \gamma_1 \gamma_2; \\
 B_1 &= \sqrt{\frac{p_0}{\mu}} \cdot \frac{p_0}{2} \left[ \alpha'_1 \alpha_1 + \alpha'_2 \alpha_2 + \beta'_1 \beta_1 + \beta'_2 \beta_2 + \frac{v'}{v} (\gamma'_1 \gamma_1 + \gamma'_2 \gamma_2) \right], \\
 B_2 &= \sqrt{\frac{p_0}{\mu}} \cdot \frac{p_0}{2} \left[ \alpha'_1 \alpha_1 - \alpha'_2 \alpha_2 + \beta'_1 \beta_1 - \beta'_2 \beta_2 + \frac{v'}{v} (\gamma'_1 \gamma_1 - \gamma'_2 \gamma_2) \right], \\
 B_3 &= \sqrt{\frac{p_0}{\mu}} \cdot \frac{p_0}{2} \left[ \alpha'_1 \alpha_2 + \alpha'_2 \alpha_1 + \beta'_1 \beta_2 + \beta'_2 \beta_1 + \frac{v'}{v} (\gamma'_1 \gamma_2 + \gamma'_2 \gamma_1) \right]; \\
 C_1 &= \sqrt{\frac{p_0}{2}} \cdot p_0 \cdot \alpha''_0 \alpha_1, \quad C_2 = \sqrt{\frac{p_0}{2}} \cdot p_0 \cdot \alpha''_0 \alpha_2.
 \end{aligned}$$

Полагая

$$\left. \begin{aligned}
 \Omega(\vartheta) &= \Omega_0 + \Delta\Omega, \quad i(\vartheta) = i_0 + \Delta i, \quad \omega(\vartheta) = \omega_0 + \Delta\omega, \\
 p(\vartheta) &= p_0 + \Delta p, \quad e(\vartheta) = e_0 + \Delta e, \quad \tau(\vartheta) = \tau_0 + \Delta\tau,
 \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

с учетом выражений (17)-(31) перепишем (10) в следующем виде:

$$\frac{d(\Delta\Omega)}{d\vartheta} = v(\Omega_1 + \Omega_2 \cos 2\vartheta + \Omega_3 \sin 2\vartheta), \quad (33)$$

где

$$\begin{aligned}
 \Omega_1 &= \frac{K_0}{\sin i_0} (C_1 \sin \omega_0 + C_2 \cos \omega_0), \quad \Omega_2 = \frac{K_0}{2 \sin i_0} (C_1 \sin \omega_0 - C_2 \cos \omega_0), \\
 \Omega_3 &= \frac{K_0}{2 \sin i_0} (C_1 \cos \omega_0 + C_2 \sin \omega_0); \quad \frac{d(\Delta i)}{d\vartheta} = v(I_0 + I_1 \cos 2\vartheta + I_2 \sin 2\vartheta),
 \end{aligned} \quad (34)$$

где

$$\begin{aligned}
 I_0 &= \frac{1}{2} K_0 (C_1 \cos \omega_0 - C_2 \sin \omega_0), \quad I_1 = \frac{1}{2} K_0 (C_1 \cos \omega_0 + C_2 \sin \omega_0), \\
 I_2 &= \frac{1}{2} K_0 (C_2 \cos \omega_0 - C_1 \sin \omega_0);
 \end{aligned}$$

$$\frac{d(\Delta\omega)}{d\vartheta} = v(\omega_1 + \omega_2 \cos \vartheta + \omega_3 \cos 2\vartheta + \omega_4 \cos 3\vartheta + \omega_5 \sin \vartheta + \omega_6 \sin 2\vartheta + \omega_7 \sin 3\vartheta), \quad (35)$$

где

$$\begin{aligned}
 \omega_1 &= -\frac{K_0 \operatorname{ctg} i_0}{2} (C_1 \sin \omega_0 + C_2 \cos \omega_0), \quad \omega_2 = \frac{K_0}{e_0} \left( B_3 - A_1 - \frac{1}{2} A_2 \right), \\
 \omega_3 &= \frac{K_0 \operatorname{ctg} i_0}{2} (C_2 \cos \omega_0 - C_1 \sin \omega_0), \quad \omega_4 = -\frac{K_0}{e_0} \left( B_0 + \frac{1}{2} A_2 \right), \quad \omega_5 = \frac{K_0}{e_0} \left( B_1 - B_2 - \frac{1}{2} A_3 \right), \\
 \omega_6 &= -\frac{K_0 \operatorname{ctg} i_0}{2} (C_1 \cos \omega_0 + C_2 \sin \omega_0), \quad \omega_7 = \frac{K_0}{e_0} \left( B_2 - \frac{1}{2} A_3 \right); \\
 \frac{d(\Delta p)}{d\vartheta} &= v(p_1 + p_2 \cos 2\vartheta + p_3 \sin 2\vartheta),
 \end{aligned} \quad (36)$$

где

$$p_1 = 2p_0 K_0 B_1, \quad p_2 = 2p_0 K_0 B_2, \quad p_3 = 2p_0 K_0 B_3;$$

$$\frac{d(\Delta e)}{d\vartheta} = \nu(e_1 \sin \vartheta + e_2 \sin 3\vartheta + e_3 \cos \vartheta + e_4 \cos 3\vartheta), \quad (37)$$

где

$$e_1 = K_0 \left( A_1 - \frac{1}{2} A_2 + B_3 \right), \quad e_2 = K_0 \left( \frac{1}{2} A_2 + B_3 \right), \quad e_3 = K_0 \left( \frac{1}{2} A_3 + 2B_1 + B_2 \right),$$

$$e_4 = K_0 \left( B_2 - \frac{1}{2} A_3 \right); \quad \frac{d(\Delta \tau)}{d\vartheta} = \nu(\tau_1 \cos \vartheta + \tau_2 \cos 3\vartheta + \tau_3 \sin \vartheta + \tau_4 \sin 3\vartheta), \quad (38)$$

где

$$\tau_1 = \tau_{00} \left( B_3 - A_1 - \frac{1}{2} A_2 \right), \quad \tau_{00} = \frac{p_0 \sqrt{p_0 K_0}}{e \sqrt{\mu}}, \quad \tau_2 = -\tau_{00} \left( \frac{1}{2} A_2 - B_3 \right),$$

$$\tau_3 = \tau_{00} \left( 2B_1 - B_2 - \frac{1}{2} A_3 \right), \quad \tau_4 = \tau_{00} \left( B_2 - \frac{1}{2} A_3 \right).$$

Проинтегрируем (33)÷(38) от нуля до верхних переменных пределов и учтем (32), тогда найдем оскулирующие кеплеровские элементы спутника в первом приближении:

$$\Omega = \Omega_0 + \nu \left( \Omega_1 \vartheta + \frac{1}{2} \Omega_2 \sin 2\vartheta - \frac{1}{2} \Omega_3 \cos 2\vartheta \right) + \nu \left( \frac{1}{2} \Omega_3 \right), \quad (39)$$

$$i = i_0 + \nu \left( I_0 \vartheta + \frac{1}{2} I_1 \sin 2\vartheta - \frac{1}{2} I_2 \cos 2\vartheta \right) + \nu \left( \frac{1}{2} I_2 \right), \quad (40)$$

$$\omega = \omega_0 + \nu \left( \omega_1 \vartheta + \omega_2 \sin \vartheta + \frac{1}{2} \omega_3 \sin 2\vartheta + \frac{1}{3} \omega_4 \sin 3\vartheta - \omega_5 \cos \vartheta - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \omega_6 \cos 2\vartheta - \frac{1}{3} \omega_7 \cos 3\vartheta \right) + \nu \left( \omega_5 + \frac{1}{2} \omega_6 + \frac{1}{3} \omega_7 \right), \quad (41)$$

$$p = p_0 + \nu \left( p_1 \vartheta + \frac{1}{2} p_2 \sin 2\vartheta - \frac{1}{2} p_3 \cos 2\vartheta \right) + \nu \left( \frac{1}{2} p_3 \right), \quad (42)$$

$$e = e_0 + \nu \left( -e_1 \cos \vartheta - \frac{1}{3} e_2 \cos 3\vartheta + e_3 \sin \vartheta + \frac{1}{3} e_4 \sin 3\vartheta \right) + \nu \left( e_1 + \frac{1}{3} e_2 \right), \quad (43)$$

$$\tau = \tau_0 + \nu \left( \tau_1 \sin \vartheta + \frac{1}{3} \tau_2 \sin 3\vartheta - \tau_3 \cos \vartheta - \frac{1}{3} \tau_4 \cos 3\vartheta \right) + \nu \left( \tau_3 + \frac{1}{3} \tau_4 \right). \quad (44)$$

Подставив (39)÷(44) в (5), можно получить в первом приближении решение системы нелинейных дифференциальных уравнений (2) в декартовых прямоугольных координатах.

Анализируя кеплеровские оскулирующие элементы (39)÷(44), можно утверждать, что линейные возмущения  $\nu x$ ,  $\nu y$ ,  $\nu' z$  приводят к появлению в переменных  $x, y, z, \Omega, i, \omega, p$  вековых членов, следовательно:

1) линия восходящего узла  $ON$  вращается относительно оси  $Oz$ , и перемещается против хода стрелки часов в плоскости  $Oxy$ ;

2) фокальная ось  $O\xi$  вращается относительно оси  $Oz$ , перицентр эллипса перемещается совместно с  $O\xi$ ;

3) время прохождения через перицентр колеблется с незначительной амплитудой в окрестности величины  $\tau_0$ ;

4) эксцентриситет орбиты также совершает колебания с малой амплитудой в окрестности начального значения  $e_0$  и будет меньше предела Лапласа;

5) в силу малости  $\nu$  в целом возмущенная орбита будет мало отличаться от невозмущенной;

6) параметр орбиты является линейной функцией времени, размер орбиты изменяется и возмущенная орбита в отличие от невозмущенной будет незамкнутой.

Таким образом, выражения (39)÷(44) дают решение второй задачи Хилла для эллиптического типа движения спутника при любом наклоне орбиты, т.е. поставленная цель достигнута.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Шинибаев М.Д. Поступательное движение пассивно гравитирующего тела в центральном и нецентральном поле тяготения. – Алматы: РИО ВАК РК, 2001. – 128 с.
- 2 Шинибаев М.Д., Таскулова А.М., Нурсейитов К.С. Определение кеплеровских элементов второй задачи Хилла // Известия НАН РК. – 2008. – № 4. – С. 44-46.
- 3 Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. – М.: Наука, 1968. – 799 с.

REFERENCES

1. *Shinibaev M.D.* Postupatelnoe dvizhenie passivno gravitiruyezego tela v centralnom i necentralnom pole tyagotenia.- Almaty: RIO VAK RK, 2001, 128 s.
2. *Shinibaev M.D., Taskulova A.M., Nurseitov K.S.* Opredelenie keplerovskih elementov vtoroi zadachi Hilla// Izvestia NAN RK. 2008. № 4. S. 44-46.
3. *Duboshin G.N.* Nebesnaya mehanika: Osnovnye zadachi i metody. M.: Nauka, 1968, 799 s.

*М. Д. Шыныбаев, А. А. Беков, С. К. Досыбеков,  
А. М. Тасқұлова, К. С. Нұрсейітов, К. С. Астемесова*

ХИЛЛДЫҢ ЕКІНШІ ЕСЕБІНДЕГІ КЕПЛЕРДІҢ  
ОСКУЛЯЦИЯЛЫҚ ЭЛЕМЕНТТЕР ӘДІСІ

Хиллдың екінші есебін Кеплердің оскуляциялық элементтер әдісімен шешу жолы ұсынылған.

*M. D. Shinibaev, A. A. Bekov, S. K. Dosibekov,  
A. M. Taskulova, K. S. Nurseitov, K. S. Astemesova*

THE METHOD OF KEPLERIAN OSQULATING ELEMENTS  
IN THE SECOND PROBLEM THE HILL

The method of solving the second Hill's problem in Kepler's osqulating elements is considered.

М. Д. ШИНИБАЕВ<sup>1</sup>, А. А. БЕКОВ<sup>1</sup>, С. С. БЕКБОЛАТОВА<sup>2</sup>, Б. ТИЛЕУБЕРДИЕВ<sup>2</sup>,  
К. С. АСТЕМЕСОВА<sup>3</sup>, Д. И. УСИПБЕКОВА<sup>3</sup>

## ПАРАБОЛИЧЕСКИЙ ТИП ДВИЖЕНИЯ ИСЗ В СТАЦИОНАРНОМ ПОЛЕ ТЯГОТЕНИЯ ЗЕМЛИ

<sup>1</sup>Институт космических исследований им. У. М. Султангазина АО «НЦКТИТ», г. Алматы;

<sup>2</sup>Академический инновационный университет, г. Шымкент;

<sup>3</sup>Казахский национальный технический университет им. К. И. Сатпаева, г. Алматы

*Найдены полярные координаты ИСЗ в случае параболического типа движения в стационарном поле тяготения Земли.*

Пусть спутник, относящийся к разряду близких, совершает орбитальные движения относительно Земли. Дифференциальные уравнения движения в переменных Хилла имеют вид [1]

$$d\vartheta = \frac{wdw}{\sqrt{\alpha + Hw^2 + 2w^3 - w^4}}, \quad (1)$$

$$\frac{dt}{d\vartheta} = \frac{C^3}{w^2\mu^2}, \quad H = \frac{2hC^2}{\mu^2}, \quad (2)$$

где  $C$  – постоянная интеграла площадей;  $\vartheta$  – истинная долгота;  $w$  – переменная Хилла, связанная с полярным радиусом  $\rho$  следующим выражением

$$\frac{1}{\rho} = w \frac{\mu}{C^2}, \quad (3)$$

$\mu$  – гравитационный параметр,  $\alpha$  – const,  $H$  – const,  $h$  – постоянная интеграла энергии.

Целью данной работы является определение полярных координат ИСЗ в случае параболического типа движения в виде явной функции времени.

В этом случае  $\alpha > 0$ ,  $H = 0$ , поэтому дифференциальное уравнение (1) имеет вид

$$d\vartheta = \frac{wdw}{\sqrt{\alpha + 2w^3 - w^4}}. \quad (4)$$

Установим количество положительных, отрицательных и комплексных корней подкоренного полинома, т.е.

$$G_4(w) = \alpha + 2w^3 - w^4 = 0. \quad (5)$$

Пользуясь теоремой Декарта и следствием этой теоремы, найдем типы корней и введем обозначения:  $\alpha_1$  – положительный корень,  $\alpha_2$  – отрицательный корень,  $\alpha_3$  и  $\alpha_4$  – комплексно сопряженные корни. Учитывая, что в реальных движениях подкоренной полином только положителен, можно выделить область возможности движения. В полиноме (5) старший коэффициент отрицателен. Область возможности движения состоит из одного интервала  $\alpha_2 < w < \alpha_1$ ,  $\alpha_3 = b_1 + ic_1$ ,  $\alpha_4 = b_1 - ic_1$ .

Рассмотрим движение ИСЗ на этом интервале.

На интервале  $\alpha_2 < w < \alpha_1$  справедливо следующее преобразование (4) к нормальной форме Лежандра [2]:

$$d\vartheta = \mu_* \frac{wd\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}, \quad (6)$$

где

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\psi}{2} = \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2} \cdot \frac{\alpha_1 - w}{w - \alpha_2}, \quad \theta_1 < \frac{\pi}{2}, \quad \theta_2 < \frac{\pi}{2} \quad (7)$$



при  $w = \alpha_1, \psi = 0$ , при  $w = \alpha_2, \psi = \pi$ ,

$$k^2 = \sin^2 \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}, \mu_* = -\frac{1}{c_1} (\cos \theta_1 \cos \theta_2)^{1/2}, \operatorname{tg} \theta_1 = \frac{\alpha_1 - b_1}{c_1}, \operatorname{tg} \theta_2 = \frac{\alpha_2 - b_1}{c_1},$$

$$b_1 > 0, c_1 > 0, \alpha_1 > 0, \alpha_2 < 0, \alpha_3 = b_1 + ic_1, \alpha_4 = b_1 - ic_1.$$

Пользуясь тригонометрическими соотношениями, можно записать:

$$k^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(\theta_1 - \theta_2), 1 - 2k^2 = \mu_*^2 [c_1^2 + (\alpha_1 - b_1)\alpha_2 - b_1], \operatorname{tg}^2 \frac{\psi}{2} = \frac{1 - \cos \psi}{1 + \cos \psi}.$$

Найдем  $w$  из (7)

$$w = \frac{\alpha_1 \cos \theta_1 + \alpha_2 \cos \theta_2 \operatorname{tg}^2 \frac{\psi}{2}}{\cos \theta_1 + \cos \theta_2 \operatorname{tg}^2 \frac{\psi}{2}}, \quad (8)$$

где  $\alpha_1 = c_1 \operatorname{tg} \theta_1 + b_1, \alpha_2 = c_1 \operatorname{tg} \theta_2 + b_1$ .

Подставив значения  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  в это выражение, выделив члены с модулем эллиптических интегралов первого рода, выражение для  $w$  представим в виде

$$w = m_0 + (m_1 k + m_2 k^3) \cos \psi + (m_3 k^2 + m_4 k^4) \cos^2 \psi + m_5 k^3 \cos^3 \psi + m_6 k^4 \cos^4 \psi. \quad (9)$$

Здесь

$$m_0 = b_1 + c_1 \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2), m_1 = c_1 \left[ 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) \right], m_2 = \frac{m_1}{2},$$

$$m_3 = c_1 \left[ \operatorname{tg}^3 \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) - c \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) \right], m_4 = c_1 \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) \cdot \left( 1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right),$$

$$m_5 = \operatorname{tg}^2 \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}, m_6 = c_1 \operatorname{tg}^3 \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}.$$

Пользуясь выражением (9), найдем  $w^{-2}$

$$w^{-2} = m_{00} + (m_{01} k + m_{03} k^3) \cos \psi + (m_{12} k^2 + m_{14} k^4) \cdot \cos^2 \psi + m_{23} k^3 \cos^3 \psi + m_{34} k^4 \cos^4 \psi. \quad (10)$$

Здесь

$$m_{00} = m_0^{-2}, m_{01} = -\frac{2m_1}{m_0^3}, m_{03} = -\frac{2m_2}{m_0^3}, m_{12} = \frac{1}{m_0^3} \left( \frac{3m_1^2}{m_0} - 2m_3 \right), m_{14} = \frac{2}{m_0^3} \left( \frac{3m_1 m_2}{m_0} - m_4 \right),$$

$$m_{23} = -\frac{2}{m_0^3} \left( m_5 + \frac{2m_1^3}{m_0^2} + \frac{2m_1 m_3}{m_0} \right), m_{34} = \frac{1}{m_0^3} \left( \frac{5m_1^4}{m_0^3} + \frac{3m_3^2}{m_0} - 2m_6 - \frac{4m_1 m_5}{m_0} \right).$$

Найдем полярный угол  $\vartheta$ , проинтегрировав исходное уравнение по верхним переменным пределам:

$$\mathcal{G} = (e_0 + k^2 e_1 + k^4 e_2) \psi + k e_3 + k^3 e_4 + k^4 e_5 \sin \psi + (k^2 e_6 + k^4 e_7) \sin 2\psi + (k^3 e_8 + k^4 e_9) \sin 3\psi + k^4 e_{10} \sin 4\psi. \quad (11)$$

Здесь

$$e_0 = \mu_* (b_1 + c_1 \xi), \xi = \operatorname{tg} \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}, e_1 = \mu_* \left( \frac{1}{4} b_1 + c_1 \xi \right), e_2 = \mu_* \left( \frac{9}{64} b_1 + e_{04} c_1 \xi \right), e_3 = \mu_* e_{11} c_1 \xi,$$

$$e_5 = \mu_* e_{14} c_1 \xi, e_6 = \frac{1}{2} \mu_* \left( -\frac{1}{4} b_1 + e_{22} c_1 \xi \right), e_7 = \frac{1}{2} \mu_* \left( -\frac{3}{16} b_1 + e_{24} c_1 \xi \right), e_8 = \frac{1}{3} e_{33} \mu_* c_1 \xi, e_9 = \frac{1}{3} e_{34} \mu_* c_1 \xi,$$

$$e_{10} = \frac{3}{256} \mu_* b_1 + \frac{1}{4} e_{44} \mu_* c_1 \xi, e_{02} = \frac{1}{2} \left( \xi^2 - \frac{1}{2} \right), e_{04} = -\frac{1}{16} + \frac{3}{8} \xi^2 - \frac{3}{8} \xi, e_{11} = \xi^{-1} - \xi,$$

$$e_{13} = \frac{8}{5} \xi^{-1} + \xi + \frac{3}{4} \xi^3, e_{14} = -\frac{3}{8} \xi, e_{22} = \frac{1}{2} \xi^2 - \frac{3}{4}, e_{24} = \frac{1}{2} (\xi^2 - \xi),$$

$$e_{33} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \xi^3 + \xi - \frac{1}{4} \xi^{-1} \right), e_{34} = \frac{3}{8} \xi, e_{44} = \frac{3}{32} + \frac{1}{8} \xi^2 - \frac{1}{8} \xi.$$

Принимая во внимание  $dt = \frac{C^3}{\mu^2} w^{-2} d\vartheta$ , найдем

$$t = (I_{00} + k^2 I_{02} + k^4 I_{04})\psi + (kI_{11} + k^3 I_{13} + \kappa^4 I_{14}) \sin \psi + (k^2 I_{22} + k^4 I_{24}) \sin 2\psi + (k^3 I_{33} + k^4 I_{34}) \sin 3\psi + k^4 I_{44} \sin 4\psi, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} I_{00} &= \frac{C}{\mu} m_{00} e_0, I_{02} = \frac{C}{\mu^2} \left( m_{00} e_1 + \frac{1}{2} m_{12} e_0 + \frac{1}{2} m_{01} e_3 \right), \\ I_{04} &= \frac{C}{\mu^2} \left( m_{00} e_2 + \frac{1}{2} m_{14} e_0 + \frac{1}{2} m_{03} e_3 + \frac{1}{2} m_{12} e_1 + \frac{1}{2} m_{01} e_4 + \frac{3}{8} m_{23} e_3 + \frac{3}{8} m_{34} e_0 + \frac{1}{2} m_{12} e_6 \right), \\ I_{11} &= \frac{C}{\mu^2} (m_{00} e_3 + m_{01} e_0), \quad I_{13} = \frac{C}{\mu^2} \left( m_{00} e_4 + m_{03} e_0 + m_{01} e_1 + \frac{3}{4} m_{23} e_0 + \frac{3}{4} m_{12} e_3 + m_{01} e_0 \right), \\ I_{14} &= \frac{C}{\mu^2} m_{00} e_5, I_{22} = \frac{C}{2\mu^2} \left( 2m_{00} e_6 + \frac{1}{2} m_{12} e_0 + \frac{1}{2} m_{01} e_3 \right), \\ I_{24} &= \frac{C}{2\mu^2} \left( 2m_{00} e_7 + \frac{1}{2} m_{14} e_0 + \frac{1}{2} m_{03} e_3 + \frac{1}{2} m_{12} e_1 + \frac{1}{2} m_{01} e_4 + \frac{1}{2} m_{23} e_3 + \frac{1}{2} m_{34} e_0 + \right. \\ &= m_{12} e_6 + \frac{3}{2} m_{01} e_8, \quad I_{33} = \frac{C}{3\mu^2} \left( 3m_{00} e_8 + \frac{1}{4} m_{23} e_0 + \frac{1}{4} m_{12} e_3 + m_{01} e_6 \right), \\ I_{34} &= \frac{C}{\mu^2} m_{00} e_9, I_{44} = \frac{C}{4\mu^2} \left( 4m_{00} e_{10} + \frac{1}{8} m_{23} e_3 + \frac{1}{8} m_{34} e_0 + \frac{1}{2} m_{12} e_6 + \frac{3}{2} m_{01} e_8 \right). \end{aligned}$$

Обратив выражение (12) и используя решение уравнения Лагранжа [3], найдем зависимость  $\psi = \psi(t)$ :

$$\psi = (\bar{I}_1 + k^2 \bar{I}_2 + k^4 \bar{I}_3)t + (k\bar{I}_4 + k^3 \bar{I}_5 + k^4 \bar{I}_6) \sin t + (k^2 \bar{I}_7 + k^4 \bar{I}_8) \sin 2t + (k^3 \bar{I}_9 + k^4 \bar{I}_{10}) \sin 3t + k^4 \bar{I}_{11} \sin 4t, \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{I}_1 &= I_{00}^{-1}, \bar{I}_2 = -\bar{I}_1^2 I_{02}, \bar{I}_3 = -\bar{I}_1^2 (I_{02} - I_{04}), \bar{I}_4 = -I_{11} I_{00}^{-1}, \bar{I}_5 = -\bar{I}_1 \left( I_{13} + I_{11} I_{02} \bar{I}_1 + \frac{1}{2} I_{11} I_{22} \right), \bar{I}_6 = -I_{14} \cdot \bar{I}_1, \\ \bar{I}_7 &= \bar{I}_1 (I_{11}^2 / 2 - I_{22}), \bar{I}_8 = \bar{I}_1 (I_{22} \cdot I_{02} \bar{I}_1 - I_{24}), \bar{I}_9 = \bar{I}_1 \left( \frac{3}{2} I_{11} I_{22} - I_{33} \right), \bar{I}_{10} = -\bar{I}_1 I_{34}, \bar{I}_{11} = \bar{I}_1 (I_{22}^2 - I_{44}). \end{aligned}$$

Принимая во внимание выражение  $\rho = \frac{C^2}{\mu} w^{-1}$ , находим полярный радиус:

$$\rho = \rho_{00} + (\rho_{01} k + \rho_{02} k^2) \cos \psi + (\rho_{12} k^2 + \rho_{13} k^3 + \rho_{14} k^4) \cos^2 \psi + (\rho_{23} k^3 + \rho_{24} k^4) \cos^3 \psi + \rho_{34} k^4 \cos^4 \psi, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} \rho_{00} &= \frac{C^2}{\mu} m_0^{-1}, \rho_{01} = -\frac{m_1}{m_0} \rho_{00}, \rho_{02} = -\frac{m_2}{m_0} \rho_{00}, \rho_{12} = \rho_{00} \frac{m_1^2 - m_3 m_0}{m_0^2}, \rho_{13} = \rho_{00} \frac{2m_1 m_2}{m_0^2}, \\ \rho_{14} &= \rho_{00} \frac{m_2^2 - m_1 m_0}{m_0^2}, \rho_{23} = \rho_{00} m_0^{-1} \left( \frac{2m_1}{m_0} - m_5 - \frac{m_1^2}{m_0^2} \right), \rho_{24} = \rho_{00} \frac{m_2}{m_0^2} (2m_3 - 3m_1), \\ \rho_{34} &= \rho_{00} m_0^{-1} (2m_1 m_5 m_0^{-1} + m_3^2 m_0^{-1} - m_6). \end{aligned}$$

Выражения (11) и (14) посредством (13) определяют  $\vartheta$  и  $\rho$  как явные функции времени. Полученные полярные координаты можно использовать для построения решений дифференциальных уравнений ИСЗ в случае нестационарного поля тяготения центрального поля.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Шинибаев М.Д. Поступательное движение пассивно гравитирующего тела в центральном и нецентральном поле тяготения. – Алматы: РИО ВАК РК, 2001. – 128 с.
- 2 Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1970. – 720 с.
- 3 Дубошин Г.Н. Небесная механика: Основные задачи и методы. – М., 1968. – 799 с.

REFERENCES

1. *Shinibaev M.D.* Postupatelnoe dvizhenie passivno gravitiruyezgo tela v centralnom i necentralnom pole tyagotenia.-Almaty: RIO VAK RK, 2001, 128s.
2. *Korn G., Korn T.* Spravochnik po matematike dlya nauchnyh rabotnikov i inzhenerov.-Moskva, "Nauka". 1970, 720s.
3. *Duboshin G.N.* Nebesnaya mehanika: Osnovnye zadachi i metody.-Moskva, 1968, 799s.

*М. Д. Шыныбаев, А. А. Беков, С. С. Бекболатова, Б. Тілеубердиев,  
К. С. Астемесова, Д. И. Өсіпбекова*

ЖЕРДІҢ СТАЦИОНАРЛЫҚ ТАРТЫЛУ ӨРІСІНДЕГІ  
ЖЖС ПАРАБОЛАЛЫҚ ҚОЗҒАЛЫС ТҮРІ

Жердің стационарлық тартылу өрісінің параболалық қозғалыс түрі жағдайындағы ЖЖС-нің полярлық координаттары табылды.

*M. D. Shinibaev, A. A. Bekov, S. S. Bekbolatova, B. Tileuberdiev,  
K. S. Astemesova, D. I. Usipbekova*

PARABOLIC TYPE MOTION OF ARTIFICIAL EARTH SATELLITE  
IN STATIONARY EARTH GRAVITATIONAL FIELD

The polar coordinates of AES in the case of parabolic motion in stationary Earth gravitational field are received.

УДК 539.21

Ф. Б. БАИМБЕТОВ, А. М. ЖУКЕШОВ, А. У. АМРЕНОВА, А. Т. ГАБДУЛЛИНА

## ОСОБЕННОСТИ РАБОТЫ ИМПУЛЬСНОГО ПЛАЗМЕННОГО УСКОРИТЕЛЯ В РЕЖИМЕ СО СПЛОШНЫМ НАПОЛНЕНИЕМ

Научно-исследовательский институт экспериментальной и теоретической физики при КазНУ им. аль-Фараби, г. Алматы

В настоящее время актуальна разработка перспективных наукоемких технологий для развития производства в Казахстане. Одним из таких направлений является обработка материалов импульсными плазменными потоками, генерируемыми на плазменных ускорителях.

Плазменный ускоритель собран по схеме Маршалла со сплошным наполнением рабочего газа. Сплошной режим отличается от импульсного [1] тем, что в лайнере изначально создается небольшое начальное давление газа. Задача управления установкой состоит в выполнении условия Пашена для плазмообразующего газа, при котором происходит почти стопроцентная ионизация рабочего вещества.

Исследованы основные параметры установки: зависимости тока и скорости плазменного потока от напряжения.

На рис. 1 приведен график тока от напряжения для внешнего разрядного контура. Экспериментальные результаты показывают прямо пропорциональную зависимость тока от напряжения во всем диапазоне. При более детальном исследовании участка 16-20 кВ обнаружена особенность, заключающаяся в том, что при увеличении напряжения ток остается на некотором постоянном уровне (см. вставку).

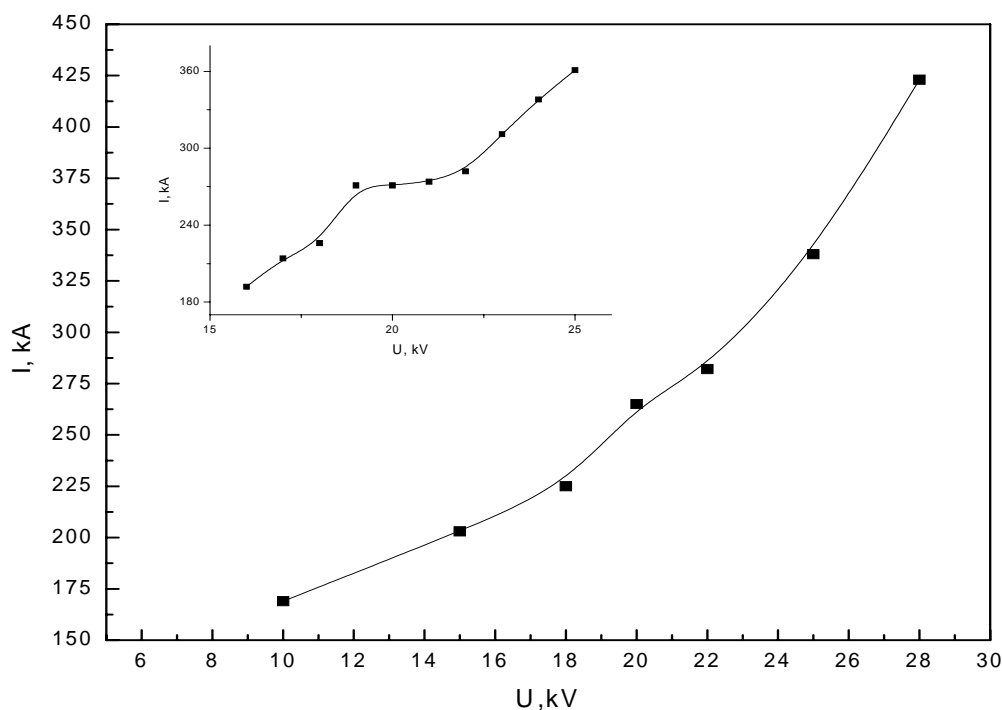


Рис. 1. Зависимость разрядного тока от напряжения

Данный эффект можно объяснить тем, что при определенном напряжении энергия магнитного поля, создаваемая при разряде, расходуется на генерацию быстрых частиц в плазме, которые уносят часть энергии. Как известно из литературы [2], при определенных режимах работы ускорителя происходит излучение (например, жесткого рентгеновского излучения). При этом на зависимости разрядного тока от времени наблюдаются характерные всплески. Проведенные нами исследования осциллограмм разрядного тока показали, что на кривых разрядного тока всплески отсутствуют. Тем не менее, мы склонны к тому, что данные измерения недостаточно чувствительны к обнаружению таких особенностей.

Для более детального исследования этого явления мы использовали пояс Роговского, установленный внутри лайнера на расстоянии 2 см от торца внешнего электрода. Результаты измерения тока приведены на рис. 2. Как видно, на этом графике указанная выше особенность поведения тока хорошо видна.

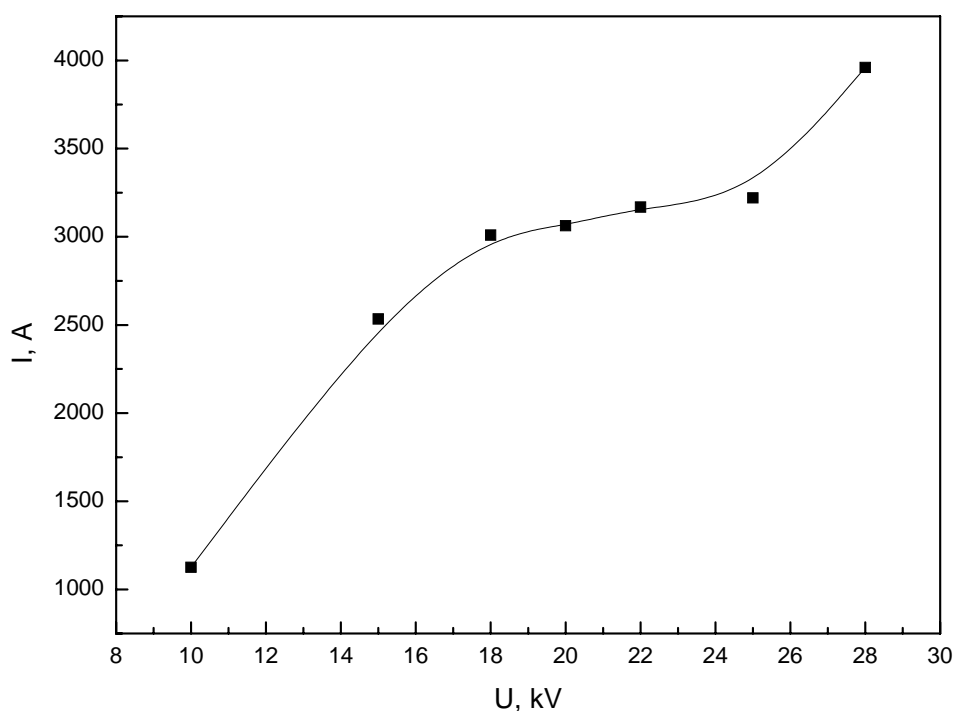


Рис. 2. Зависимость тока в плазме от напряжения

Для импульсных плазменных ускорителей наиболее важным параметром является скорость потока. В работе скорость плазменных потоков в лайнере определялась при помощи системы, состоящей из двух магнитных датчиков. Датчики закреплены на массивном железном держателе, который можно перемещать по длине лайнера. Расстояние между датчиками фиксировано и равно 33 см. Скорость фиксировали по положению максимумов тока на экране осциллографа С8-14. По временному сдвигу между пиками сигналов определялась скорость потока плазмы. Время развертки  $\tau = 5$  мкс.

Результаты экспериментальных измерений показаны на рис. 3. По временному сдвигу между пиками сигналов определялась скорость потока плазмы. Скорость плазмы была рассчитана по формуле:

$$g = \frac{\ell}{t},$$

где  $\ell$  – расстояние двух датчиков.

Как видно из рис. 3, зависимость скорости от напряжения нелинейная. Максимальная скорость потока при напряжении 28 кВ составила  $(96 \pm 5)$  км/с. Эти данные хорошо согласуются с ранее полученными результатами, а также с теоретическими расчетами и данными других авторов [1].

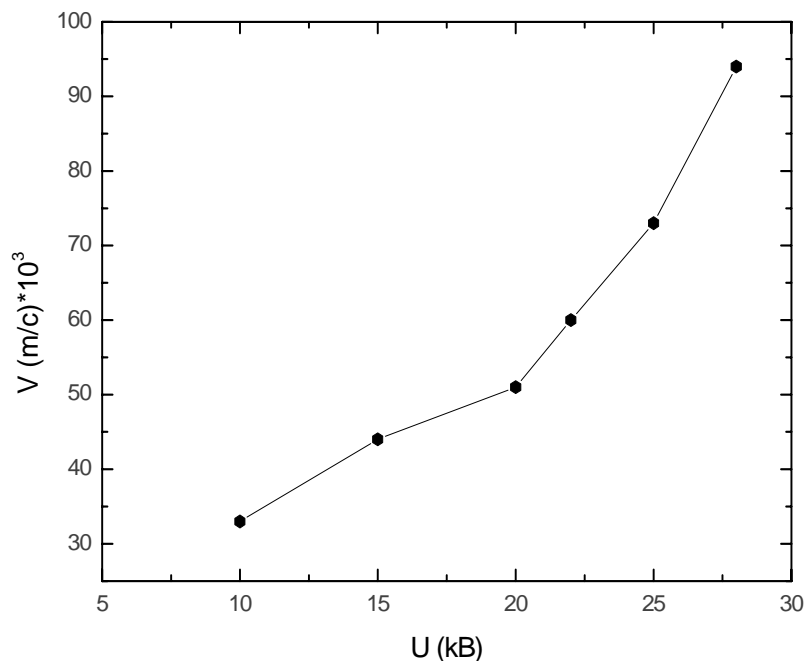


Рис. 3. Зависимость скорости от напряжения

Таким образом, экспериментально определены электротехнические характеристики плазменного ускорителя и измерена скорость плазменного потока. Определены режимы работы ускорителя, приводящие к появлению особенностей на кривой разрядного тока, появляющимся при напряжения 16-20 кВ. Обнаруженный эффект требует более детального исследования с применением ядерно-физических методов.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 Сиднев В.В., Скворцов Ю.В., Соловьева В.Г., Умрихин Н.М. Особенности электродинамического ускорения водородной плазмы больших скоростей // Физика плазмы. – 1984. – Т. 10, вып. 2. – 390 с.
- 2 Арцимович Л.В., Андрианов А.М., Доброхотов Е.И., Лукьянов С.Ю. Жесткое излучение импульсных разрядов // Атомная энергия. – 1956. – № 3. – 84 с.

**Ф. Б. Байымбетов**, А. М. Жүкешов, А. У. Әмренова, А. Т. Ғабдуллина

#### ТҮТАС ТОЛТЫРЫЛҒАН РЕЖИМДЕГІ ИМПУЛЬСТІК ПЛАЗМАЛЫҚ ҮДЕТКІШ ЖҰМЫСЫНЫҢ ЕРЕКШЕЛІКТЕРІ

Импульсті плазмалық үдеткішті тұтас режимде қолданып, импульсті плазмалық ағынды анық-тау кезінде жаңа мағлұматтар алынған. Разряд токтарының және ағын жылдамдығының кернеуге тәуелді-ліктері келтірілген. Токтың кернеуге тәуелділігінде кернеудің (16-20 кВ) бөлігінде ерекшелік белгіленген.

**F. B. Baimbetov**, A. M. Zhukeshov, A. U. Avrenova, A. T. Gabdullina

#### FEATURES OF A PULSED PLASMA ACCELERATOR IN THE SOLID-FILLING CONDITION

In work new data by definition of parameters of a pulse plasma stream obtained at use PPA in a continuous mode. Dependences of a arc current and speed of a stream on a voltage are received. It is established, that there is a site of a voltage (16-20 кV) on which feature in dependence of a current on a voltage is observed.

Н. Х. БАСТЫКОВА, С. К. КОДАНОВА, Т. С. РАМАЗАНОВ, С. А. МАЙОРОВ

## МОДЕЛИРОВАНИЕ КИНЕТИКИ ЭЛЕКТРОНОВ В ГАЗОРАЗРЯДНОЙ ПЛАЗМЕ

НИИЭТФ, КазНУ им. аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан,  
Институт общей физики РАН, г. Москва, Россия

*Для пространственно однородного электрического поля исследовался дрейф электронов в одноатомном газе. Функции распределения электронов по энергиям находились путем решения кинетического уравнения Больцмана в двухчленном приближении и методом Монте Карло. Учитывались как упругие, так и неупругие соударения электронов с атомами, рекомбинация на стенках. Рассчитаны интегральные характеристики дрейфа электронов в газе, позволяющие выполнить анализ дрейфа электронов на качественном уровне. Приведены результаты расчетов энергобаланса электронов и характеристик дрейфа в аргоне при напряженностях приведенного поля  $1 < E/N < 28 \text{ Td}$ .*

**Введение.** Диффузия и дрейф электронов в газах хорошо изучена как теоретически, так и экспериментально [1, 2]. Но в последние годы наблюдается большой интерес к моделированию кинетики электронов в низкотемпературной плазме из-за многочисленных технологических приложений. Именно численное моделирование позволяет получить точную и полную информацию о характеристиках газоразрядной плазмы, необходимую, в частности, для понимания и интерпретации свойств пылевых образований в плазме.

Во многих работах по исследованию пылевой плазмы в газовом разряде постоянного тока при пониженном давлении газа полагается, что электроны плазмы имеют максвелловское распределение с температурой, определяемой из зондовых измерений [3]. В качестве альтернативной модели иногда используется распределение Дрювестейна, которое не приводит к значительному отличию в характеристиках пылевой плазмы (см. недавнюю работу [4]). Но хорошо известно, что распределения Максвелла и Дрювестейна значительно отличаются от реальных распределений электронов по энергии в газовом разряде, поскольку в самостоятельном разряде решающий вклад в распределение электронов по скоростям вносят процессы ионизации и рекомбинации.

Рассмотрим наиболее простую постановку – дрейф электрона в однородном и постоянном электрическом поле. Предположим, что электрон движется под воздействием однородного электрического поля, испытывая только упругие столкновения с атомами. Тогда в очень слабых полях отклонение средней энергии электронов от энергии атомов невелико, функция распределения электронов по энергии близка к распределению атомов, которое можно полагать максвелловской. Но в более сильном поле происходит резкое нарушение равновесия между электронной и атомной подсистемами и средняя энергия электрона становится значительно выше энергии атома. В этом случае функция распределения электрона по модулю скорости (при учете только упругих соударений) определяется балансом между джоулевым нагревом и потерями в упругих столкновениях с холодным газом [1, 2, 5]:

$$f_0(v) = A \exp \left( -\frac{3m}{M} \left( \frac{mN}{eE} \right)^2 \int_0^v c^3 \sigma_{el}^2(c) dc \right), \quad (1)$$

здесь  $m$ ,  $M$  – массы электрона и атома,  $\sigma_{el}$  – сечение упругих столкновений, константа  $A$  – определяется из условия нормировки  $1 = 4\pi \int_0^\infty c^2 f(c) dc$ .

В случае степенной зависимости сечения от скорости:  $\sigma_{el}(c) = \sigma_0 (c/c_0)^r$  – интеграл в (1) вычисляется. При  $\sigma_{el}(c) = \sigma_0 (c/c_0)^{-1/2}$ , когда постоянна частота столкновений, распределение (1) переходит в распределение Максвелла, при постоянном сечении:  $\sigma_{el}(c) = \sigma_0$ , распределение (1) переходит в распределение Дрювестейна [1, 2, 5].

Распределение Максвелла

$$f_{Maxwell}(\varepsilon) \propto \varepsilon^{1/2} \exp(-\varepsilon / T_e), \quad (2)$$

и распределение Дрювестейна

$$f_{Druvestein}(\varepsilon) \propto \varepsilon^{1/2} \exp(-\varepsilon^2 / \varepsilon_D^2), \quad (3)$$

описывает функцию распределения электронов только в случае отсутствия неупругих столкновений как рождения, так и гибели электронов. Тогда точность решения (1) определяется лишь погрешностью, с которой сечение столкновений аппроксимируется степенной зависимостью от скорости (при выполнении условия, что средняя энергия электронов значительно выше, чем у атомов).

В самостоятельном разряде электрон дрейфует и набирает энергию за счет джоулева нагрева, потом ее теряет при неупругом столкновении, далее при дрейфе снова начинает набирать энергию. Если его энергия становится больше величины потенциального барьера, то он почти сразу достигает стенки и рекомбинирует на ней. Но оба распределения – Максвелла (2) и Дрювестейна (3), как и более общее (1), не учитывают наличие постоянного дрейфа электронов вверх по энергетической оси. Поскольку именно неупругие процессы определяют характер протекания тока через газоразрядную трубку при самостоятельном разряде, то использование решения (1) в этом случае не является корректным.

Другим пределом для ФРЭЭ является «pipe-line» (трубопроводная) модель, в которой формирование ФРЭЭ модели определяется джоулевым нагревом и неупругими столкновениями, в то время как потери энергии электронов при упругих столкновениях с атомами полагаются несущественными [2, 4]. В трубопроводной модели джоулев нагрев представляет собой положительно направленный дрейф по энергии (т.е. энергия электрона непрерывно возрастает). Граничные условия в трубопроводной модели выбираются исходя из предположения, что электроны дрейфуют от первоначально нулевой энергии до некоторой максимальной энергии  $\varepsilon_{max}$ , где всю ее и теряют, производя акт ионизации или возбуждения.

При постоянной частоте столкновений электронов с атомами получаем следующее распределение электронов по энергии [3, 4]:

$$f(\varepsilon, \varepsilon_{max}) = [1 - (\varepsilon / \varepsilon_{max})^{1/2}] / 3\varepsilon_{max}. \quad (4)$$

Значение максимальной энергии  $\varepsilon_{max}$  можно положить равным либо энергии первого возбужденного уровня  $\varepsilon_{max} = E_1$ , либо потенциалу ионизации  $\varepsilon_{max} = I$ .

**Модель Монте-Карло.** Рассмотрим постановку задачи для моделирования самостоятельного газового разряда. Она должна включать в себя учет движения электронов в электрическом поле, упругие столкновения электронов с атомами, неупругие столкновения и гибель электронов. Для газового разряда постоянного тока трубке при пониженном давлении представляется необходимым учет ударной ионизации, затрат энергии на возбуждение атомов и рекомбинацию электронов на стенках трубки.

Процессы возбуждения, ионизации и рекомбинации в реальных экспериментальных условиях чаще всего не могут быть учтены в рамках пространственно-однородной (нуль-мерной) модели, поскольку электроны появляются в объеме трубки, а гибнут на ее поверхности. Поэтому распределение электронов и ионов по координатам даже в стационарном случае неоднородно. Тем не менее, можно принять в качестве грубого приближения модель пространственно-однородного дрейфа, а гибель электронов на стенках трубки учесть путем введения характерного времени ухода электронов на стенки (время жизни электронов). Введение времени жизни, одинакового для электронов с различными энергиями, как это делается во многих работах, не очень корректно. Ведь электрон с низкой энергией не может преодолеть потенциальный барьер стенки и находится внутри ямы так долго, пока его энергия не станет достаточно большой для преодоления потенциального барьера. Если же электрон обладает энергией, достаточной для преодоления потенциального барьера, то он практически сразу же уходит на стену и гибнет (рекомбинирует) на ней.

Поэтому в данной работе для учета рождения и убыли электронов использовался другой подход [6-8]. Для процесса дрейфа электронов в положительном столбе можно положить, что



общее число актов рождения и гибели электронов равны. Тогда учет гибели электронов на стенках можно сделать путем введения в алгоритм правила, по которому на каждый акт ионизации из ансамбля электронов убирается один электрон. Наиболее логичным для задачи о дрейфе электрона в положительном столбе будет предположение, что покидать ансамбль будет не появляющийся в результате акта ионизации электрон, а самый энергичный в рассматриваемом ансамбле. Средняя энергия электронов, которые покидают систему, может служить хорошей оценкой потенциала стенки. Таким образом, потенциал стенки определяется из условия равенства числа актов ионизации и уходов частиц из системы (число актов гибели на стенке).

При ионизации электронным ударом налетающий на атом электрон теряет энергию, равную сумме энергии ионизации и кинетической энергии второго электрона. После акта ионизации его энергия полагается равной:  $\varepsilon_1' = \varepsilon_1 - I - \varepsilon_2'$ . Положим, что энергия первого электрона с равной вероятностью принимает все возможные значения, а энергия второго электрона определяется из закона сохранения энергии:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1' &= (\varepsilon_1 - I)R, \\ \varepsilon_2' &= (\varepsilon_1 - I)(1 - R),\end{aligned}\tag{5}$$

где  $0 < R < 1$  – случайное число.

Для расчета характеристик дрейфа электронов в газе использовался метод Монте-Карло [6, 8]. После каждого столкновения проводилось интегрирование уравнения движения электрона в постоянном поле и, в соответствии с известными сечениями упругих и неупругих процессов, определялась вероятность того или иного события.

Рассмотрим энергобаланс электронов. При дрейфе в электрическом поле электроны приобретают энергию от электрического поля. В постоянном и однородном электрическом поле в единицу времени за счет джоулева нагрева электрон в среднем приобретает энергию

$$Q_{EW} = eEW,\tag{7}$$

здесь  $e$  – заряд электрона,  $E$  – напряженность электрического поля,  $W$  – скорость дрейфа. Рассмотрим случай, при котором энергия электронов значительно превышает энергию атомов. Тогда в стационарном, пространственно-однородном случае энергия, получаемая электроном, теряется в упругих столкновениях с атомами, затрачивается на возбуждение атомных уровней и ионизацию, кроме того электроны уносят или приобретают энергию при рекомбинации:

$$Q_{EW} = Q_{ea} + Q_{ex} + Q_{ion} + Q_{rec}.\tag{8}$$

Здесь в правой части представлены соответствующие средние за единицу времени энергопотери одного электрона (при рекомбинации электрон может и приобретать энергию, например, при тройной рекомбинации). В приведенных ниже расчетах пренебрегалось влиянием процессов рекомбинации на энергобаланс электронов, т.е. полагалось, что  $Q_{rec} = 0$ .

**Модель кинетического уравнения Больцмана.** В электрическом поле  $E$  одночастичная функция распределения электронов по скоростям  $F(r, v, t)$  определяется путем решения уравнением Больцмана [1, 2, 5]:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial F}{\partial \vec{r}} - \frac{e}{m} \vec{E} \cdot \frac{\partial F}{\partial \vec{v}} = St(F),\tag{9}$$

где  $St(F)$  – интеграл столкновений,  $r$  и  $v$  координата и скорость электронов,  $t$  – время.

Поскольку решение уравнения Больцмана (10) представляет собой весьма сложную задачу, то для описания кинетики электронов в газовом разряде часто используется двухчленное приближение. Уравнение Больцмана в двухчленном приближении для описания диффузии и дрейфа в однородном и постоянном электрическом поле имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}-\frac{eE_z v}{3\varepsilon} \frac{\partial (v f_1)}{\partial \varepsilon} &= S^{el}(f_0) + \sum_j S_j^{in}(f_0) + S_{ion}(f_0) + S_w(f_0), \\ -eE_z \frac{\partial f_0(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} &= -(N_g \sigma_m(\varepsilon)) f_1(\varepsilon)\end{aligned}\tag{10}$$

где  $S^{el}(f_0)$ ,  $S_j^{in}(f_0)$ ,  $S_{ion}(f_0)$  – интегралы упругих, неупругих и ионизирующих столкновений электронов с атомом,  $S_w(f_0)$  член, описывающий процесс гибели электронов на стенках разрядной трубки [1, 2, 5-7].

В настоящей работе система уравнений (10) решалась методом итераций [6, 7]. Полученные путем решения системы уравнений функции распределения использовались для вычисления различных характеристик дрейфа электронов. Определялись скорость дрейфа, средняя энергия электронов и т.д. (более подробное описание постановки задачи, метода решения и получаемых с помощью данной модели характеристиках см. работы [9, 10]). Имеются обоснованные сомнения в применимости двучленного приближения для описания свойств разряда в трубке [2]. В любом случае нельзя проводить равенства (как это зачастую делается) между решением кинетического уравнения Больцмана и двучленным приближением. Поскольку моделирование методом Монте Карло дает столь же точное описание, как и кинетическое уравнение Больцмана, то представляет большой методический интерес сравнение этих двух решений для определения погрешности при использовании двучленного приближения.

### Результаты расчетов и обсуждение

Рассмотрим вначале результаты моделирования дрейфа электронов при различных напряженностях электрического поля, которые могут быть в различных частях газового разряда. В расчетах методом Монте Карло использовалось условие гибели на стенках только для электронов с большой энергией и определялся потенциал стенки. В расчетах, полученных путем решения уравнения Больцмана, гибель электронов на стенках учитывалась путем введения времени рекомбинации на стенках [2, 5, 9, 10].

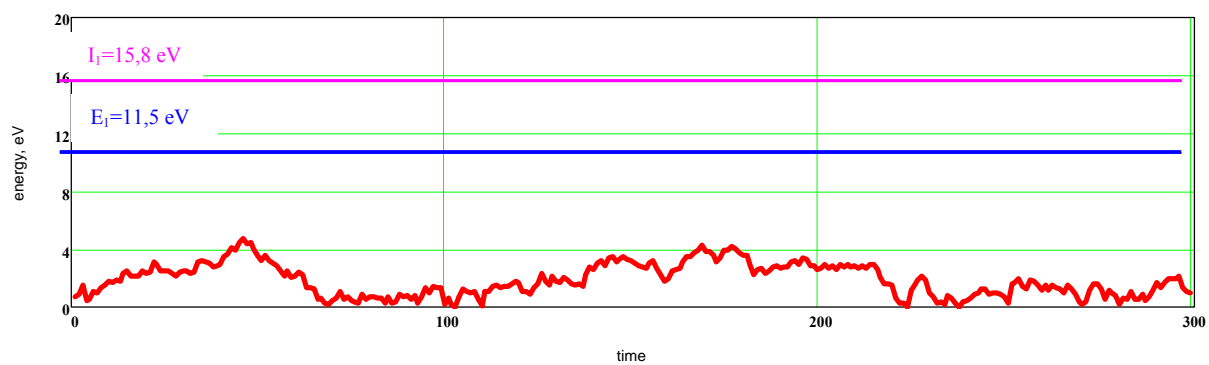
На рис. 1 приведена характерная зависимость энергии электрона от времени при значениях приведенного электрического поля 1, 10 и 28 Тд.

Рис. 1а – это режим “слабого” поля ( $E/N = 1$  Тд), когда энергия электрона не достигает до энергии возбуждения и ионизации. В этом случае электрон совершает хаотические перемещения по энергетической оси только за счет упругих столкновений с атомами, при которых в среднем теряет энергию  $\sim m/M$  за одно столкновение и приобретает энергию за счет джоулева нагрева. Функция распределения электронов по энергии в этом случае определяется формулой (1).

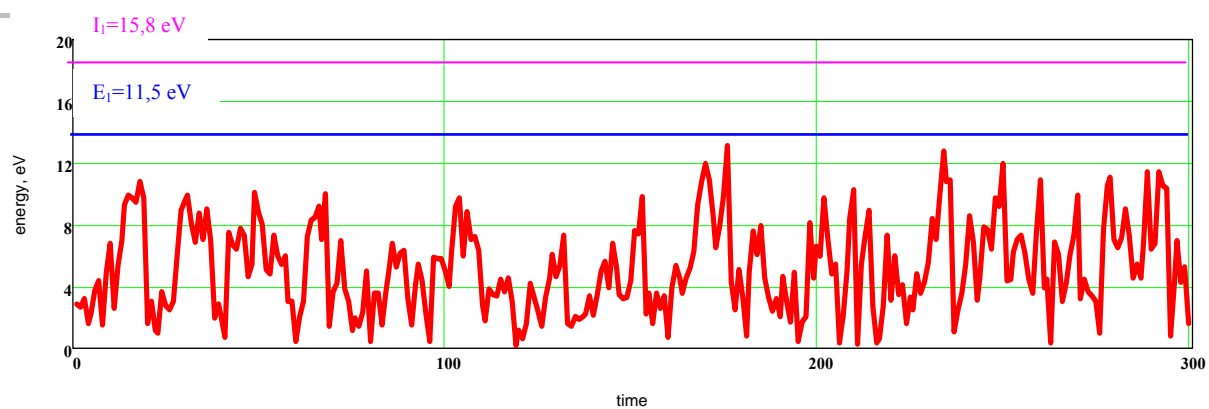
Рис. 1б – режим “умеренно сильного” поля ( $E/N = 10$  Тд), когда поле становится достаточно сильным, так что электрон может достигать до энергии возбуждения, но ударной ионизации из основного состояния еще нет. В таком случае самостоятельный разряд может существовать за счет ступенчатый ионизации.

Рис. 1в показывает характерную зависимость энергии электрона от времени для случая сильного поля, когда электрон может достигать до энергии возбуждения и ионизации. В таком случае разряд будет поддерживаться за счет поля без дополнительных источников ионизации, т.е. будет самостоятельным.

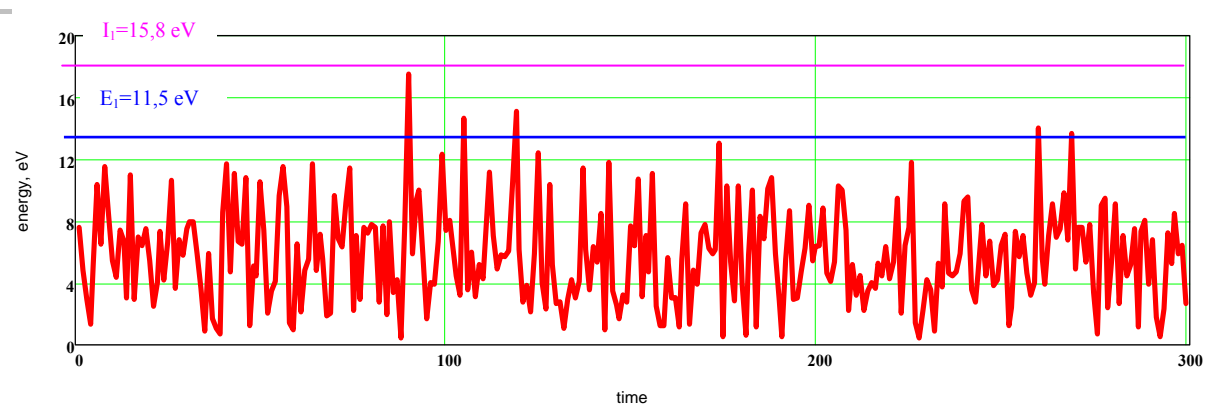
Для иллюстрации точности различных моделей на рис. 2 представлены результаты расчетов функций распределения электронов по энергии для трех вариантов значений приведенного поля из таблицы. В расчетах методом Монте Карло учитывалась конечность потенциала стенки и гибель электронов на ней, при решении двучленного приближения уравнения Больцмана использовалась модель амбиполярной диффузии электронов на стенки. Для сравнения, приведены также распределения Максвелла и Дрювестейна с такой же средней энергией электронов, как и в расчете методом Монте Карло. Из рисунков видно, что результаты расчетов ФРЭЭ с помощью уравнения Больцмана хорошо согласуются с результатами расчетов ФРЭЭ методом Монте Карло.



а) случай “слабого” поля ( $E/N = 1 \text{ Td}$ ), есть только упругие столкновения

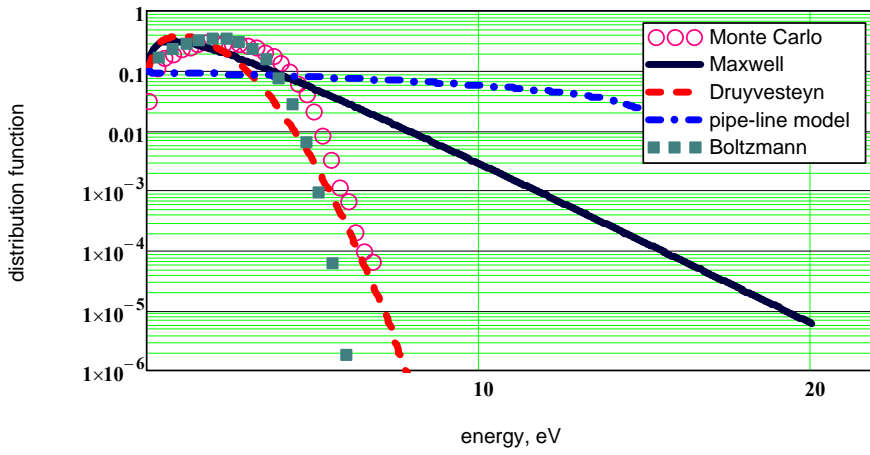
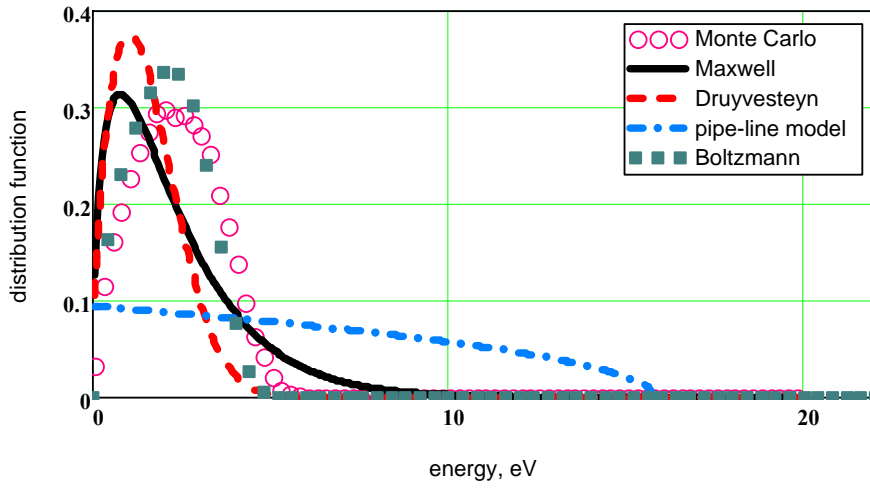


б) случай “умеренно сильного” поля ( $E/N = 10 \text{ Td}$ ), велики затраты на возбуждение

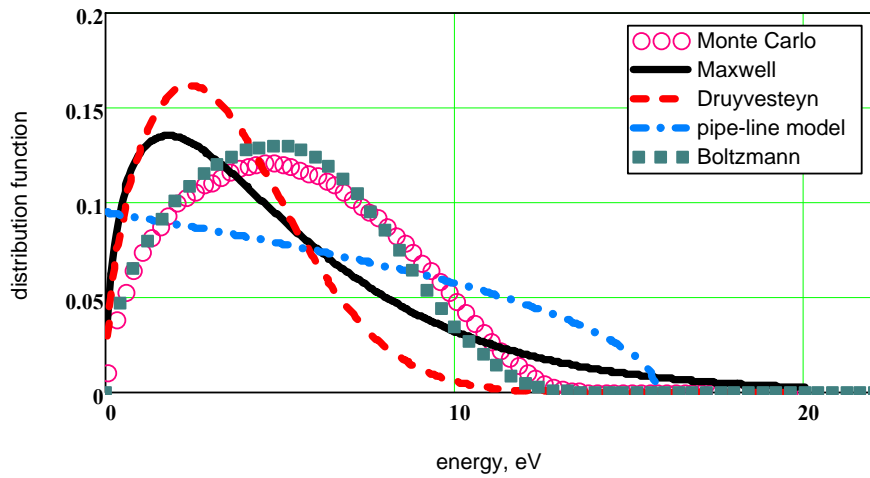


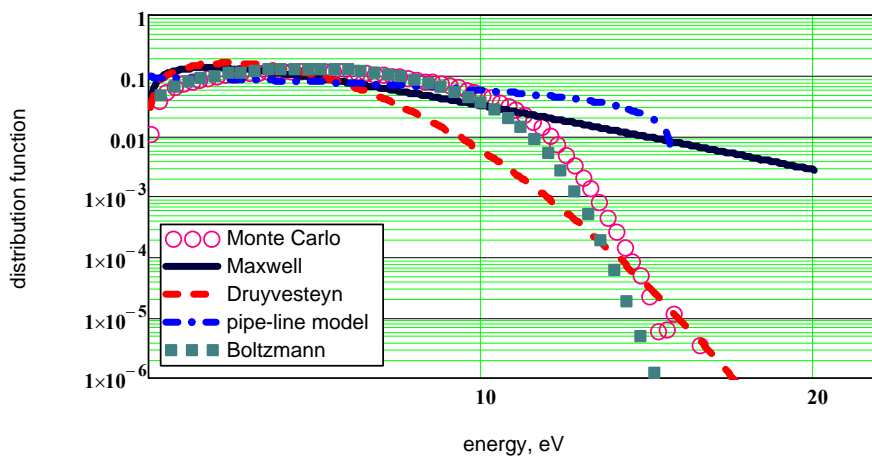
в) случай “сильного” поля ( $E/N = 28 \text{ Td}$ ) – начинается ионизация

**Рис. 1.** Энергия одного электрона как функция времени

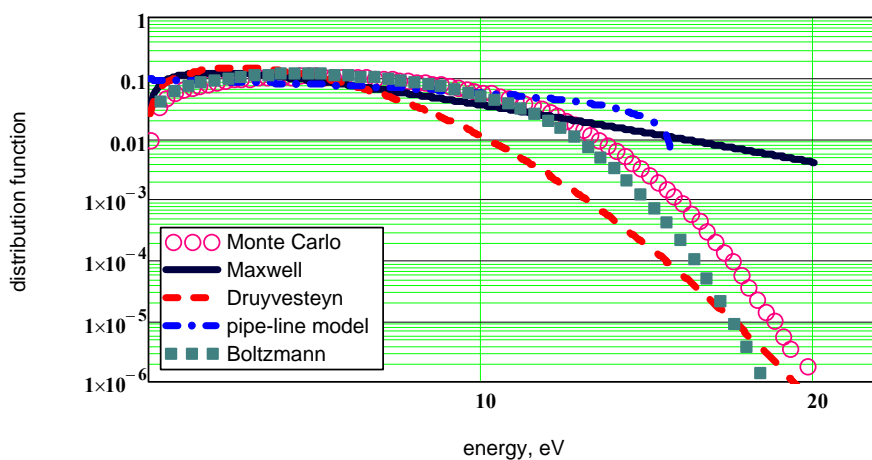
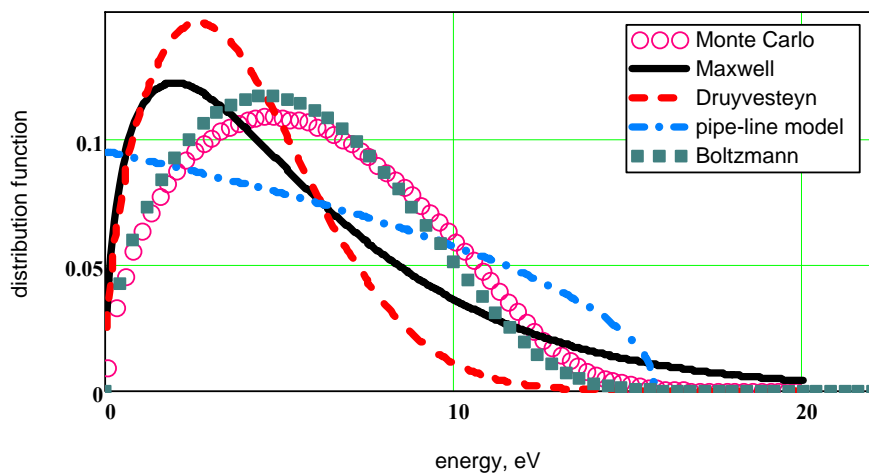


а) случай “слабого” поля ( $E/N = 1 \text{ Td}$ ), есть только упругие столкновения





б) случай “умеренно сильного” поля ( $E/N = 10$  Td), велики затраты на возбуждение



в) случай “сильного” поля ( $E/N = 28$  Td) – начинается ионизация

Рис. 2. Функция распределения электронов по энергиям для различных значений поля

Таблица 1. Характеристики дрейфа электронов в аргоне  
( $E_1=11,5$  эВ,  $I=15,8$  эВ) в зависимости от приведенного поля  $E/N=1,10,28$  Тд.,  $P=1$  Торр,  $T=298$  К.

Потенциал поверхности трубки -  $\varphi_{wall}$ , В

Скорость дрейфа -  $W$ , км/с

Средняя энергия -  $\langle \varepsilon \rangle$ , эВ

Энергетический коэффициент Таунсенда -  $eD_{\perp} / \mu$  эВ

Приведенный ионизационный коэффициент Таунсенда -  $\alpha / N_a$  в ед.  $10^{-16}$  см<sup>2</sup>.

Доля энерговклада от электрического поля на упругие потери в газ,

$(Q_{ea} / Q_{EW}) \cdot 100\%$ ,

Доля на возбуждение,  $(Q_{ex} / Q_{EW}) \cdot 100\%$ ,

Доля в ионизацию,  $(Q_{ion} / Q_{EW}) \cdot 100\%$ .

$E/N, Td$	1.0	10.0	28.0
$\varphi_{wall}$	–	13.0	15.0
$W, km/s MC$	32.4	97.1	240.0
$W, km/s Boltzmann$	30.1	95.3	237.8
$eD_{\perp} / \mu, \text{эВ}$	3.3	6.9	6.0
$\langle \varepsilon \rangle, \text{эВ, MC}$	2.4	5.4	5.3
$\langle \varepsilon \rangle, \text{эВ Boltzmann}$	2.2	5.1	5.6
$\alpha / N_a, 10^{-16} \text{ см}^2$	–	2.8E-05	5.8E-03
$(Q_{ea} / Q_{EW}) \cdot 100\%$	100	26.6	10.3
$(Q_{ex} / Q_{EW}) \cdot 100\%$	0	73.3	86.4
$(Q_{ion} / Q_{EW}) \cdot 100\%$	0	0.043	3.3
$\langle \varepsilon - E_1 \rangle, \text{эВ}$	0	1.1	2.2

В табл. 1 для этих трех характерных случаев приведены интегральные характеристики дрейфа электронов в однородном внешнем электрическом поле – скорость дрейфа, средняя энергия, доля затрат энерговклада на ионизацию и возбуждения атомов аргона. Отметим, что в случаях умеренно сильного и сильного поля энергозатраты на возбуждение в несколько раз превышают затраты на нагрев газа и его ионизацию.

**Заключение.** В заключение сформулируем основное:

1. Построена модель дрейфа электронов в однородном постоянном электрическом поле, учитывающая неупругие процессы и гибель электронов на стенках трубки.
2. Проведено сравнение результатов моделирования методом Монте Карло с решением уравнения Больцмана в двучленном приближении.
3. Проведено сравнение полученных расчетных данных с результатами экспериментальных зондовых измерений.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 Хаксли Л., Кромптон Р. Диффузия и дрейф электронов в газах. – М.: Мир, 1977.
- 2 Цендин Л.Д. // УФН. – 2010. – 180. – 139.
- 3 Фортгов В.Е., Храпак А.Г., Храпак С.А., Молотков В.И., Петров О.Ф. // УФН. – 2004. – 174. – 495 ().
- 4 Khrapak S.A. // Phys. Plasm. – 2010. – 70. – 046415.
- 5 Голант В.Е., Жилинский А.П., Сахаров И.Е. Основы физики плазмы. – М.: Атомиздат, 1977 / V. E. Golant, A. P. Zhilinsky, and I. E. Sakharov, in Fundamentals of Plasma Physics / Edited by S. C. Brown. – New York: Wiley, 1980.
- 6 Майоров С.А. Расчет характеристик дрейфа электрона в неоне при постоянном электрическом поле. Краткие сообщения по физике // ФИАН. – 2009. – № 10. – С. 22-27.
- 7 Антипов М.М., Васильев С.А., Майоров О.Ф., Петров В.Е. Фортгов // Плазменно-пылевые структуры в He-Kr тлеющем разряде постоянного тока // ЖЭТФ. – 2011. – Т. 139, вып. 3. – С. 554-567.
- 8 Голятина Р.И., Майоров С.А. // Характеристики дрейфа электрона в постоянном электрическом поле для инертных газов // Прикладная физика. – 2011. – № 5. – С. 22-27
- 9 Sukhinin G.I., Fedoseev A.V. Influence of dust-particle concentration on gas-discharge plasma // Phys. Rev. E. – 2010. – 81. – 016402.

---

10 Sukhinin G.I., Fedoseev A.V., Ramazanov T.S., Amangaliyeva R.Zh., Dosbalayev M.K., Jumabekov A.N. // Nonlocal effects in a stratified glow discharge with dust particles // J. Phys. D: Appl. Phys. – 2008. – 41. – 245207 (8pp).

*Н. Х. Бастықова, С. К. Қоданова, Т. С. Рамазанов, С. А. Майоров*

#### ГАЗРАЗРЯДТЫ ПЛАЗМАДА ЭЛЕКТРОННЫҢ КИНЕТИКАСЫН МОДЕЛЬДЕУ

Кеңістіктегі біртекті электр өрісі үшін бір атомды газдағы электронның дрейфі зерттелді. Электронның таралу функциясы кинетикалық Больцман теңдеуі екі мүшелік жуықтауда және Монте Карло әдісі арқылы табылды. Электрондардың атоммен серпімді, серпімсіз соқтығысуы және электронның қабырғаға жұтылу процестері ескерілді. Электронның дрейфін сапалы сараптама жасауға мүмкіндік беретін газдағы электронның дрейфтік интегралдық сипаттамасы есептелді. Аргон газындағы электр өрісінің келтірілген мәңдерінде  $1 < E/N < 28$  Td. электрондардың энергия бойынша теңдігі мен дрейфтік сипаттамасының нәтижелері көрсетілген.

*N. Kh. Bastykova, S. K. Kodanova, T. S. Ramazanov, S. A. Mayorov*

#### THE SIMULATION OF ELECTRON KINETICS IN GAS DISCHARGE PLASMA

An electron drift in a monatomic gas was studied for a spatially uniform electric field. Functions of the electron energy distribution are found by solving the Boltzmann equation in the two-term approximation and applying the Monte Carlo method. We take into account both elastic and inelastic collisions of electrons with atoms, recombination at the walls. Integral characteristics of the electron drift in the gas were calculated, allowing to analyze the drift of electrons on a qualitative level. The results of calculations of the energy balance of electrons and drift characteristics in argon are shown at a reduced field  $1 < E/N < 28$  Td.

Ж. А. МОЛДАБЕКОВ, С. К. КОДАНОВА, Т. С. РАМАЗАНОВ

## ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОГО ПОТЕНЦИАЛА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПЫЛЕВЫХ ЧАСТИЦ НА ОСНОВЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ПАРНОЙ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИЙ

НИИЭТФ, Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы

*Получены псевдопотенциалы взаимодействия пылевых частиц в плазме на основе численного решения уравнения Пуассона и экспериментальной парной корреляционной функции. Полученные эффективные потенциалы имеют осциллирующий характер и имеют область притяжения для пылевой компоненты плазмы.*

Для того чтобы понять физику возникновения упорядоченных структур, образующихся из пылевых частиц микронных размеров, необходимо знание взаимодействия между пылинками. В настоящее время экспериментальное определение потенциала взаимодействия пылинок выполнено лишь для некоторых модельных случаев. Так, проведенные измерения потенциала взаимодействия пылинок при парных столкновениях в пристеночной области [1] показали, что отталкивающее взаимодействие описывается потенциалом экранированного кулоновского потенциала или потенциалом Юкава

$$\Phi(R) = \frac{Z_d^2 e^2}{r} e^{-r/r_d}, \quad (1)$$

где  $r_d$  – электронный радиус экранировки Дебая;  $Z_d$  – кратность заряда пылевых частиц).

Экранированный потенциал (1) описывает только отталкивание макрочастиц. Для описания же наблюдаемых в экспериментах пылевых кристаллов и скопления частиц необходим потенциал, при котором отталкивание макрочастиц на близких расстояниях сменяется притяжением на далеких расстояниях. Такое притяжение может вызываться притяжением Лесажа [2], которая обусловлена эффектом тени при бомбардировке пылевой частицы нейтральными частицами. В работе [3] получена парная корреляционная функция распределения между неподвижной и подвижной заряженными частицами в приближении бинарного взаимодействия. Полученные распределения электронов и ионов вокруг заряженной макрочастицы в плазме отличались от дебаевского распределения. Аппроксимация на основе бинарного приближения, учитывающего движение электронов и ионов в неэкранированном поле макрочастицы, имели хорошее согласие с результатами численного моделирования.

В настоящей работе рассматриваются результаты компьютерного моделирования свойств пылевой плазмы на основе использования экспериментальных данных, полученных авторами [4]. В работе [4] взаимодействие между пылевыми частицами в кристаллическом плазменно-пылевом образовании было исследовано на основе экспериментальной парнокорреляционной функции. Экспериментальные данные получены на экспериментальном стенде лаборатории ММПП НИИЭТФ КазНУ [4, 5].

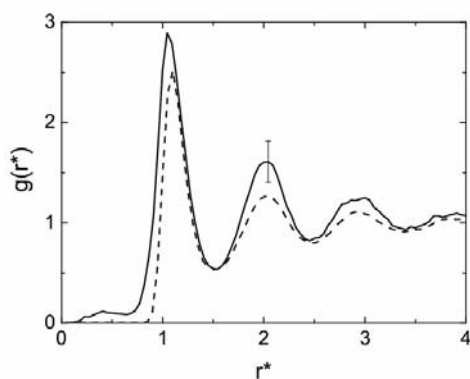
Экспериментальные парные корреляционные функции были определены для системы со следующими параметрами: давление рабочего газа (аргон)  $P$  (торр); разрядный ток  $I$  (мА). С помощью метода зондовой диагностики были определены электронов  $n_0$  ( $\text{см}^{-3}$ ) и на основе обработки результатов видеозаписей – среднее расстояние между частицами  $R_0$  (мкм). Безразмерные параметры, использованные при моделировании полученных экспериментальных результатов, приведены в таблице. Для построения корреляционной функции достаточно знать координаты всех макрочастиц в исследуемом сечении пылевого образования в данный момент времени. Парная корреляционная функция  $g(r)$ , определяет вероятность нахождения двух частиц на расстоянии  $r$  друг от друга. На рис. 1 и 2 приведены сравнения экспериментальных парных корреляционных функций распределения пылинок в тлеющем разряде постоянного тока аргона с расчетами



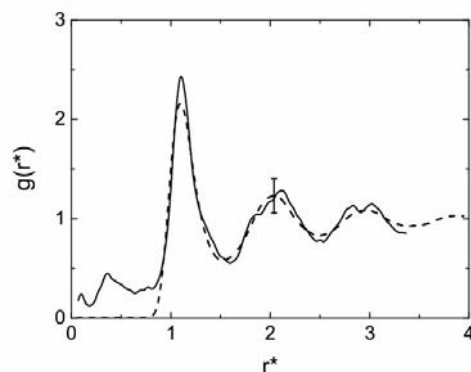
компьютерного моделирования, полученного по методу Ланжевеновой динамики [6]. Как следует из приведенных рисунков, экспериментальные парные корреляционные функции распределения пылевых частиц хорошо согласуются с результатами численного моделирования. Вид радиальных функций на рис. 1 соответствует кристаллической структуре, а на рис. 2 – жидкокристаллической структуре.

**Результаты, полученные на основе обработки двух экспериментальных парных корреляционных функций пылевых частиц при разных параметрах разряда**

Эксперимент №1	Эксперимент №2	Эксперимент №3	Эксперимент №4
$P(torr) = 0.18$ $I(mA) = 0.6$	$P(torr) = 0.18$ $I(mA) = 0.7$	$P(torr) = 0.18$ $I(mA) = 0.8$	$P(torr) = 0.19$ $I(mA) = 0.9$
$R_0(mkm) = 250$	$R_0(mkm) = 245$	$R_0(mkm) = 246$	$R_0(mkm) = 246$
$n_0(cm^3) = 6559$	$n_0(cm^3) = 6771$	$n_0(cm^3) = 6781$	$n_0(cm^3) = 6781$

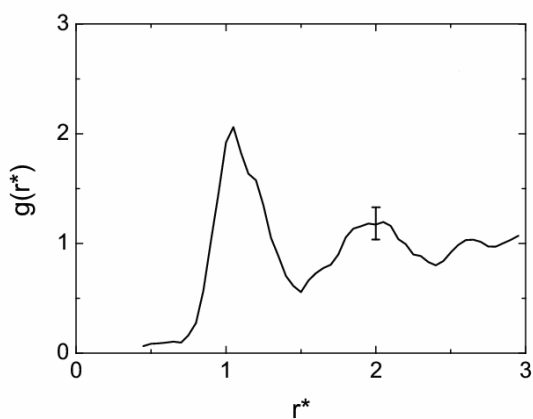


а) эксперимент №1

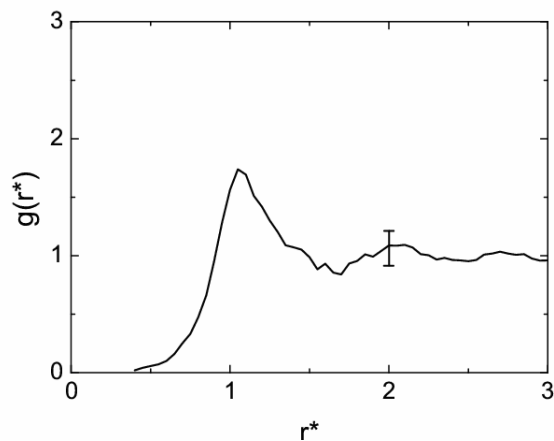


б) эксперимент №2

**Рис. 1.** Экспериментальные парно-корреляционные функции в зависимости от расстояния  $r^* = r/R_0$  (кристаллическая структура)



а) эксперимент №3



б) эксперимент №4

**Рис. 2.** Экспериментальные парно-корреляционные функции в зависимости от расстояния  $r^* = r/R_0$  (жидкокристаллическая структура)

На основе численного решения уравнения Пуассона с использованием экспериментальной парной корреляционной функции пылинок получены эффективные потенциалы взаимодействия пылевых частиц в плазме. Используется уравнение Пуассона в виде:

$$\nabla^2 \varphi(r) = -4\pi e [n_i(r) - n_e(r) - Z_d n_d(r)], \quad (2)$$

где  $n_d(r) = n_{d0} g(r)$  определяется на основе экспериментальной парной корреляционной функции, условие квазинейтральности имеет вид  $n_{i0} = n_{e0} + n_{d0} Z_d$ .

Рассматривались плазменно-пылевые структуры в кристаллическом и жидкокристаллическом состояниях. В первом случае для распределения плотности ионов используется линеаризованное уравнение Больцмана. Кроме того, использовалось диффузионно-дрейфовое приближение, поскольку в рассмотренном случае  $l_i/r_D \ll 1$ , где  $l_i$  – длина свободного пробега ионов,  $r_D = \sqrt{k_b T_e / (4\pi n_e e^2)}$  – радиус Дебая.

В качестве краевых условий берется потенциал Юкава для взаимодействия пылевых частиц.

$$\begin{aligned} \varphi|_{r^*=r_0} &= \frac{(Z_d e)^2}{r_0} \exp(-r_0 / r_D) \\ \varphi|_{r^* \rightarrow \infty} &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Для распределения плотности ионов и электронов при кристаллических структурах в первом приближении определяем, используя линеаризованное уравнение Больцмана,

$$n_i = n_{i0} \left( 1 - \frac{e\varphi(r)}{k_b T_i} \right), \quad (4)$$

$$n_e = n_{e0} \left( 1 + \frac{e\varphi(r)}{k_b T_e} \right). \quad (5)$$

В безразмерном виде

$$\nabla^2 \varphi^*(r^*) - k^2 (\delta\tau + 1) \varphi^*(r^*) = -k^2 \left[ (\delta - 1) Z_d - Z_d^2 \frac{n_{d0}}{n_{e0}} g(r^*) \right], \quad (6)$$

где  $\varphi^*(r^*) = e Z_d \varphi(r) / k_b T_e$ ;  $r^* = r / r_0$ ;  $\delta = \frac{n_{i0}}{n_{e0}}$ ;  $\tau = \frac{T_e}{T_i}$ .

Распределение ионов в пылевой плазме тлеющего разряда не равновесно, более точно его можно определить в диффузионно-дрейфовом приближении ( $l_i/r_D \ll 1$ ) из уравнений непрерывности для ионов и электронов:

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \text{div} j_i = \omega_i, \quad (7)$$

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \text{div} j_e = \omega_e, \quad (8)$$

$\vec{j}_{i(e)}$  – плотность потоков ионов(электронов), а  $\omega_{i(e)}$  – скорости образования ионов(электронов) в единице объема за счет источников ионизаций (здесь и далее ионы полагаются положительными и однозарядными;  $Z_i = 1$ ). В пределе  $l_i/r_D \ll 1$  граничные условия для полностью каталитической и адсорбирующей поверхности сферической частицы (коэффициенты отражения  $R_{i(e)} = 0$ ) имеет вид:

$$n(a)_i = n(a)_e = 0, \quad (9)$$

вдали от уединенной частицы

$$n(\infty)_i = n(\infty)_e = 0. \quad (10)$$

Из сопоставления теории зондов с экспериментом следует, что в реальных условиях коэффициенты отражения  $R_{i(e)} \ll 1$  и обычно предполагается полное поглощение электронов и ионов при столкновении с пылевыми частицами с последующей их рекомбинацией,  $R_{i(e)} = 0$

Плотности потоков ионов и электронов в диффузионно-дрейфовом приближении определяется выражениями

$$\vec{j}_i = n_i \mu_i \vec{E} - D_i \nabla n_i, \quad (11)$$

$$\vec{j}_e = -n_e \mu_e \vec{E} - D_e \nabla n_e, \quad (12)$$

где  $\mu_{i(e)}$ ,  $D_{i(e)}$  – коэффициенты подвижности и диффузий ионов (электронов) соответственно, а  $\vec{E} = -\nabla \varphi$  – напряженность электрического поля. Эти коэффициенты связаны соотношением Эйнштейна  $D_i = \frac{\mu_i T_i}{e}$ .

Уравнения (5), (7) решались совместно с уравнением Пуассона (2). На рис. 3, 4 показаны результаты численного моделирования для потенциала взаимодействия.

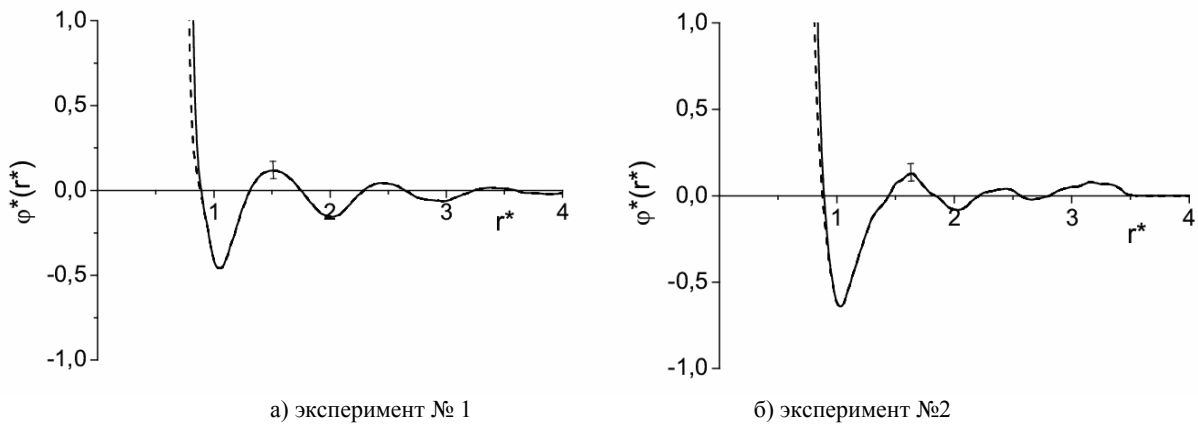


Рис. 5. Эффективный потенциал взаимодействия пылевых частиц

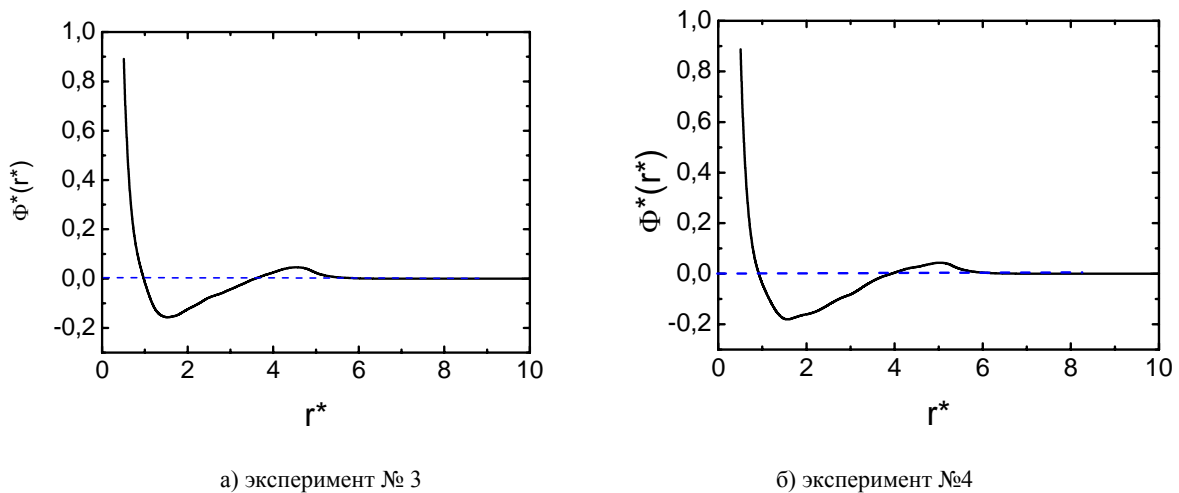


Рис. 6. Эффективный потенциал взаимодействия пылевых частиц

Из рисунков видно, что полученные эффективные потенциалы имеют осциллирующий характер и слабо зависят на малых расстояниях между частицами от вида граничных условий. Вычисленный потенциал на основе уравнения Пуассона и экспериментальной парно-корреляционной функций показывает, что есть области притяжения для пылевой компоненты плазмы.

ЛИТЕРАТУРА

1 Fortov V.E., Nefedov A.P., Torchinsky V.V., Molotkov V.I., Petrov O.F., Samarian A.A., Lipaev A.M., Khrapak A.G. Crystalline structures of strongly coupled dusty plasmas in dc glow discharge strata // J. Phys. Lett A. – 1997. – Vol. 229, № 5. – P. 317-322.

2 Конопка U., Morfill G.E. and Ratke L. Measurement of the Interaction Potential of Microspheres in the Sheath of a RF Discharge // J. Phys. Rev. Lett. – 2000. – Vol. 84, № 5. – P. 891-894.

3 Липаев А.М., Молотков В.И., Нефедов А.П., Петров О.Ф., Торчинский В.М., Фортов В.Е., Храпак А.Г., Храпак С.А. Упорядоченные структуры в неидеальной пылевой плазме тлеющего разряда // Письма в ЖЭТФ. – 1997. – Т. 112, № 6. – С. 2030-2044.

4 T.S.Ramazanov, K.N.Dzhumagulova, Yu.A Omarbakiyeva // Phys. Plasmas, **12**, 092702 (2005).

5 Ramazanov T.S., Dzhumagulova K.N., Kodanova S.K. Experimental and Theoretical Investigation of Dusty Plasma Properties // Abstr. Int. Conf. on The Physics of Dusty and Burning Plasmas. – Odessa, Ukraine, 2007. – P. 110-112

6 Ramazanov T.S., Dzhumagulova K.N., Kodanova S.K., Daniyarov T.T. and Dosbolayev M.K. Thermodynamic properties of dusty plasma on Basis of the Langevin Dynamics // Contrib. Plasma Phys. – 2009. – Vol. 49, № 1-2. – P. 15-20.

*Ж. А. Молдабеков, К. Н. Коданова, Т. С. Рамазанов*

ТОЗАНДЫ БОЛШЕКТЕРДІҢ ПӘРМЕНДІ ӘСЕРЛЕСУ ӘЛЕУЕТТЕРІН  
ТӘЖІРБИЕЛІК ҚОС КОРРЕЛЯЦИЯЛЫ ФУНКЦИЯ НЕГІЗІНДЕ ЗЕРТТЕУ

Пуассон тендеуі мен эксперименталды корреляциялық функцияны сандық шешу негізінде плазмадағы тозанды бөлшектердің өзараәсерлесу әлеуеттері алынды. Алынған пәрменді әлеуеттер осцилляциялық сипатқа ие және плазманың тозанды компоненттері үшін тартылыс аумағы бар.

*Zh. A. Moldabekov, S. K. Kodanova, T. S. Ramazanov*

INVESTIGATION OF EFFECTIVE INTERACTION POTENTIALS OF DUSTY PARTICLES BASED  
ON EXPERIMENTAL PAIR CORRELATION FUNCTIONS

Obtained pseudopotentials interaction of dust particles in the plasma on the basis of the numerical solution of Poisson's equation using the experimental pair of grains. The resulting effective potentials are oscillatory in nature and has an area of attraction for the dust component of the plasma.

А. С. АСКАРОВА, С. А. БОЛЕГЕНОВА, В. Ю. МАКСИМОВ,  
М. Т. БЕКЕТАЕВА, А. О. НУГМАНОВА

## ГОРЕНИЕ ПЫЛЕУГОЛЬНОГО ТОПЛИВА В ТОПОЧНОЙ КАМЕРЕ СГОРАНИЯ

В течениях с химическими реакциями для улучшения стабилизации высокоинтенсивных процессов горения и при организации эффективного чистого сгорания во многих практических устройствах широко используется благоприятное влияние вихревых потоков инжектируемых воздуха и горючего. Развитие и совершенствование этих методов позволят значительно снизить затраты времени и средств на программы развития новых устройств.

В качестве исследуемого объекта в данной работе выбрана камера сгорания котла ПК-39 к блоку 300 МВт, паропроизводительностью 475 т/ч. Котел установлен на Аксуйской электростанции (Казахстан). На рис. 1 представлена общая схема камеры сгорания этого котла и разбивка ее на элементарные объемы для проведения вычислительных экспериментов.

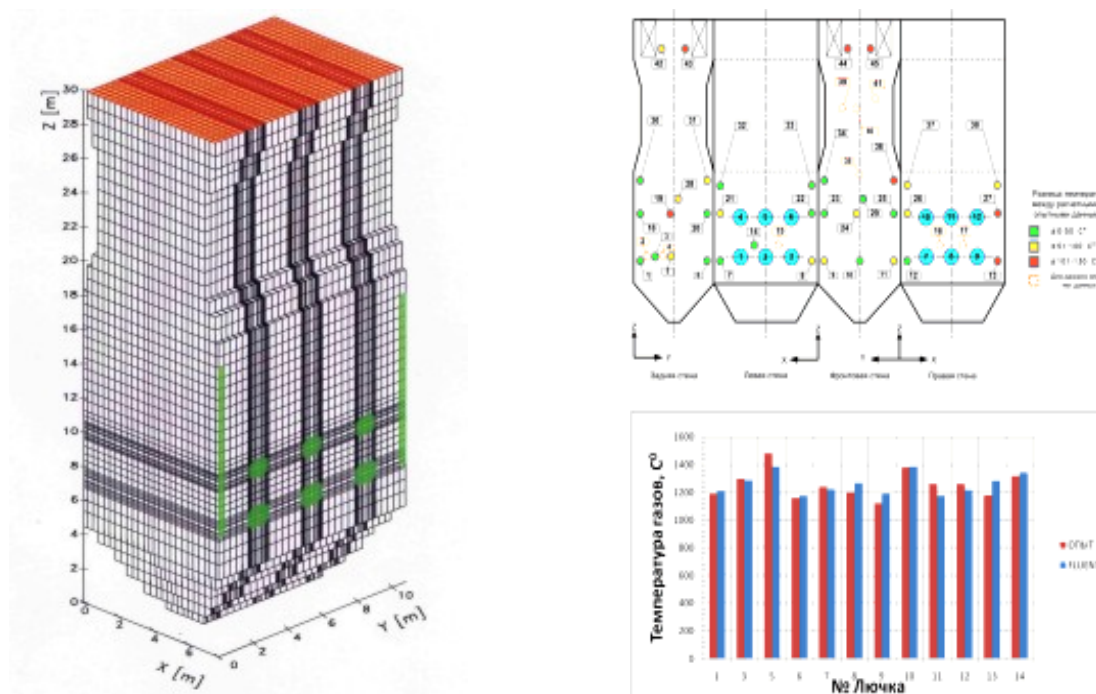


Рис. 1. Общий вид камеры горения ПК-39

Камера сгорания оборудована 12 вихревыми трехканальными горелками. Горелки расположены встречно в два яруса по 6 горелок в каждом. Из-за трудности факельного сжигания твердого топлива (вследствие сложности тонкого помола, золового износа и шлакования поверхности нагрева, заноса их золой) был разработан способ сжигания его во взвешенном состоянии, получивший название вихревого. В вихревых топках осуществляется устойчивое движение вращающегося воздушного потока, в котором находятся во взвешенном состоянии кусочки каменного угля ( $d_p \sim 15-90$  мкм). Вихревой характер движения топлива воздушного потока создает хорошие условия перемешивания топлива с воздухом, а следовательно, способствует более быстрому и полному выгоранию топлива.

Для проведения вычислительных экспериментов выбран полидисперсный пылеугольный факел, в котором имеется следующее распределение частиц по размерам:  $d_p = 10$  мкм – 10%;  $d_p = 30$  мкм – 20%;  $d_p = 60$  мкм – 40%;  $d_p = 100$  мкм – 20%;  $d_p = 120$  мкм – 10%, что соответствует реальному процессу горения угля на ТЭС.

Результаты вычислительных экспериментов сравниваются для двух случаев: горение полидисперсного пылеугольного факела и горение монодисперсного потока при различных значениях среднего диаметра угольных частиц (30 мкм, 60 мкм, 90 мкм). Рис. 2 показывает распределение температуры по высоте топочной камеры сгорания для полидисперсного факела. На графике приведены кривые, распределения минимальной, средней и максимальной температуры в каждом сечении по высоте топочной камеры. Здесь же нанесены результаты натурального эксперимента [1]. Видно, что температура достигает максимума в сечениях камеры сгорания, где расположены горелки, т.е. в области перемешивания турбулентных струй пылеугольного топлива и окислителя. Именно в этой области располагается ядро факела, и реакция горения происходит наиболее интенсивно [2]. По мере приближения к выходу из топочного пространства температурный профиль стабилизируется, и расхождения между минимальными и максимальными значениями уменьшаются.

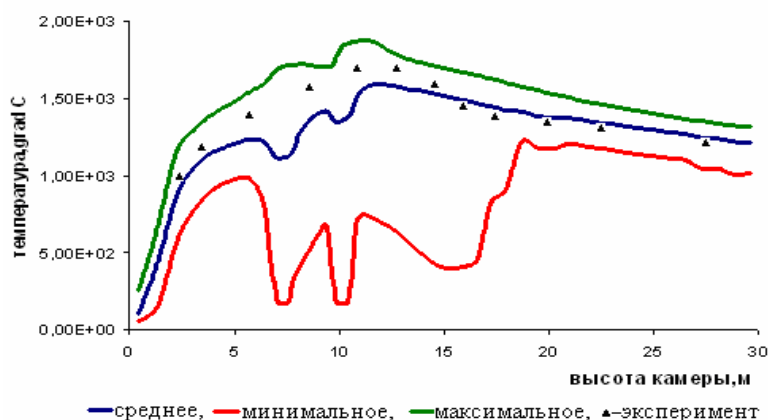


Рис. 2. Распределение температуры по высоте топочной камеры для полидисперсного факела

На рис. 3 представлено сравнение распределений средней температуры в монодисперсном (60 мкм) и полидисперсном факелах. Мы видим, что лишь в области расположения горелок и на выходе из топочной камеры наблюдается незначительное расхождение температур, причем в монодисперсном факеле средняя температура всюду выше, чем в полидисперсном факеле, что связано с наличием крупных фракций в последнем.

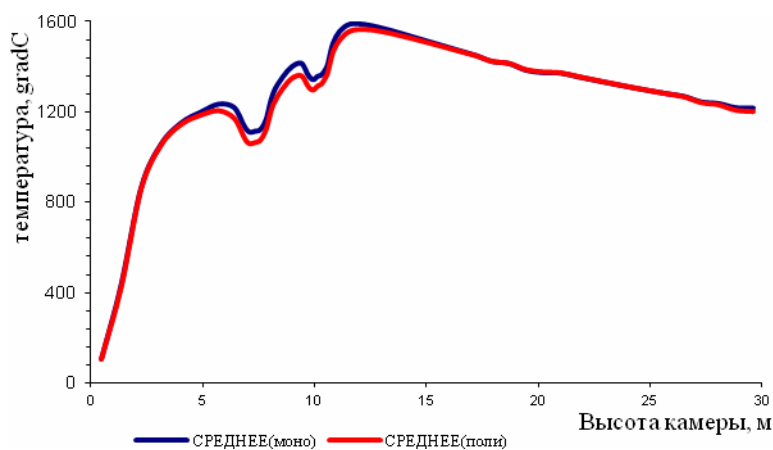
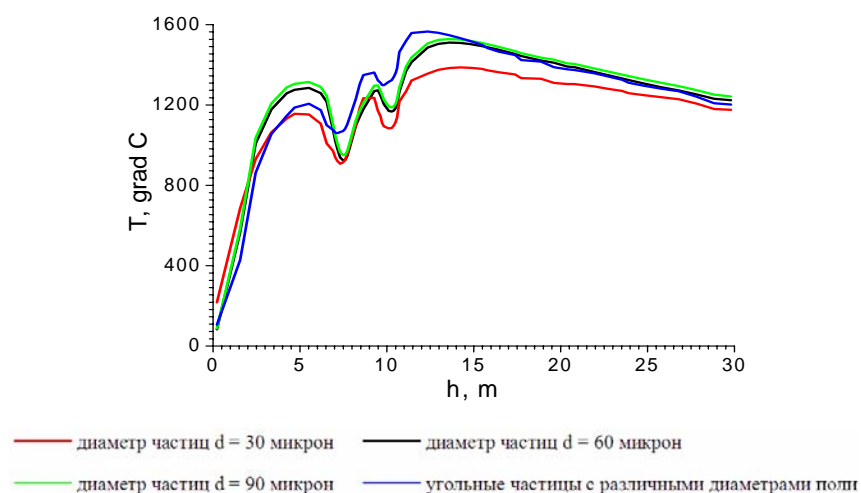


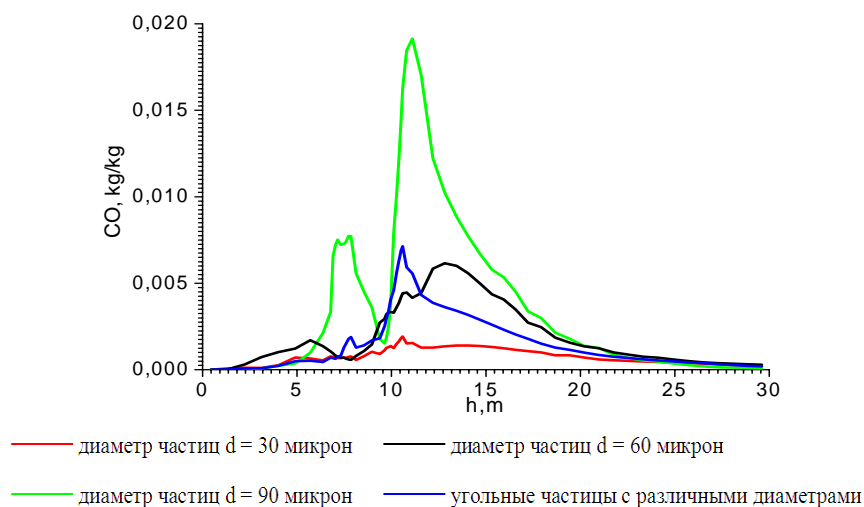
Рис. 3. Сравнение распределения средней температуры в моно- и полидисперсных факелах



**Рис. 4.** Распределение средней температуры в объеме камеры сгорания в зависимости от дисперсности пылеугольного потока

Рис. 4 показывает распределение температуры по высоте топочной камеры для частиц с диаметром 30 мкм, 60 мкм и 90 мкм и для полидисперсного потока. На графике приведены кривые, соответствующие средней температуре в каждом сечении по высоте топочного пространства. Мы видим, что характер поведения кривых распределения средних значений температуры примерно одинаков и совпадает с кривыми рис. 3. Однако изменение диаметра угольных частиц значительно сказывается на количественных значениях температур и характере воспламенения пылевоздушной смеси.

На рис. 5, 6 приведен сравнительный график распределения концентрации  $CO$  и  $CO_2$  для пылеугольных потоков с различными диаметрами частиц и полидисперсного факела. Анализ рисунков показывает, что как в области горелок, так и по мере удаления от них концентрация оксидов углерода претерпевает наибольшие изменения и наблюдается существенная разница в распределении концентрации в зависимости от распределения угольных частиц по размерам. Мы видим, что с увеличением диаметра угольных частиц в центре топочной камеры увеличивается интенсивность образования  $CO$ , однако, по мере приближения к выходу концентрация  $CO$  уменьшается. Концентрация  $CO_2$  соответственно растет (происходит догорание  $CO$  в  $CO_2$ ) для более крупных частиц. Этот факт свидетельствует о положительном влиянии измельчения угольной пыли, т.к. уменьшение угарного газа  $CO$  и углекислого газа  $CO_2$  является одной из экологических задач, стоящих сегодня перед теплоэнергетикой.



**Рис. 5.** Распределение концентрации  $CO$  в объеме камеры сгорания в зависимости от дисперсности пылеугольного потока

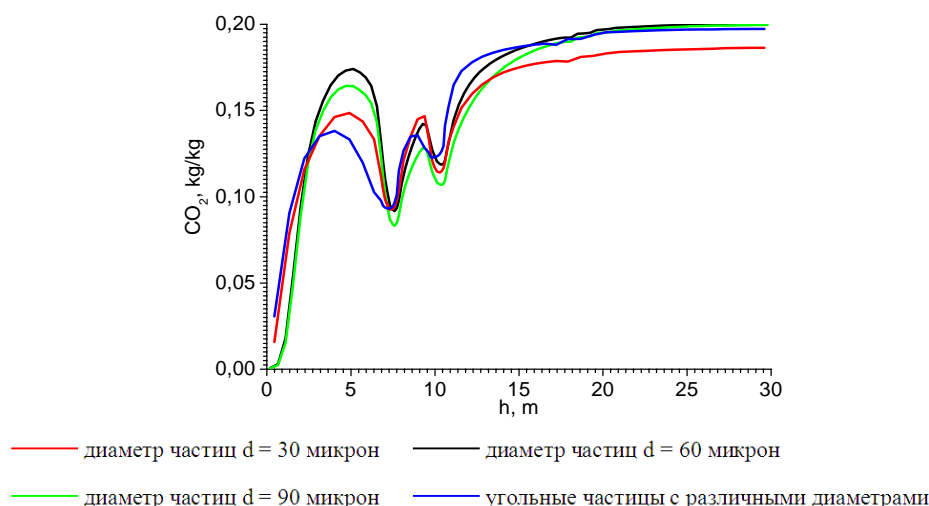


Рис. 6. Распределение концентрации  $CO_2$  в объеме камеры сгорания в зависимости от дисперсности пылеугольного потока

Полученные результаты позволяют оценить влияние диаметров угольных частиц, а также монодисперсности и полидисперсности топливно-воздушного реагирующего потока на воспламенение, местоположение ядра факела, интенсивность горения пылеугольного факела и на образование вредных пылегазовых выбросов в атмосферу. Результаты, представленные в работе, были получены в предположении как монодисперсности, так и полидисперсного распределения частиц угольной пыли по размерам пылеугольного потока.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 Аскарлова А.С., Болегенова С.А., Локтионова И.В., Рыспаева М.Ж. Физика горения. Учебное пособие для студентов.
- 2 Алияров Б.К. Освоение сжигания экибастузского угля на тепловых электростанциях. – Алматы: Гылым, 1996. – 272 с.

Ә. С. Асқарова, С. Ә. Бөлегенова, В. Ю. Максимов,  
М. Т. Бекетаева, А. О. Нұрманова

#### ЖАНУ КАМЕРАСЫНДАҒЫ ШАҢҚӨМІРЛІ ОТЫННЫҢ ЖАНУЫ

Химиялық реакциялы ағындарда жоғарықарқынды жану процестерін орнықтандыруды жақсарту үшін және пәрменді таза жануды қамтамасыз ету үшін көптеген практикалық құрылғыларда ауа мен отынның құйынды ағындарының қолайлы әсері кең пайдаланылады. Бұл әдістердің дамуы мен жетілдірілуі жаңа құрылғылар бағдарламасын дамытуда уақыт пен қажеттіліктерді азайтуға мүмкіндік береді.

A. Askarova, S. Bolegenova, M. Beketaeva,  
V. Maximov, A. Nugmanova

#### COMBUSTION OF PULVERIZED COAL IN THE FURNACE COMBUSTION CHAMBER

In flows with chemical reactions in order to improve the stabilization of high-intensity combustion processes and the organization of an effective clean combustion in many practical devices are widely used beneficial effect of vortex flow in air and fuel injected. Development and improvement of these methods will significantly reduce the time and resources to development programs for new devices.



А. С. АСКАРОВА, С. А. БОЛЕГЕНОВА, В. Ю. МАКСИМОВ, М. Т. БЕКЕТАЕВА

## ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ В КАНАЛЕ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ ИСТОЧНИКОМ МАССЫ

Перспективностью предлагаемого исследования является актуализация задач, связанных с развитием численных методов в применении к исследованию сложных практических задач турбулентности. Практическая ценность проведенного исследования определяется универсальностью предлагаемого метода исследования, который может найти широкое применение на различных энергетических объектах Республики Казахстан.

Численный эксперимент в настоящее время – это один из эффективных путей теоретического исследования. Он базируется на использовании математических моделей реальных процессов, в частности, физических. Чем точнее модель отражает какой-то процесс, тем лучше соответствие результатов, полученных на основе этой модели и опыта. Но для получения хорошего согласия с экспериментом только модели еще не достаточно. Необходим также метод решения систем уравнений. Большинство же систем дифференциальных уравнений, описывающих реальные физические процессы, – нелинейные, решить их, как правило, можно только численно. При исследовании турбулентных потоков необходимо иметь в виду комплекс: многопроцессорная вычислительная система, хорошая математическая модель и точный метод решения систем дифференциальных уравнений, составляющих основу математической модели [1].

Пылеугольный факел в современных камерах сгорания в газодинамическом отношении представляет собой трехмерную (криволинейную) турбулентную струю сжимаемого газа, движущуюся в условиях горения и интенсивного теплообмена с окружающими поверхностями. При построении расчетных схем применительно к реагирующим течениям в топочных устройствах приходится иметь дело со сложной системой нелинейных уравнений в частных производных, состоящей из уравнений неразрывности, движения вязкой среды, распространения тепла и диффузии для компонент реагирующей смеси и продуктов реакции.

Проведено исследование турбулентного течения вязкой несжимаемой жидкости в канале с дополнительным источником массы. Рассматривается установившееся турбулентное течение в плоском канале. Длина канала – 0.6 м, ширина и высота канала составляет 0.203 м, характерный размер отверстия – 0.0208 м. Общий вид канала приведен на рис. 1. Также физические параметры течения представлены в таблице.

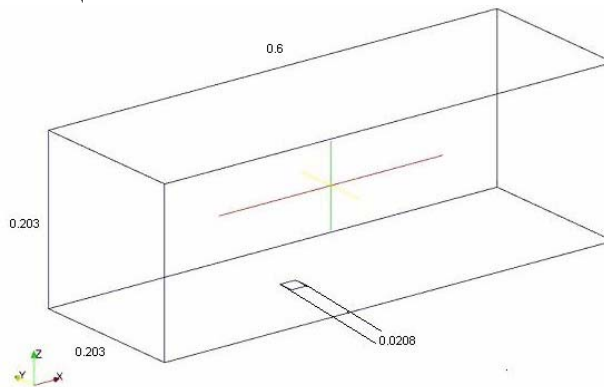


Рис. 1. Общий вид канала

Для замыкания системы уравнений использовалась стандартная k-ε модель турбулентности, для которой записываются два дополнительных уравнения для кинетической энергии турбулентности и для энергии диссипации:

$$\rho \frac{dk}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) + G_k + G_b - \rho \varepsilon - Y_M, \quad (1)$$

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right) + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} (G_k + C_{3\varepsilon} G_b) - C_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k}. \quad (2)$$

Таблица

Наименование	Обозначение	Единица измерения	Значение
Скорость основного потока	$U_{inlet}$	$m/s$	30
Скорость впрыскиваемого газа	$U_{jet}$	$m/s$	71.26
Плотность газа	$\rho$	$Kg/m^3$	1
Давление газа	$P$	$Pa$	101325
Кинематическая вязкость	$\nu$	$m^2/s$	2.5 E-6
Число Рейнольдса	$Re$	–	250000
Температура газа основного потока	$T_{in}$	$K$	293.15
Температура впрыскиваемого газа	$T_{jet}$	$K$	348.15
Набор констант стандартной $k-\varepsilon$ модели турбулентности	$C_\mu$	–	0.09
	$C_1$	–	1.44
	$C_2$	–	1.92
	$C_3$	–	0.85

Для решения этих уравнений необходимо указать значения кинетической энергии турбулентности и энергии диссипации, которые можно найти из следующих соотношений:

$$k = \frac{1}{2} \overline{U'U'}, \quad \varepsilon = \frac{C_\mu^{0.75} k^{1.5}}{l}, \quad k = \frac{1}{2} (w_x'^2 + w_y'^2 + w_z'^2), \quad w_x'^2 = w_y'^2 = w_z'^2$$

$$k = \frac{3}{2} (0.05 * 2.5)^2 = 0.0235 [\frac{M^2}{c^2}], \quad \varepsilon = 0.00236 [\frac{M^2}{c^3}]$$

При создании конечно-разностной сетки использовался метод конечных объемов.

Область построена из 9 блоков. В каждом блоке конечно-разностная сеть построена таким образом, чтобы в центре она сгущалась (рис. 2). Это сделано для того, чтобы более точно определить параметры данного течения в тех местах, где происходит наиболее сильное их изменение.

В ходе вычислительного эксперимента были получены профили скорости и температуры основного и дополнительного течения (рис. 4, 5), а также температурная изоповерхность, образованная в результате реагирования этих течений (рис. 3).

Рис. 2. Конечно-разностная сетка

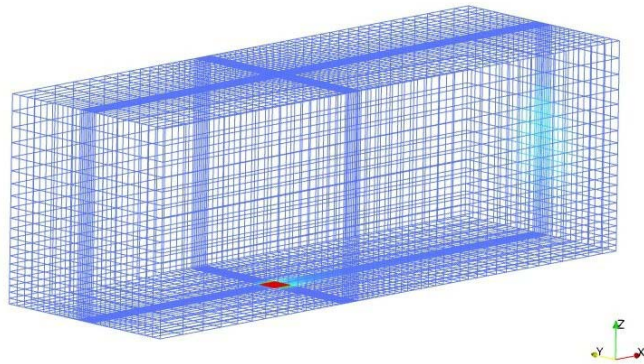
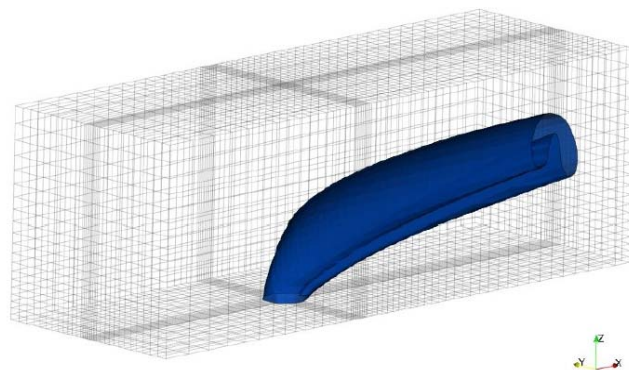


Рис. 3. Температурная изоповерхность



Temperature Isosurface  
T = 300 K

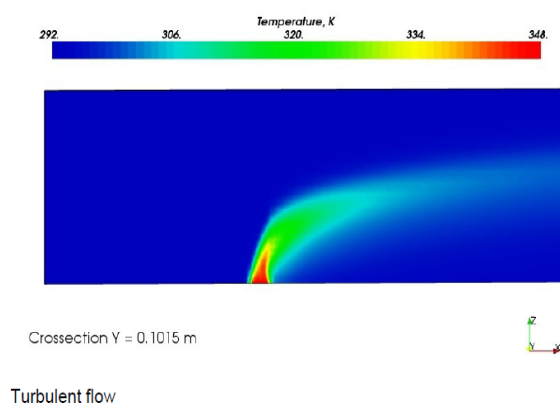


Рис. 4. Профиль температуры в канале

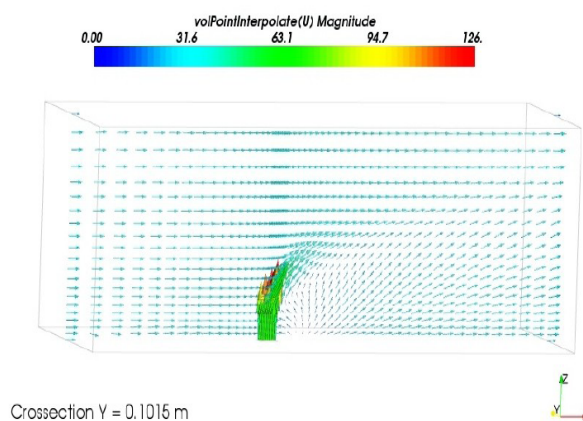


Рис. 5. Векторный профиль скорости в канале

Из рис. 4 видно, насколько сильно температура вовлекаемого потока влияет на общую температурную картину течения.

Исходя из рис. 5, можно заключить, что в области впрыска подогретого газа происходит перемешивание транспортируемых характеристик, в результате чего вблизи отверстия образуется тонкая пленка с температурой, намного меньшей температуры вовлеченного газа (рис. 4). При удалении от отверстия происходит выравнивание температуры основного потока с температурой вовлекаемого газа. Данный факт широко используется в энергетической промышленности, в частности, при конструировании системы охлаждения различного рода турбин.

Для сравнения представленных результатов вычислительного эксперимента использовались экспериментальные данные, приведенные в работе J. W. Ramsey и R. J. Goldstein [2], что показывает достаточно хорошее соответствие расчетных данных по предложенному моделию.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 Askarova A.S., Heierle Ye., Leithner R., Müller H. CFD simulationen der NO<sub>x</sub> production in Kohlenstaub-befeuerten Brennkammern // VDI-Berichte 2056, VDI Verlag GmbH. – Düsseldorf, 2009. – S. 575-579.
- 2 Ramsey J.W., Goldstein R.J. Deflected flow // Combust. Flame. – 1980. – V. 38, N 1. – P. 1-15.

Ә. С. Асқарова, С. Ә. Бөлегенова, В. Ю. Максимов, М. Т. Бекетаева, А. О. Нұрманова

#### ТУРБУЛЕНТТІ АҒЫСТАРДЫ МАССАНЫҢ ҚОСЫМША КӨЗІ БАР КАНАЛЫНДА САНДЫҚ ЗЕРТТЕУ

Ұсынылған зерттеудің маңыздылығы турбуленттіліктің күрделі есептеріне сандық әдістерді қолданудың дамуымен байланысты мәселе болып табылады. Зерттеудің қолданбалылығы ұсынылған зерттеу әдісінің Қазақстан Республикасының түрлі энергетикалық орталықтарында универсалды пайдаланылуы мүмкіндігімен сипатталады.

A. Askarova, S. Bolegenova, M. Beketaeva, V. Maximov

#### NUMERICAL STUDY OF TURBULENT FLOW IN A CHANNEL WITH AN ADDITIONAL SOURCE OF MASS

The prospect of the proposed study is to update the tasks associated with the development of numerical methods applied to the study of complex practical problems of turbulence. The practical value of the studies determined by the universality of the proposed research method that can be widely used in various power projects of the Kazakhstan Republic.

A. S. ASKAROVA, S. A. BOLEGENOVA, SH. S. OSPANOVA,  
A. E. TURSUNBAEVA, Z. H. GABITOVA

## INFLUENCE OF COCURRENT FLOWS ON FORMATION OF BURNING HARMFUL EMISSIONS FROM BURNING TURBULENT AT METHANE

Kazakh National University named after al-Farabi, Almaty

*The present paper is devoted to the study of the influence of the speed of cocurrent oxidizer flow on the concentration of carbonic gas at methane burning in the flat channel.*

An increasing attention paid nowadays to the environmental problems and the crisis of raw materials put forward the problems of the most economical and optimum burning of fuel with minimal emissions of harmful substances. The solution of these problems requires a detailed knowledge of the influence of various factors on the considered processes of fuel combustion.

In this connection research of the processes of burning gaseous, liquid and solid fuel is now extremely actual, and creation of modern methods of burning and reduction of emission of toxic substances to the atmosphere, in particular, for powerful power-generating units, has important economic value.

Working out of new ways of reduction of emissions of harmful substances by means of physical models is on the one hand connected with large expenses on physical experiments, on the other hand, such working out can give only suggestions for the solution of partial problems as it is impossible to carry out physical modeling of all processes proceeding in the combustion chamber and in flues in the installations reduced on scale. This problem can be solved only on the basis of system analysis, mathematical and imitating modeling.

Thus, the energy crisis and problems of ecology demand efficient control processes of fuel burning with necessary influence on various parameters by means of the COMPUTER and forecasting of the result of such influence which has been long used in developed countries [1].

Therefore the computing experiment was become one of economically effective and convenient means of a detailed analysis and deeper understanding of difficult physical phenomena. A strict mathematical description of the process at accompanying fuel burning in combination as with modern computing algorithms in combination with super-computers allow to solve these problems for concrete installations.

In the present paper the problem of diffusive burning of a turbulent methane flux is considered. The turbulent methane flux flows from a flat crack of height  $h$  with initial speed  $u_{01}$ , reference temperature  $T_{01}$  and initial concentration of fuel  $c_{01}$ . The cocurrent stream of an oxidizer has initial parameters  $u_{02}$ ,  $T_{02}$ ,  $c_{02}$ . In the area of where the methane flux mixes with oxidizer flux a burning front is formed creating a diffusive torch. The problem of the scheme is presented on Fig. 1.

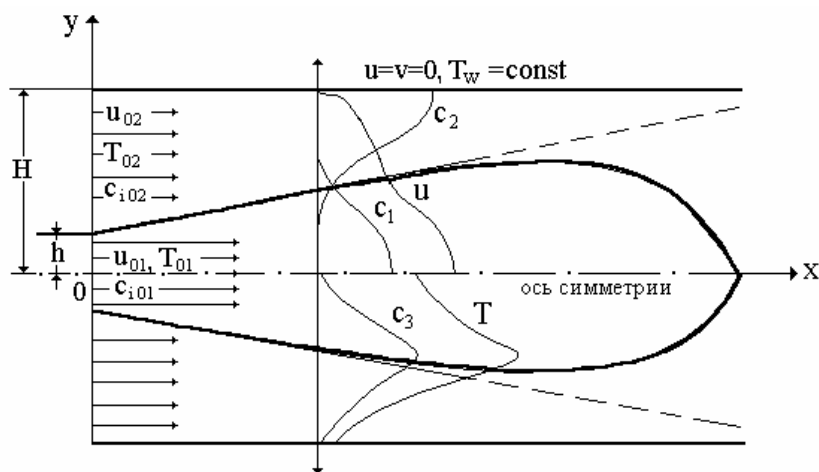
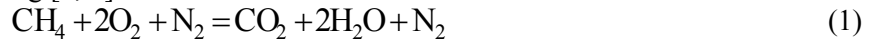


Fig. 1. Scheme of a current

The reaction of methane burning [2, 3]:



Here, methane ( $\text{CH}_4$ ) is a fuel, oxygen ( $\text{O}_2$ ) is an oxidizer, carbonic gas ( $\text{CO}_2$ ) and water ( $\text{H}_2\text{O}$ ) are reaction products, nitrogen ( $\text{N}_2$ ) acts as an inert dilutant.

The continuity equation:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

The equation of motion:

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu_{\text{эф}} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (3)$$

The equation of transfer of methane concentration:

$$\rho u \frac{\partial c_1}{\partial x} + \rho v \frac{\partial c_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \text{Sc}_{\text{эф}} \frac{\partial c_1}{\partial y} \right) - \sigma k_0 \rho^2 c_1 c_2 \exp\left(-\frac{E}{RT}\right) \quad (4)$$

The equations of transfer of Burke-Shumans variables:

$$\rho u \frac{\partial \tilde{c}_i}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \tilde{c}_i}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu_{\text{эф}}}{\text{Sc}_{\text{эф}}} \frac{\partial \tilde{c}_i}{\partial y} \right), \tilde{c}_i = c_i + \sigma_i c_1, \quad i = 2,3,4. \quad (5)$$

The energy equation:

$$\rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \rho v \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu_{\text{эф}}}{\text{Pr}_{\text{эф}}} \frac{\partial H}{\partial y} \right), H = c_p T + Q c_1 \quad (6)$$

Here  $c_1$  is the concentration of methane,  $c_2$  is the concentration of oxygen,  $c_3$  is the concentration of carbonic gas,  $c_4$  is a concentration of water vapor,  $c_5$  is the concentration of nitrogen.

The boundary conditions for the equations (2)-(6), are set as follows:

$x=0$ :

$$0 < y < h: \quad u = u_{01}; \quad c_1 = c_{01}, \quad H_0 = c_p T_0 + Q c_{10}$$

$$h < y < H: \quad u = u_{02}; \quad c_1 = 0; \quad H_0 = c_p T_0$$

$$0 < y < H: \quad k_0 = \alpha_1 u_0^2, \quad \varepsilon_0 = \alpha_2 \frac{k_0^{3/2}}{L_0}; \quad \overline{T_0'^2} = \alpha_3 (T_w - T_0)^2$$

$$x \geq 0, \quad y=0: \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial c_{fu}}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{c}}{\partial y} = \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = \frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial y} = 0$$

$$x \geq 0, \quad y=H: \quad u = v = k = 0, \quad T = T_w = \text{const}, \\ \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial c_{fu}}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{c}}{\partial y} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = \frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial y} = 0$$

For numerical integration of the problem Patankar-Spoldings method was used. The numerical solution was obtained for  $u_{ox_0} = 0,5 \text{ m/s}, 1 \text{ m/s}, 1,5 \text{ m/s}, 2 \text{ m/s}$ . The results of calculations are presented in Figure 2-6.

In figure 2 influence of speed спутного a stream on change-nie of the maximum concentration of carbonic gas along the channel is shown. From drawing it is visible that the maximum quantity of carbonic gas formed at burning of methane from speed cocurrent stream doesn't depend. As shown in [14], with increase in speed cocurrent stream at  $m=0,5$  the length of a torch decreases. In a kernel of a torch concentration  $\text{CO}_2$  remains to a constant until burning won't end, and after that maintenance  $\text{CO}_2$  decreases for channel axes at the expense of diffusion in the priest-river a direction.

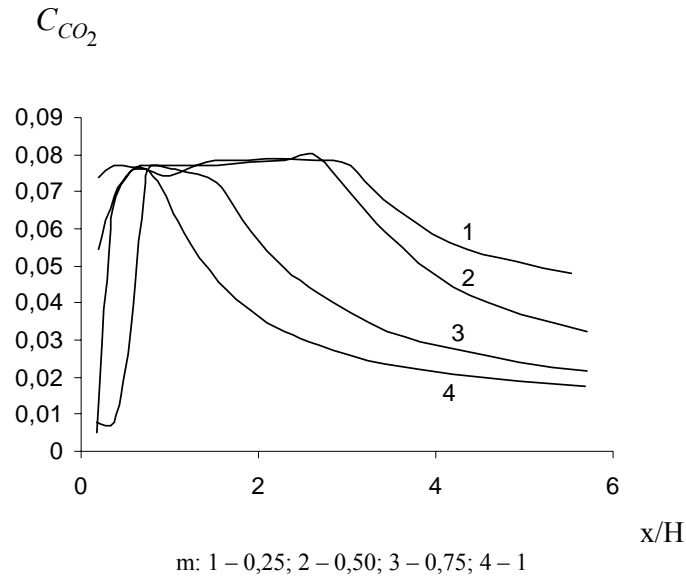


Fig. 2. The influence of cocurrent flows on the concentration of carbon dioxide in the flame front

In figure 3 and 4 distribution of concentration of carbon dioxide across the channel in various sections is shown at  $m=0,25$  (drawing 3) and  $m=75$  (drawing 4). First three sections are taken in a torch kernel, and the fourth – in that area where burning has ended. From these figures it is visible that concentration has the maximum values in flame front.

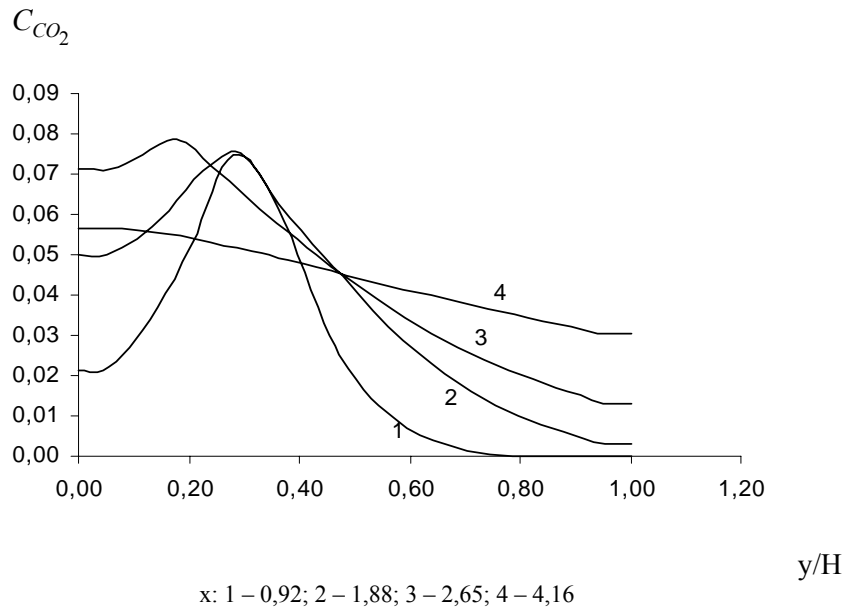


Fig. 3. Distribution of carbon dioxide various cross-section sections of the channel at  $m = 0,25$

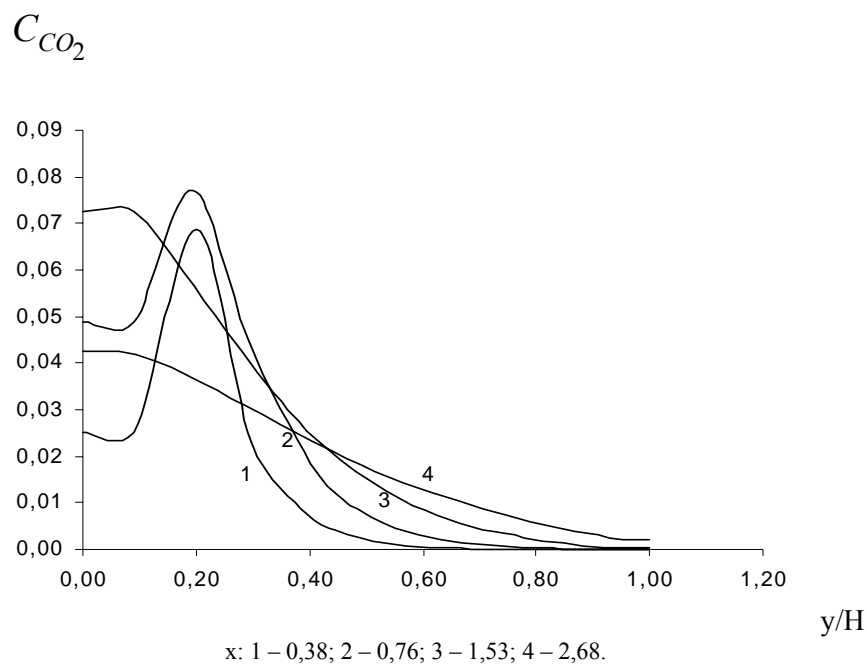


Fig. 4. Distribution of carbon dioxide various cross-section sections of the channel at  $m = 0,75$

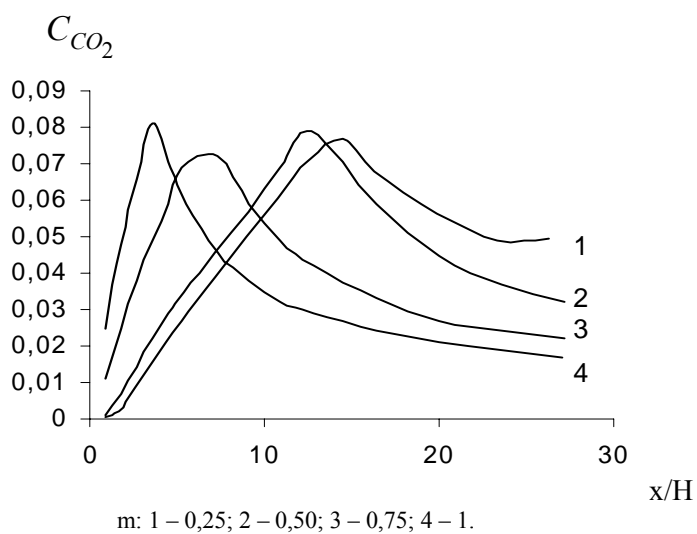
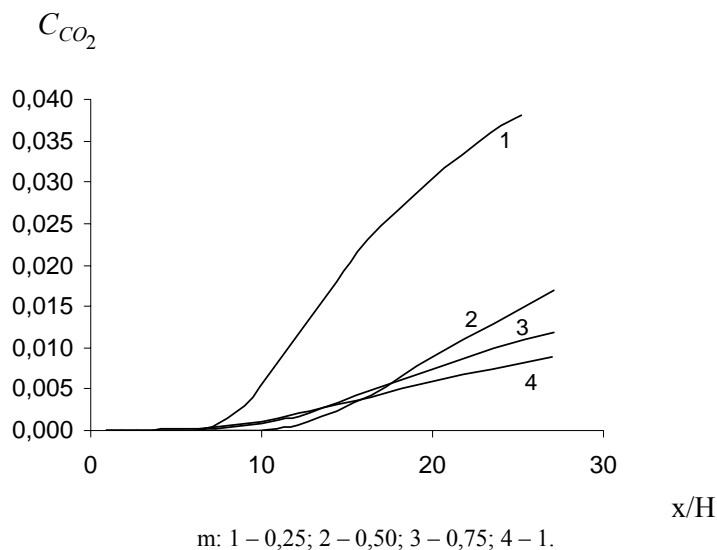


Fig. 5. Change of concentration of carbon dioxide on a channel axis at various parameters of cocurrent flow



**Fig. 6.** Change of concentration of the carbon dioxide on channel walls at various parameters of cocurrent flow

On the axis of the channel ( $y/H = 0$ ) the concentration of CO<sub>2</sub> in the core increases to the torch until the combustion is not complete, and then decreases. This can be seen in Figure 5. Such a pattern is observed for all parameters cocurrent flow. It is a logical result as after burning is completed, carbon dioxide is not formed. With the removal of the entrance channel of CO<sub>2</sub> concentration on the walls ( $y/H = 1$ ) of the channel increases, as they are impenetrable. Figure 6 shows that the CO<sub>2</sub> concentration at the wall is higher, the lower the rate of cocurrent flow. Apparently this is due to the fact that the cocurrent flow near the wall prevents the penetration of carbon dioxide to the walls of the channel and communicates them.

#### REFERENCE

1. Askarova A., Loktionova I., Lavrisheva E., Leitner R., VockrodtS. Usage of plasma technologies for increasing power plant efficiency and decreasing emissions of harmful substances in the process of low-grade coal burning. XXXIII Kraftwerkstechnisches Kolloquium "Zuverlässigkeit von Kraftwerksanlagen im liberalisierten Strommarkt". – Beitragsmanuskripte, Dresden, 2001. – P. 12a-b, 4s.
2. Askarova A., Bolegenova S.A., Maksimov V.Ju. Die zahlenmässige Modelirung des turbulenten Strömungen // Известия НАН РК. – Сер. физ.-мат. – 2009. – № 3. – С. 54-57.
3. Askarova A., Bolegenova S.A., Maksimov V.Ju. Die zahlenmässige Modelirung des turbulenten Strömungen // Известия НАН РК. – Сер. физ.-мат. – 2009. – № 3. – С. 54-57.

Ә. С. Асқарова, С. Ә. Бөлегенова, Ш. С. Оспанова, А. Е. Тұрсынбаева, З. Х. Габитова

#### ТУРБУЛЕНТТІК МЕТАН АҒЫНШАСЫНЫҢ ЖАНУЫ КЕЗІНДЕГІ ЗИЯНДЫ ҚАЛДЫҚТАРДЫҢ ҚАЛЫПТАСУЫНА СЕРІКТЕС АҒЫННЫҢ ӘСЕРІН ЗЕРТТЕУ

Осы жұмыс жазық каналдағы метанның жануы барысындағы тотықтырғыштың серіктес ағыны жылдамдығының көмірқышқыл газының концентрациясына әсерін зерттеуге арналған.

А. С. Асқарова, С. А. Бөлегенова, Ш. С. Оспанова, А. Е. Тұрсынбаева, З. Х. Габитова

#### ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЕ СПУТНОСТИ НА ФОРМИРОВАНИЕ ВРЕДНЫХ ВЫБРОСОВ ПРИ ГОРЕНИИ ТУРБУЛЕНТНОЙ СТРУИ МЕТАНА

Настоящая работа посвящена исследованию влияния скорости спутного потока окислителя на концентрацию углекислого газа при горении метана в плоском канале.



А. С. АСКАРОВА, С. А. БОЛЕГЕНОВА, И. Э. БЕРЕЗОВСКАЯ, Ш. С. ОСПАНОВА,  
А. Б. ЕРГАЛИЕВА, Г. К. МУКАШЕВА, Н. Б. РАХИМБАЕВА

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ САМОВОСПЛАМЕНЕНИЯ ЖИДКИХ ТОПЛИВ ПРИ ГОРЕНИИ

Проведено математическое моделирование процессов распыла воспламенения и горения жидкого топлива в камере сгорания. Получены влияние угла впрыска жидких топлив (тетрадекан и гексадекан) на распределения максимальной температуры и концентрации углекислого газа.

Горение жидких топлив отличается рядом специфических особенностей, обусловленных протеканием химических реакций в условиях динамического и теплового взаимодействия реагентов, интенсивного массопереноса при фазовых превращениях, а также зависимостью параметров процесса как от термодинамического состояния системы, так и от ее структурных характеристик. Многообразие и сложность указанных факторов создают известные трудности при разработке полноценной теории. Существенные результаты в этом направлении могут быть получены на основе последовательного приложения методов механики гетерогенных систем к описанию процессов горения двухфазных сред [1].

При распылении жидкого топлива в неподвижном или движущемся газе образуется двухфазная реагирующая струя – факел жидкого топлива. Механизм горения такого факела заключается в нагреве и испарении капель, смешении паров жидкости с газообразным окислителем, поступающим из окружающей среды, химическом взаимодействии газообразных компонентов и, наконец, в смешении продуктов сгорания с исходными реагентами.

В зависимости от способа образования горючей смеси могут реализоваться различные режимы горения струй распыленной жидкости, а также богатых (при избытке топлива), бедных (значение массы топлива мало) или стехиометрических газок капельных смесей. Во всех случаях характеристики факела зависят от интенсивности испарения, лимитирующей скорость протекания процесса. При высокой степени распыла закономерности распространения факела жидкого топлива во многом сходны с закономерностями распространения турбулентного газового пламени.

Для проведения вычислительных экспериментов по численному моделированию процессов теплообмена при горении жидкого топлива в реальных камерах сгорания, модель цилиндрической камеры высотой  $H=15$  см, радиусом  $R=2$  см, в которой заданы следующие начальные условия: температура – 900 К, давление - 32 Бар. Жидкое топливо массой - 0,006 г впрыскивается в камеру сгорания через круглое сопло, расположенное в центре нижней части камеры, как показано на рис. 1 [2].

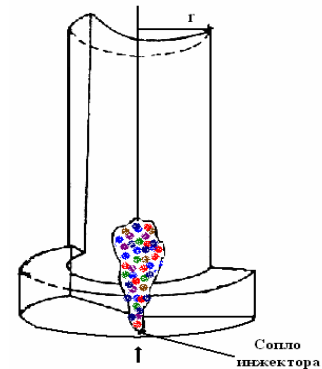


Рис. 1. Геометрия камеры сгорания

Уравнение неразрывности для компоненты  $m$ :

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho_m u) = \vec{\nabla} \left[ \rho D \vec{\nabla} \left( \frac{\rho_m}{\rho} \right) \right] + \dot{\rho}_m^c + \dot{\rho}_m^s \delta_{m1}, \quad (1)$$

уравнение импульса:

$$\frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \vec{u} \vec{u}) = -\frac{1}{a^2} \vec{\nabla} p - A_0 \vec{\nabla} \left( \frac{2}{3} \rho k \right) + \vec{\nabla} \vec{\sigma} + \vec{F}^s + \rho \vec{g}, \quad (2)$$

уравнение энергии:

$$\frac{\partial(\rho I)}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \vec{u} I) = -p \vec{\nabla} \vec{u} + (1 - A_0) \sigma \vec{\nabla} \vec{u} - \vec{\nabla} \vec{J} + A_0 \rho \varepsilon + \dot{Q}^c + \dot{Q}^s, \quad (3)$$

где  $\vec{J} = -K \nabla T - \rho D \sum_m h_m \nabla \left( \frac{\rho_m}{\rho} \right)$ ,

уравнения k-ε модели турбулентности:

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \bar{u} k) = -\frac{2}{3} \rho k \vec{\nabla} \bar{u} + \vec{\sigma} : \vec{\nabla} \bar{u} + \vec{\nabla} \left[ \left( \frac{\mu}{Pr_k} \right) \vec{\nabla} k \right] - \rho \varepsilon + \dot{W}^s, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \bar{u} \varepsilon) = -\left( \frac{2}{3} c_{\varepsilon_1} - c_{\varepsilon_3} \right) \rho \varepsilon \vec{\nabla} \bar{u} + \vec{\nabla} \left[ \left( \frac{\mu}{Pr_\varepsilon} \right) \vec{\nabla} \varepsilon \right] + \frac{\varepsilon}{k} \left[ c_{\varepsilon_1} \vec{\sigma} : \vec{\nabla} \bar{u} - c_{\varepsilon_2} \rho \varepsilon + c_s \dot{W}^s \right] \quad (5)$$

где  $\sigma_{ij} = 2\mu e_{ij} - \frac{2}{3} \mu e_{kk} \delta_{ij}$ ,  $i, j, k = 1, 2, 3$ ,  $e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ ,

$$\mu = (1.0 - A_0) \rho V_0 + \mu_{air} + A_0 \rho c_\mu k^2 / \varepsilon, \quad \mu_{air} = \frac{A_1 T^{3/2}}{(T + A_2)}, \quad K = \frac{\mu c_p}{Pr}, \quad D = \frac{\mu}{\rho Sc}.$$

В данной работе исследовалось 2 вида жидких топлив: тетрадекан ( $C_{14}H_{30}$ ) и гексадекан  $C_{16}H_{34}$ .

В работе были проведены вычислительные эксперименты по численному моделированию процесса горения жидкого топлива и исследовано влияние угла распыла впрыскиваемого топлива на его самовоспламенение и сгорание в камере сгорания. Результаты численного моделирования приведены на рис. 2–6.

На рис. 2-6 представлены результаты 3D моделирования процессов самовоспламенения: поля температуры, концентраций паров углекислого газа, концентраций паров топлива и распределение капель по радиусам для двух видов жидкого топлива: тетрадекана  $C_{14}H_{30}$  и гексадекана  $C_{16}H_{34}$  при равенстве углов *cone* и *dcone*.

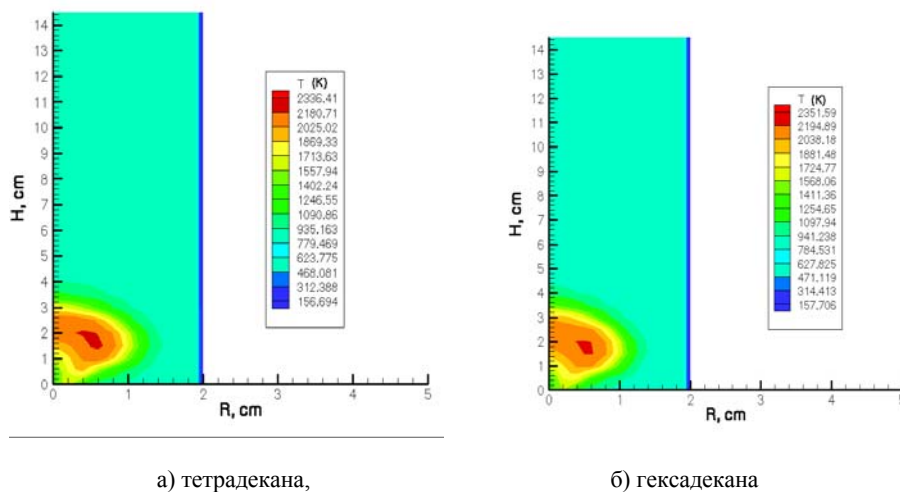


Рис. 2. Поля температуры в момент самовоспламенения  $t = 1.29 \cdot 10^{-3}$  с при горении

Сравнительный анализ рис. 2 показывает, что воспламенение возникает в одинаковый момент времени и на одной высоте относительно камеры для этих двух видов топлив, но очаг воспламенения для тетрадекана занимает больший объем по ширине камеры. Однако процесс горения гексадекана в камере сгорания проходил быстрее и с большим выделением тепла, чем для тетрадекана.

При детальном изучении рис. 3 видно, что при самовоспламенении пары углекислого газа для гексадекана занимают больший объем по ширине камеры и поднимаются на большую высоту, чем пары тетрадекана.

Как показано на рис. 4, в момент самовоспламенения пары гексадекана поднялись на большую высоту, но очаг горения тетрадекана и его пары распространились на больший объем. При горении двух топлив концентрация паров гексадекана выше (случай б), чем для тетрадекана (случай а).

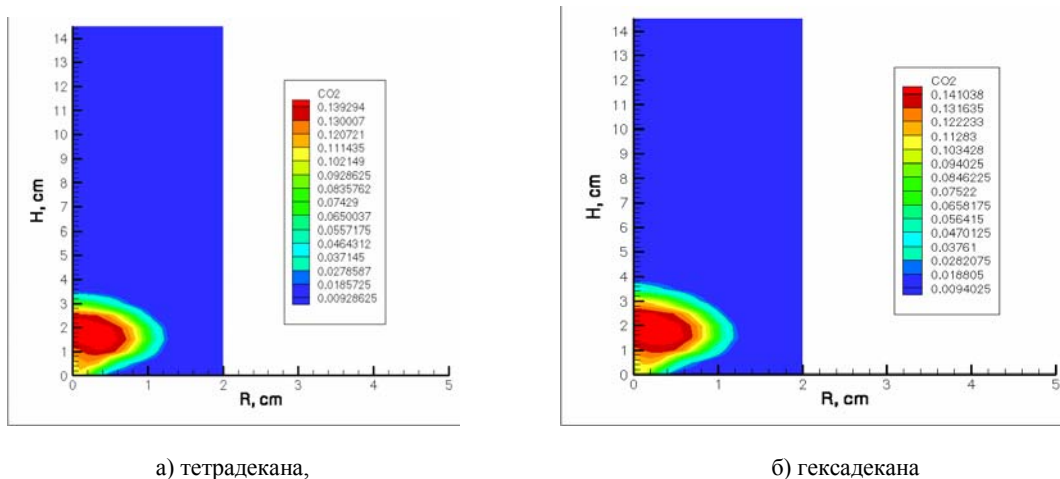


Рис. 3. Распределения концентраций паров углекислого газа в момент самовоспламенения

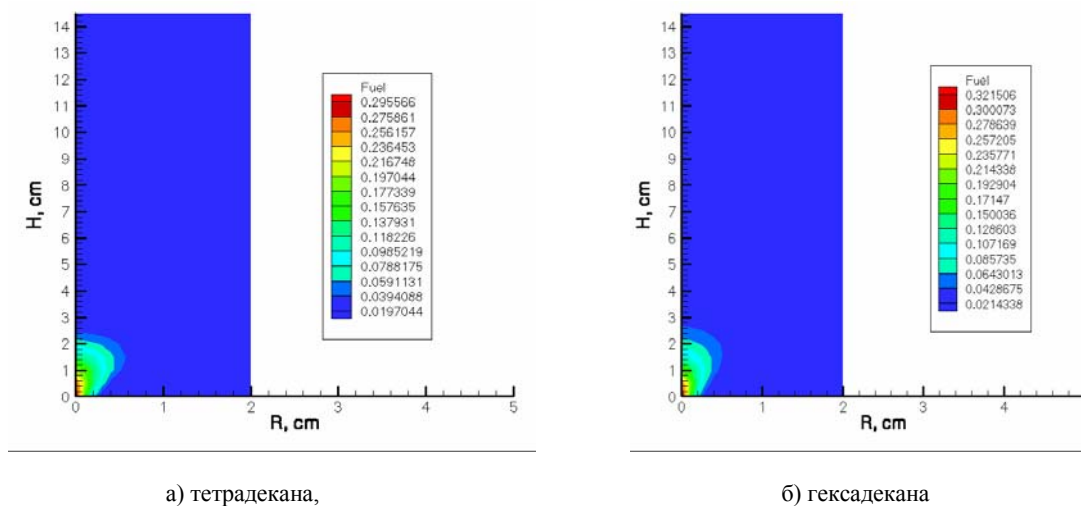


Рис. 4. Распределение концентраций паров топлива в момент самовоспламенения

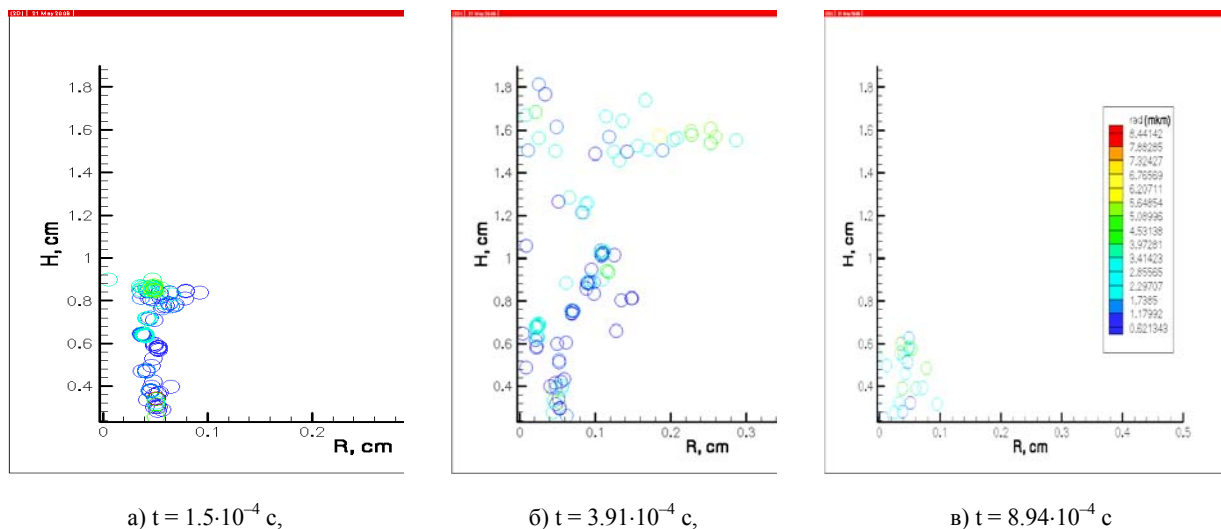


Рис. 5. Распределение капель по радиусам для тетрадекана в моменты времени

На рис. 5 представлено распределение каплей по радиусам при впрыскивании тетрадекана. Анализ рисунка показывает, что с увеличением времени распыла радиус каплей увеличивается, что свидетельствует о соударении и слиянии частиц. При этом капли топлива распространяются на 1,8 см по длине и 0,3 см по ширине камеры сгорания (рис. 5, б). К моменту времени  $t = 8.94 \cdot 10^{-4}$  с (рис. 5, в) капли практически испарились и занимают только нижнюю часть камеры.

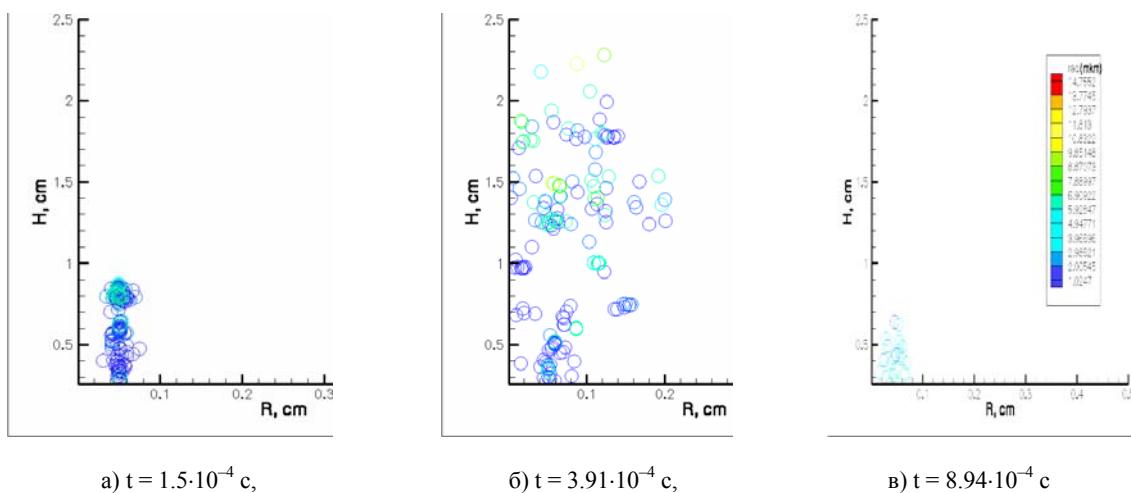


Рис. 6. Распределение каплей по радиусам для гексадекана в моменты времени

Анализ рис. 6 показывает, что капли гексадекана ведут себя аналогично лишь с той разницей, что они распространяются на высоту 2,5 см и по ширине 0,2 см камеры сгорания (рис. 6, б). К моменту времени  $t = 8.94 \cdot 10^{-4}$  с (рис. 6, в) капли гексадекана испаряются и занимают только нижнюю часть камеры.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 Аскарлова А.С., Болегенова С.А., Волошина И.Э., Рыспаева М.Ж. Влияние начальной концентрации топлива на горение ламинарных и турбулентных струй // Вестник КазНУ. Сер. физическая. – 2008. – № 3(27). – С. 177-180.
- 2 Аскарлова А.С., Болегенова С.А., Волошина И.Э., Рыспаева М.Ж. Влияние массы впрыска жидкого топлива на его самовоспламенение и горение. // Известия НАН РК. Сер. физ.-мат. – 2009. – № 2(264). – С. 3-11.

*А. С. Асқарова, С. А. Бөлегенова, И. Э. Березовская, Ш. С. Оспанова,  
А. Б. Ергалиева, Г. К. Мұқашева, Н. Б. Рахымбаева*

#### ЖАНУ КЕЗІНДЕГІ СҰЙЫҚ ОТЫНДАРДЫҢ ӨЗДІГІНЕН ТҰТАНУ ПРОЦЕСІН САНДЫҚ МОДЕЛЬДЕУ

Жану камерасындағы сұйық отынның тұтану және жану процестерін математикалық модельдеу жүргізілді. Сұйық отындарды (тетрадекан мен гексадекан) бұрку бұрыштарының максимал температураның таралуы мен көмірқышқыл газының концентрациясына әсері алынды.

*A. S. Askarova, S. A. Bolegenova, I. E. Berezovskaya, Sh. S. Ospanova,  
A. B. Ergaliev, G. K. Mukasheva, N. B. Rahimbaeva*

#### NUMERICAL SIMULATION OF THE PROCESS OF AUTOIGNITION OF LIQUID FUELS IN COMBUSTION

There were conducted mathematical modeling of spray ignition and combustion of liquid fuel in the combustion chamber. There were obtained the influence of the liquid fuels (tetradecane and hexadecane) injection angle on the distribution of the maximum temperature and the concentration of carbon dioxide.

Ю. В. АРХИПОВ<sup>1</sup>, А. Е. ДАВЛЕТОВ<sup>1</sup>, Е. Б. ЖАНКАРАШЕВ<sup>1</sup>, И. М. ТКАЧЕНКО<sup>2</sup>**ФУНКЦИЯ ПОТЕРЬ В ПРИБЛИЖЕНИИ МЕРМИНА**<sup>1</sup>Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Республика Казахстан<sup>2</sup>Валенсийский политехнический университет, г. Валенсия, Испания

В работе рассматривается однокомпонентная плазма, в которой существенную роль играют столкновения между частицами. Найдено аналитическое выражение для диэлектрической функции в приближении хаотических фаз, справедливое во всей верхней полуплоскости комплексного аргумента частоты. Полученное выражение использовано для вычисления функции потерь столкновительной плазмы путем прямого использования формулы Мермина.

**Введение.** Возможные пути построения диэлектрической функции  $\epsilon(k, \omega)$  или обратной диэлектрической функции  $\epsilon^{-1}(k, \omega)$  широко обсуждаются в современной литературе по физике плазмы, так как она определяет функцию поляризационных потерь ионов, движущихся в плазменной среде [1]. При этом известно, что как прямая, так и обратная диэлектрические функции должны удовлетворять правилам сумм и некоторым точным соотношениям, играющим роль дополнительных законов сохранения [2].

Изучение аналитических свойств обратной диэлектрической функции началось с получения выражения в приближении хаотических фаз и его обобщения в длинноволновом случае, известном как модель Друде-Лоренца. В дальнейшем Мермин [3] обобщил эти результаты на случай столкновительной однокомпонентной плазмы таким образом, чтобы полученная диэлектрическая функция удовлетворяла закону сохранения числа частиц, т.е. второму правилу сумм.

Данная работа посвящена получению выражения для диэлектрической функции в приближении хаотических фаз, справедливом во всей верхней полуплоскости с дальнейшим применением формулы Мермина.

**1. Параметры системы.** Для описания однокомпонентной плазмы удобно пользоваться безразмерными величинами, однозначно характеризующими ее состояние. Среднее межэлектронное расстояние равно

$$a = \left( \frac{3}{4\pi n} \right)^{1/3}, \quad (1)$$

а безразмерный параметр связи

$$\Gamma = \frac{e^2}{ak_B T}, \quad (2)$$

где  $n$  – концентрация электронов;  $T$  – температура плазмы;  $k_B$  – постоянная Больцмана;  $(-e)$  – заряд электрона.

Параметр связи  $\Gamma$  представляет собой отношение средней потенциальной энергии кулоновского взаимодействия ионов в плазме к их средней кинетической энергии теплового движения. При этом случаю  $\Gamma \leq 1$  соответствует слабосвязанная плазма, в которой кулоновское взаимодействие может быть учтено обычными методами теории возмущений, а для сильно связанной плазмы  $\Gamma > 1$ .

Введем также параметр вырождения

$$\Theta = \frac{1}{D} = \frac{k_B T}{E_F} = 2 \left( \frac{4}{9\pi} \right)^{2/3} Z^{5/3} \frac{r_s}{\Gamma}. \quad (3)$$

Здесь  $E_F = \hbar^2 k_F^2 / 2m_e$  – энергия Ферми,  $\hbar$  – постоянная Планка,  $k_F = (3\pi^2 n)^{1/3}$  – волновое число уровня Ферми,  $r_s = \frac{a}{a_0}$ ,  $a_0 = \hbar^2 / m_e e^2$  – первый боровский радиус,  $m_e$  – масса электрона.

Случаю полного вырождения ионов соответствует  $\Theta \ll 1$  ( $D \gg 1$ ), а при  $\Theta \gg 1$  ( $D \ll 1$ ) ионный газ описывается максвелловской функцией распределения.

**2. Диэлектрическая функция в приближении хаотических фаз.** Линдхардом [1] было предложено следующее выражение для диэлектрической функции в приближении хаотических фаз

$$\varepsilon_{RPA}(\mathbf{k}, \omega) = 1 + \frac{4\pi e^2}{k^2} \Pi(\mathbf{k}, \omega), \quad (4)$$

где  $\Pi(\mathbf{k}, \omega)$  представляет собой функцию поляризации, которая вычисляется так:

$$\Pi(\mathbf{k}, \omega) = 2 \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{f_{FD}(\mathbf{p} + \mathbf{k}) - f_{FD}(\mathbf{p})}{\hbar\omega - E(\mathbf{p} + \mathbf{k}) + E(\mathbf{p})}, \quad (5)$$

где  $E(\mathbf{k}) = \hbar^2 k^2 / 2m_e$ ,  $f_{FD}$  – это распределение Ферми-Дирака, имеющее следующий вид

$$f_{FD}(\mathbf{k}) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E(\mathbf{k}) - \mu}{k_B T}\right)}, \quad (6)$$

а  $\mu$  – так называемый химический потенциал системы, определяющийся путем решения нормированного уравнения

$$\frac{2}{3} D^{3/2} = F_{1/2}(\mu / k_B T) = \int_0^\infty \frac{x^{1/2}}{1 + \exp(x - \mu / k_B T)} dx. \quad (7)$$

Ариста и Брандт провели вычисления по формулам (4) и (5) и получили выражения, справедливые для частот  $\omega$ , лежащих на действительной оси [4]. Для применения приближения Мермина представляется важным получение аналитического выражения для диэлектрической функции, справедливого во всей верхней полуплоскости. Последовательное интегрирование в (5) позволяет получить следующее выражение

$$\begin{aligned} \varepsilon_{RPA}(\mathbf{k}, \omega) &= 1 + \frac{4\pi e^2}{k^2} \Pi(\mathbf{k}, \omega) = 1 + \frac{4\pi^2}{k^3} \frac{2mk_F^2}{(2\pi\hbar)^2} \left[ G\left(\frac{\omega}{k v_F} + \frac{k}{2k_F}\right) - G\left(\frac{\omega}{k v_F} - \frac{k}{2k_F}\right) \right] = \\ &= 1 + \frac{1}{4\pi a_0 k_F} \left(\frac{2k_F}{k}\right)^3 \left[ G\left(\frac{\omega}{k v_F} + \frac{k}{2k_F}\right) - G\left(\frac{\omega}{k v_F} - \frac{k}{2k_F}\right) \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$G(\sigma) = \int_0^\infty \frac{y dy}{\exp(Dy^2 - \eta) + 1} \ln\left(\frac{\sigma + y}{\sigma - y}\right) \quad (9)$$

есть комплексная функция комплексного аргумента.

Следует отметить, что результат (8) и (9) для диэлектрической функции справедлив во всей верхней полуплоскости комплексного  $\omega$ . Более того, можно показать, что на действительной оси выражения (8) и (9) переходят в формулы Ариста и Брандта.

**3. Диэлектрическая функция Мермина и функция потерь.** Известно, что выражения (4) и (5), полученные Линдхардом, относятся к так называемой бесстолкновительной плазме. Для учета столкновений между электронами Мермином была предложена следующая эвристическая формула

$$\varepsilon_M(k, \omega) = 1 + \frac{(\omega + i\nu)[\varepsilon_{RPA}(k, \omega + i\nu) - 1]}{\omega + i\nu[\varepsilon_{RPA}(k, \omega + i\nu) - 1] / [\varepsilon_{RPA}(k, 0) - 1]}, \quad (10)$$

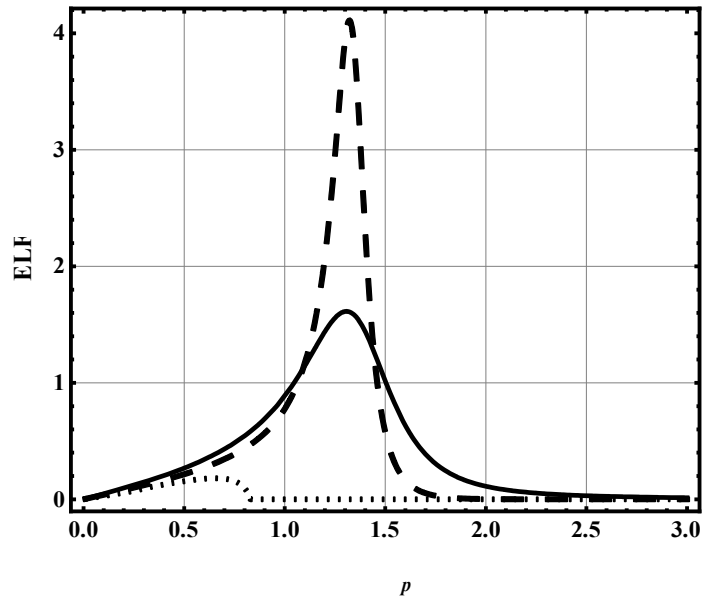
где  $\nu$  – частота столкновений.

Введем также функцию потерь, которая является действительной и легко выражается через диэлектрическую функцию

$$ELF = -\text{Im} \frac{1}{\varepsilon(k, \omega)}. \quad (11)$$

В формулу (11) подставим диэлектрическую функцию (8) и сравним с результатами работы [5], в которой ошибочно использовались формулы Ариста и Брандта [4], справедливые только для действительной оси. Результат сравнения показан на рисунке.

Функция потерь в сравнении с работой [5].  
 Здесь  $\omega_p = (4\pi n e^2 / m_e)$ ,  $k/k_F = 1$ ,  $D = 0.785$ ,  
 $T = 10$  эВ,  $n = 10^{23}$  см $^{-3}$ ,  $\nu = 4$  фс $^{-1}$ .  
 Сплошная кривая: [5], штриховая линия:  
 результаты настоящей работы,  
 точечная линия: полностью  
 вырожденная плазма [5]



**Заключение.** Таким образом, можно сделать вывод о том, что в литературе используется неправильное выражение для диэлектрической функции Мермина, так как применяются формулы Ариста и Брандта, справедливые только для действительной оси по частоте  $\omega$ . В данной работе было получено выражение для диэлектрической функции Мермина в приближении хаотических фаз, справедливое на всей комплексной плоскости аргумента  $\omega$  и показано, что это приводит к существенным численным различиям, которые должны сказаться на вычислении таких важных характеристик плазменной среды как ее тормозная способность.

*Работа частично финансировалась испанским Министерством науки и инноваций, проект № 2010-21116-C02-02. И. М. Т. признателен КазНУ за гостеприимство и ВПУ за предоставленный ему академический отпуск.*

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 Lindhard K., Vidensk Dan. // Selsk. Mat. Fys. Medd. 1954, **28** (8). P. 1.
  - 2 Ichimaru S. Statistical Plasma Physics. Vol. 1 (Addison-Wesley, New York, 1991); Statistical Plasma Physics: Condensed Plasmas. Vol. 2 (Addison-Wesley, New York, 1994).
  - 3 Mermin D. // Phys. Rev. B, 1970, **1**. P. 2362.
  - 4 Arista N.R., Brandt W. // Phys. Rev. A, 1984, **29**. P. 1471.
  - 5 Barriga-Carrasco M.D. // Phys. Rev. E, 2007, **76**. P. 016405.
- Ю. В. Архипов, А. Е. Давлетов, Е. Б. Жанқарашев

Ю. В. Архипов, А. Е. Давлетов, Е. Б. Жанқарашев

#### МЕРМИН ЖУЫҚТАУЫНДАҒЫ ШЫҒЫН ФУНКЦИЯСЫ

Бұл жұмыста бөлшектер арасындағы соқтығысу маңызды роль атқаратын, бір компонентті, тығыз плазма қарастырылған. Жиіліктің кешенді аргументінің барлық жоғарғы жарты жазықтығында жататын, хаустық фазалар жуықтауындағы диэлектрлік функцияның аналитикалық өрнегі алынды. Алынған өрнекке Мермин формуласын тікелей қолдану арқылы, соқтығысқан тығыз плазманың шығын функциясын есептеуге қолданылды.

Yu. V. Arkhipov, A. E. Davletov, Y. B. Zhankarashev

#### LOSS FUNCTION IN THE MERMIN APPROXIMATION

This paper deals with a one-component plasma in which the interparticle collisions play an important role. An analytical expression is found for the plasma dielectric function in the random phase approximation which is valid in the upper-half plane of the complex frequency. An obtained expression is then used for calculation of the loss function of collisional plasmas by direct utilization of the Mermin formula.

УДК 539.143/144

*Р. М. ДЮСЕМБАЕВА, Г. НУРБАКЫТ, Ж. МУКАН*

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАССОВОГО СПЕКТРА МЕЗОНОВ С УЧЕТОМ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭФФЕКТОВ

КазНУ им. аль-Фараби, г. Алматы

*Описание массового спектра адронов с орбитальными и радиальными возбуждениями является одной из фундаментальных проблем сильных взаимодействии. При изучении свойств адронов, состоящих из разных масс кварков, требуется учет релятивистического, непертурбативного характера взаимодействия и нарушение криальной симметрии.*

В релятивистской квантовой теории поля (КТП) образование и описание связанных состояний до сих пор не является хорошо поставленной задачей (см. [1-3]). КТП описывает упругое и неупругое рассеяния свободных релятивистских частиц, находящихся на больших расстояниях друг от друга в состоянии плоских волн. При этом сама формулировка КТП проводится в рамках теории возмущений, т.е. в разложении по степеням взаимодействия, где никакие связанные состояния принципиально возникнуть не могут. Таким образом, возможная постановка задачи на связанные состояния требует выхода за рамки теории возмущений, где имеющиеся методы исследования по сути дела не развиты должным образом.

С другой стороны известно, что энергетический спектр связанного состояния может быть определен с хорошей точностью в рамках нерелятивистской квантовой механики при надлежащем подборе потенциала взаимодействия. Тем не менее, нерелятивистское уравнение Шредингера, дающее математически корректное описание связанных состояний, уже не является достаточным, так как требуется учет релятивистского характера взаимодействия, поскольку для описания современных экспериментальных результатов, полученных как в атомной [4], так и в адронной физиках [5] требуется учет релятивистских поправок.

В работе [6] предложен метод вычисления энергетического спектра на основе исследования асимптотического поведения вакуумного среднего (функции Грина) от токов заряженных скалярных частиц во внешнем калибровочном поле. При определении асимптотического поведения корреляционной функции используется представление в форме функционального интеграла, так что усреднение по внешнему калибровочному полю может быть выполнено точно. Полученное представление похоже на фейнмановский функциональный интеграл по путям [7] в нерелятивистской квантовой механике.

В данной работе вычислены массовый спектр и энергетический спектр мезонов, состоящих из  $(c\bar{c})$ ,  $(b\bar{b})$  кварков с учетом релятивистского характера взаимодействия. Полученные численные результаты приведены в табл. 1 и 2. Также определено расщепление массового спектра этих мезонов спин-синглетного и спин-триплетного состояния для орбитального и радиально возбужденного состояния. Полученные результаты хорошо согласуются с существующими экспериментальными данными.



Таблица 1. Энергетический спектр и массовый спектр мезонов, состоящих из  $(c\bar{c})$  кварков при  $\alpha_s = 0.2, \sigma = 0.24 \text{ GeV}^2$  значениях

	$\ell$	0	1	2	3
$S = 0$	$\rho_S$	0.817	0.604	0.584	0.584
	$u_S$	0.7491	1.2042	1.3621	1.3987
	$E_S$	0.5943	1.0983	1.3923	1.59824
	$x_S$	1.4561	1.5107	1.5661	1.5863
	$z_S$	1.9168	1.3981	1.2186	1.1627
	$\mu_{qs}$	1.5018	1.5713	1.6123	1.659
	$M_{sp}$	3.1072	3.3691	3.7649	4.1682
	Exp [8]	$2.9798 \pm 0.0018$	$3.4150 \pm 0.0008$	$3.840 \pm 0.02$	4.090
$S = 1$	$\rho_t$	0.621	0.529	0.576	0.576
	$u_t$	1.1962	1.9267	1.3871	1.4312
	$E_t$	0.7283	1.1257	1.4286	1.5319
	$x_t$	1.5084	1.5418	1.5869	1.6451
	$z_t$	1.1727	1.1621	1.1492	1.1092
	$\mu_{qt}$	1.5242	1.5651	1.6175	1.6581
	$M_{pt}$	3.1584	3.499	3.8489	4.2079
	Exp [8]	$3.09687 \pm 0.00004$	$3.5105 \pm 0.00012$	4.090	

Таблица 2. Энергетический спектр и массовый спектр мезонов, состоящих из  $(b\bar{b})$  кварков при  $\alpha_s = 0.19, \sigma = 0.23 \text{ GeV}^2$  значениях

	$\ell$	0	1	2	3
$S = 0$	$\rho_S$	0.698	0.618	0.604	0.587
	$u_S$	1.6415	2.5476	2.6714	2.7246
	$E_S$	0.4241	0.7148	0.9564	1.2341
	$x_S$	4.5942	4.6731	4.7048	4.734
	$z_S$	2.68	1.8476	1.7724	1.6798
	$\mu_{qs}$	4.7389	4.7548	4.7895	4.8261
	$M_{sp}$	9.5349	9.8046	10.1962	10.2861
	Exp [8]	$9.300 \pm 0.02$	$9.8598 \pm 0.0013$	10.161	
$S = 1$	$\rho_t$	0.643	0.619	0.589	0.567
	$u_t$	2.0986	2.4394	2.6591	2.7986
	$E_t$	0.4183	0.7041	0.8745	1.1715
	$x_t$	4.6601	4.6745	4.7067	4.7345
	$z_t$	2.1978	1.8947	1.7648	1.6451
	$\mu_{qt}$	4.7434	4.7704	4.7247	4.8197
	$M_{pt}$	9.5172	9.9147	10.1047	10.284
	Exp [8]	$9.4603 \pm 0.00021$	$9.8919 \pm 0.7$		10.2325

## ЛИТЕРАТУРА

- 1 Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантовых полей. – М.: Наука, 1976.
- 2 Weinberg S. The quantum theory of fields. – Cambridge University: Press Cambridge, 1995.
- 3 Itzykson C. and Zuber J.B. Quantum field theory. – McGraw-Hill: New-York, 1980.
- 4 Eides M.I. et al. // Phys. Repor. – 2001. – Vol. 342. – P. 61.
- 5 Amsler C. et al. Review of Particle Physics // Phys. Lett. – 2008. – V. B667. – P. 1.
- 6 Динейхан М., Жаугашева С.А. // ЭЧАЯ. – 2011. – Т. 42. – С. 729-801,
- 7 Feynman R.P. and Hibbs A.P. Quantum Mechanics and Path Integrals (Mc Graw-Hill, New York, 1963).
- 8 Amsler C., et al. Particle Data Group // Phys. Lett. – B. 2008. – V. 667. – P. 1-1340.

А. Т. САРСЕМБАЕВА, Н. Ж. ТАКИБАЕВ

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОНЦЕНТРАЦИЙ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ МОЛЕКУЛЯРНЫХ ИОНОВ $H_2^+$ И ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ИОНОВ $H^-$ ПРИ ТЕМПЕРАТУРАХ 5000-15000 К

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы

*В работе была определена концентрация положительных молекулярных ионов  $H_2^+$  и концентрации отрицательных ионов  $H^-$  при температурах 5000-15000 К.*

**Введение.** Вещество на Солнце находится в состоянии значительной ионизации. Процесс ионизации состоит в том, что при возрастающей энергии движения атомов и энергии световых квантов столкновения атомов между собой и поглощение фотонов могут привести к такому возбуждению атома, когда электрон вовсе покидает его. В результате этого из одного нейтрального атома получаются две заряженные частицы - положительный ион и отрицательный электрон. В этом отношении ионизацию можно рассматривать как своеобразную диссоциацию [1].

Исследование связанно-свободных радиационных переходов в водородной плазме в условиях локального термодинамического равновесия позволяет получать важную информацию о наиболее эффективных источниках непрерывного фотопоглощения в звездных атмосферах. Известно, что в квазиравновесной водородной плазме с эффективной температурой  $T_{eff} \approx 6000\text{К}$  (характерной для фотосферы Солнца) основной вклад в поглощение света в видимой области спектра вносит процесс фотоотрыва электрона от отрицательного иона  $H^-$ , концентрация которого мала и составляет  $N_{H^-}/N_H \sim 10^{-3}$  от концентрации нейтрального атома водорода  $H$  [2].

### КОНЦЕНТРАЦИЯ ИОНОВ $H^-$ И $H_2^+$

Концентрация ионов  $H^-$  вычисляется по этой формуле [2]

$$N_{H^-} = \frac{g_{H^-}}{g_e g_H} \left( \frac{2\pi\hbar^2}{m_e kT} \right)^{3/2} \exp\left(\frac{\epsilon_{H^-}}{kT}\right) N_H N_e, \quad (1)$$

где  $\epsilon_{H^-} = 0.754 \text{ эВ}$  - энергия связи электрона в отрицательном ионе  $H^-$ ;  $g_{H^-} = 1$  - статистический вес состояния,  $g_e = 2$ , а  $g_H = 2$  - статистический вес атома водорода в основном состоянии [2].

Полная концентрация  $N_{H_2^+} = \sum_{vJ} N_{vJ}$  положительных молекулярных ионов  $H_2^+$  может быть найдена с помощью закона действующих масс

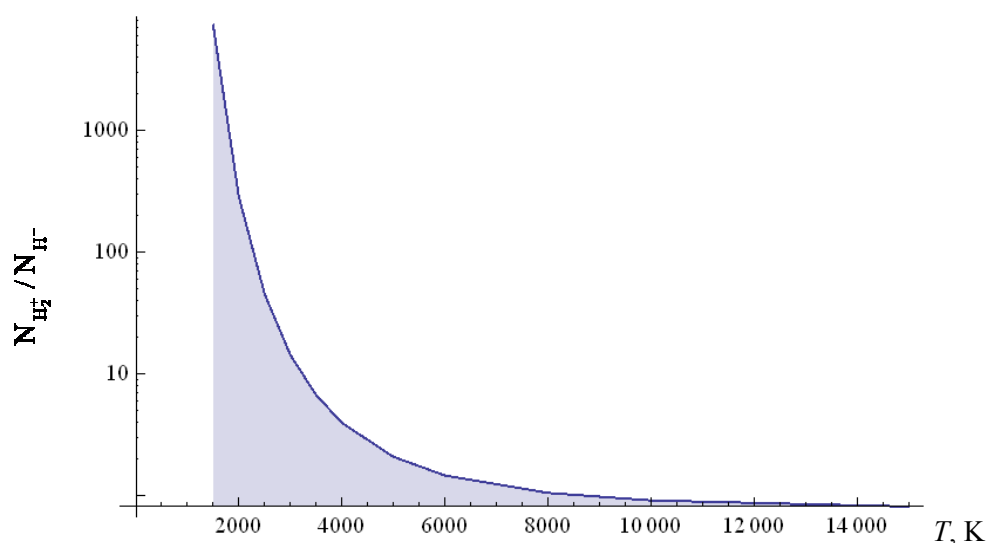
$$N_{H_2^+} = \frac{Z_{vJ} g_{H_2^+}}{\kappa g_H g_{H^+}} \left( \frac{2\pi\hbar^2}{\mu kT} \right)^{3/2} \exp\left(\frac{D_0}{kT}\right) N_H N_{H^+}. \quad (2)$$

Здесь  $g_H = 2$ ,  $g_{H^+} = 1$ ,  $g_{H_2^+} = 2$ ,  $\kappa = 2$  и  $D_0 = 2.651 \text{ эВ}$ . Для внутренней статистической суммы  $Z = (g_{H_2^+}/\kappa) Z_{v,J}$  здесь используем квантовый результат [4],

полученный с помощью имеющихся значений всех колебательно-вращательных уровней энергии иона  $H_2^+$ . В таблице представлены результаты расчетов концентраций ионов  $H_2^+$  и  $H^-$ . Как видно из таблицы, при достаточно высоких температурах  $T \sim 6500-15000 \text{ К}$  полная концентрация  $N_{H_2^+}$  молекулярного иона  $H_2^+$  и концентрация ионов  $H^-$  оказывается одного и того же порядка величины. При понижении температуры концентрация ионов  $N_{H_2^+}$  ионов  $H_2^+$  возрастает и значительно превышает величину  $N_{H^-}$  [3].

**Зависимости относительных концентраций положительных молекулярных ионов  $H_2^+$  и отрицательных ионов  $H^-$  от температуры равновесной водородной плазмы**

$T, K$	$N_{H_2^+}, cm^3$	$N_{H^-}, cm^3$	$N_{H_2^+}/N_{H^-}$
5000	$3.51818 \cdot 10^{-21}$	$1.68767 \cdot 10^{-21}$	2.08464
5500	$2.12707 \cdot 10^{-21}$	$1.2476 \cdot 10^{-21}$	1.70493
6000	$1.40478 \cdot 10^{-21}$	$9.58935 \cdot 10^{-22}$	1.46494
6500	$9.91281 \cdot 10^{-22}$	$7.6016 \cdot 10^{-22}$	1.30404
7000	$7.35903 \cdot 10^{-22}$	$6.17804 \cdot 10^{-22}$	1.19116
7500	$5.68402 \cdot 10^{-22}$	$5.12505 \cdot 10^{-22}$	1.10907
8000	$4.53073 \cdot 10^{-22}$	$4.32488 \cdot 10^{-22}$	1.0476
8500	$3.70447 \cdot 10^{-22}$	$3.70276 \cdot 10^{-22}$	1.00046
9000	$3.09269 \cdot 10^{-22}$	$3.20954 \cdot 10^{-22}$	0.963593
9500	$2.62698 \cdot 10^{-22}$	$2.81182 \cdot 10^{-22}$	0.934263
10000	$2.26406 \cdot 10^{-22}$	$2.48636 \cdot 10^{-22}$	0.910592
11000	$1.74206 \cdot 10^{-22}$	$1.99028 \cdot 10^{-22}$	0.875284
12000	$1.39074 \cdot 10^{-22}$	$1.63467 \cdot 10^{-22}$	0.850777
13000	$1.14202 \cdot 10^{-22}$	$1.37062 \cdot 10^{-22}$	0.833214
14000	$9.58806 \cdot 10^{-23}$	$1.16883 \cdot 10^{-22}$	0.820313
15000	$8.19463 \cdot 10^{-23}$	$1.01088 \cdot 10^{-22}$	0.810643



Отношение полной концентрации  $N_{H_2^+} = \sum_{vJ} N_{vJ}$  положительных молекулярных ионов  $H_2^+$  к концентрации отрицательных ионов  $H^-$  в зависимости от температуры равновесной водородной плазмы. Принято, что концентрация электронов и протонов равны  $N_e = N_{H^+}$

**Заключение.** В статье определена концентрация положительных молекулярных ионов  $H_2^+$  и концентрации отрицательных ионов  $H^-$  в зависимости от температуры равновесной водородной плазмы. Было показано, что при достаточно высоких температурах  $T \sim 6500-15000$  К полная концентрация  $N_{H_2^+}$  молекулярного иона  $H_2^+$  и концентрация ионов  $H^-$  оказывается одного и того же порядка величины. При понижении температуры концентрация ионов  $N_{H_2^+}$  ионов  $H_2^+$  возрастает и значительно превышает величину  $N_{H^-}$ .

ЛИТЕРАТУРА

1 Мартынов Д.Я. Курс практической астрофизики. – М.: Наука, 1977; Лебедев В.С., Пресняков Л.П., Собельман И.И. Радиационные переходы молекулярного иона  $H_2^+$  // УФН. 2003. – Т. 173, № 5.

2 Лебедев В.С. Связанно-свободные и свободно-свободные фотопереходы в квазиравновесной водородной плазме // Энциклопедия низкотемпературной плазмы / Под ред. В. Е. Фортова. – Москва: Янус-К, 2007. – Сер. Б. – Т. V-1, ч. II, раздел IV, гл. 6. Сс. 75-105. –

3 Термодинамические свойства индивидуальных веществ / Под ред. Л. В. Гурвича и др. – М.: Наука, 1978. – Т. I.

*A. T. Sarsembayeva, N. Zh. Takibayev*

**$H_2^+$  ОҢ МОЛЕКУЛАЛЫҚ ИОННЫҢ ЖӘНЕ  $H^-$  ТЕРІС ИОННЫҢ 5000-15000 К  
ТЕМПЕРАТУРА АРАЛЫҒЫНДАҒЫ КОНЦЕНТРАЦИЯСЫН АНЫҚТАУ**

Бұл жұмыста  $H_2^+$  оң молекулалық ионның және  $H^-$  теріс ионның 5000-15000 К температура аралығындағы концентрациясы анықталды.

*A. T. Sarsembayeva, N. Zh. Takibayev*

**DEFINITION OF POSITIVE  $H_2^+$  AND NEGATIVE  $H^-$  MOLECULAR IONS  
AT TEMPERATURES 5000-15000 K**

In this paper has been certain concentration of positive molecular ions  $H_2^+$  and concentration of negative ions  $H^-$  at temperatures 5000-15000 K.

## СОДЕРЖАНИЕ

## Математика, механика

<i>Алексеева Л.А., Гирнис С.Р., Украинец В.Н.</i> Задача о действии транспортной нагрузки на многослойную оболочку в упругом массиве.....	3
<i>Искаков Ж.</i> Тік қатаң теңгерілмеген гироскоптық ротордың сызықты емес резонанстық тербелістерінің орнықтылығы.....	11
<i>Шинибаев М.Д., Беков А.А., Досыбеков С.К., Таскулова А.М., Нурсеитов К.С., Астемесова К.С.</i> Метод кеплеровских оскулирующих элементов во второй задаче Хилла.....	17
<i>Шинибаев М.Д., Беков А.А., Бекболатова С.С., Тилеубердиев Б., Астемесова К.С., Усипбекова Д.И.</i> Параболический тип движения ИСЗ в стационарном поле тяготения Земли.....	24

## Физики плазмы, газов и жидкостей

<b>Баимбетов Ф.Б.</b> , <i>Жукешов А.М., Амренова А.У., Габдуллина А.Т.</i> Особенности работы импульсного плазменного ускорителя в режиме со сплошным наполнением.....	28
<i>Бастыкова Н.Х., Коданова С.К., Рамазанов Т.С., Майоров С.А.</i> Моделирование кинетики электронов в газоразрядной плазме.....	31
<i>Молдабаев Ж.А., Коданова С.К., Рамазанов Т.С.</i> Исследование эффективного потенциала взаимодействия пылевых частиц на основе экспериментальной парной корреляционной функций.....	40
<i>Аскарова А.С., Болегенова С.А., Максимов В.Ю., Бекетаева М.Т., Нугманова А.О.</i> Горение пылеугольного топлива в топочной камере сгорания.....	45
<i>Аскарова А.С., Болегенова С.А., Максимов В.Ю., Бекетаева М.Т.</i> Численное исследование турбулентных течений в канале с дополнительным источником массы.....	49
<i>Аскарова А.С., Болегенова С.А., Оспанова Ш.С., Турсынбаева А.Е., Габитова З.Х.</i> Исследование влияние спутности на формирование вредных выбросов при горении турбулентной струи метана.....	52
<i>Аскарова А.С., Болегенова С.А., Березовская И.Э., Оспанова Ш.С., Ергалиева А.Б., Мукашева Г.К., Рахимбаева Н.Б.</i> Численное моделирование процессов самовоспламенения жидких топлив при горении.....	57
<i>Архипов Ю.В., Давлетов А.Е., Жанкарашев Е.Б., Ткаченко И.М.</i> Функция потерь в приближении Мермина.....	61

## Физика атомного ядра и элементарных частиц

<i>Дюсембаева Р.М., Нурбакыт Г., Мукан Ж.</i> Определение массового спектра мезонов с учетом релятивистских эффектов.....	64
<i>Сарсембаева А.Т., Такибаев Н.Ж.</i> Определение концентраций положительных молекулярных ионов $H_2^+$ и отрицательных ионов $H^-$ при температурах 5000-15000 К.....	66

Редактор *М. С. Ахметова, Ж. М. Нургожина*  
Верстка на компьютере *Д. Н. Калкабековой*

Подписано в печать 15.05.2012.  
Формат 60x881/8. Бумага офсетная. Печать – ризограф.  
4,4 п.л. Тираж 300. Заказ 2.