ISSN 1991-346X

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ

Х А Б А Р Л А Р Ы

ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

N E W S

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА СЕРИЯСЫ

♦

СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

♦

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

4 (302)

ШІЛДЕ – ТАМЫЗ 2015 ж.
ИЮЛЬ – АВГУСТ 2015 г.
JULY – AUGUST 2015

1963 ЖЫЛДЫҢ ҚАҢТАР АЙЫНАН ШЫҒА БАСТАҒАН
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1963 ГОДА
PUBLISHED SINCE JANUARY 1963

ЖЫЛЫНА 6 РЕТ ШЫҒАДЫ
ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД
PUBLISHED 6 TIMES A YEAR

АЛМАТЫ, ҚР ҰҒА
АЛМАТЫ, НАН РК
ALMATY, NAS RK

«Известия НАН РК. Серия физико-математическая». ISSN 1991-346Х
Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы)
Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации и архивов Министерства культуры и информации Республики Казахстан **№5543-Ж**, выданное 01.06.2006 г.

Периодичность: 6 раз в год.
Тираж: 300 экземпляров.

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, ком. 219, 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,
www:nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75.

News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physical-mathematical series.
ISSN 1991-346X
Owner: RPA "National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan" (Almaty)
The certificate of registration of a periodic printed publication in the Committee of information and archives of the Ministry of culture and information of the Republic of Kazakhstan N 5543-Ж, issued 01.06.2006

Periodicity: 6 times a year
Circulation: 300 copies

Editorial address: 28, Shevchenko str., of. 219, 220, Almaty, 050010, tel. 272-13-19, 272-13-18,
www:nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

Address of printing house: ST "Aruna", 75, Muratbayev str, Almaty

N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 4, Number 302 (2015), 120 – 124

THE CRITERION OF ONE-VALUED SOLVABILITY OF DIRICHLET AND POINCARE SPECTRAL PROBLEMS FOR GELLERSTEDT MULTIDIMENSIONAL EQUATION

S. A. Aldashev[1], B. Uaisov[2]

[1]Kazakh National Pedagogical University named after Abai, Almaty, Kazakhstan,
[2]Kazakh Academy of Transport and Communications named after M.Tynyshbayev, Almaty, Kazakhstan.
E-mail: Aldash51@mail.ru

Key words: criterion, spectral problems, multidimensional, Bessel function.

Abstract. It has been shown in a plane that one of fundamental problems of Math Physics, i.e. studying the behavior of a hesitating string, is not correct when boundary conditions are given on the whole boundary of the domain. As it is shown below, Dirichlet problem is incorrect not just for a wave equation but for general hyperbolic equations.

The criterion of one-valued solvability of Dirichlet and Poincare spectral problems for Gellerstedt multidimensional equation is obtained in the article.

УДК 517.956

КРИТЕРИЙ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДИРИХЛЕ И ПУАНКАРЕ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ГЕЛЛЕРСТЕДТА

С. А. Алдашев[1], Б. Уаисов[2]

[1]Казахский национальный педагогический университет им. Абая, Алматы, Казахстан,
[2]Казахская академия транспорта и коммуникаций им. М. Тынышпаева, Алматы, Казахстан

Ключевые слова: критерий, спектральные задачи, многомерное, функция Бесселя.

Аннотация. На плоскости было показано, что одна из фундаментальных задач математической физики – изучение поведения колеблющейся струны некорректна, когда краевые условия заданы на всей границе

области. Как показано далее, задача Дирихле некорректна не только для волнового уравнения, но и для общих гиперболических уравнений.

В работе получен критерий однозначной разрешимости спектральных задач Дирихле и Пуанкаре в цилиндрической области для многомерного уравнения Геллерстедта.

1. Постановка задачи и результат. Пусть Ω_β – цилиндрическая область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1, x_2, ..., x_m, t)$, ограниченная цилиндром $r = \{(x,t): |x| = 1\}$, плоскостями $t = \beta > 0$ и $t = 0$, где $|\overline{x}|$ - длина вектора $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_m)$. Части этих поверхностей, образующих границу $\partial\Omega_\beta$ области Ω_β, обозначим через $\Gamma_\beta, S_\beta, S_0$ соответственно.

В области Ω_β рассмотрим многомерное уравнение Геллерстедта со спектральным действительным параметром

$$t^p \Delta_x u - u_{tt} = \gamma u, \tag{1}$$

где $p = const > 0$, Δ_x - оператор Лапласа по переменным $x_1, x_2, ..., x_m$, $m \geq 2$

В качестве многомерных спектральных задач Дирихле и Пуанкаре рассмотрим следующие задачи.

Задача 1. Найти решение (1) в области Ω_β из класса $C(\overline{\Omega}_\beta) \cap C^2(\Omega_\beta)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u/_{S_0} = 0,\ u/_{\Gamma_\beta} = 0,\ u/_{S_\beta} = 0, \tag{2}$$

или

$$u_t/_{S_0} = 0,\ u/_{\Gamma_\beta} = 0,\ u/_{S_\beta} = 0, \tag{3}$$

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1, x_2, ..., x_m, t$ к сферическим $r, \theta_1, \theta_2, ..., \theta_{m-1}, t,\ r \geq 0,\ 0 \leq \theta_1 \leq 2\pi, 0 \leq \theta_i \leq \pi,\ \ i = 2,3,...,m-1$.

Пусть $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$- система линейно независимых сферических функций порядка $n, 1 \leq k \leq k_n,\ (m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(n+m-2),\ \theta = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_{m-1})$.

Тогда справедлива

Теорема. 1) Если $\gamma \leq -\mu_{s,n}^2$, то задача 1 имеет только нулевое решение; 2) при $\gamma > -\mu_{s,n}^2$ задача 1 имеет только тривиальное решение, тогда и только тогда, когда

$$\cos\beta'\sqrt{\gamma + \mu_{s,n}^2} \neq 0,\ s = 1,2,... \tag{4}$$

где $\beta' = \dfrac{2}{2+p}\beta^{\frac{(2+p)}{2}}$, $\mu_{s,n}$ - нули функций Бесселя первого рода $\mathcal{I}_{tt+\frac{(m-2)}{2}}(\mathcal{Z})$.

2. Доказательство теоремы. В сферических координатах уравнения (1) имеет вид

$$t^p\left(u_{rr} + \frac{m-1}{r}u_r - \frac{\delta u}{r^2}\right) - u_{tt} = \gamma u, \tag{5}$$

$$\delta \equiv -\sum_{j=1}^{m-1}\frac{1}{g_j \sin^{m-j-1}\theta_j}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(\sin^{m-j-1}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\right),\ g_1 = 1,\ g_j = (\sin\theta_1 ... \sin\theta_{j-1})^2,\ j > 1.$$

Известно ([1]), что спектр оператора δ состоит из собственных чисел $\lambda_n = n(n+m-2)$, $n = 0,1,...$, каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных функций $Y_{n,m}^k(\theta)$.

Так как искомое решение задачи 1 принадлежит классу $C(\overline{\Omega}_\beta)\bigcap C^2(\Omega_\beta)$, то его можно искать в виде

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\overline{u}_n^k(r,t)Y_{n,m}^k(\theta), \tag{6}$$

где $\overline{u}_n^k(r,t)$ - функции, подлежащие определению.

Подставляя (6) в (5), используя ортогональность сферических функций $Y_{n,m}^k(\theta)$ ([1]), будем иметь

$$t^p\left(\overline{u}_{nrr}^k+\frac{m-1}{r}\overline{u}_{nr}^k-\frac{\lambda_n}{r^2}\overline{u}_n^k\right)-\overline{u}_{ntt}^k=\gamma\overline{u}_n^k,\ k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,... \tag{7}$$

при этом краевые условия (2) и (3), с учетом леммы 1, соответственно запишутся в виде

$$\overline{u}_n^k(r,0)=0,\overline{u}_n^k(1,t)=0,\ \overline{u}_n^k(r,\beta)=0,\ k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,...\ , \tag{8}$$

$$\overline{u}_{nt}^k(r,0)=0,\overline{u}_n^k(1,t)=0,\ \overline{u}_n^k(r,\beta)=0,\ k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,...\ , \tag{9}$$

Произведя замену $\overline{u}_n^k(r,t)=r^{\frac{(1-m)}{2}}u_n^k(r,t)$, и положив, затем $r=r,\ x_0=\dfrac{2}{2+p}t^{\frac{2}{2+p}}$, задачи (7), (8) и (7), (9) приведем к следующим задачам Дирихле и Пуанкаре

$$L_\alpha v_{\alpha,n}^k\equiv v_{\alpha,nrr}^k-v_{\alpha,nx_0x_0}^k-\frac{\alpha}{x_0}v_{\alpha,nx_0}^k+\frac{\overline{\lambda}_n}{r^2}v_{\alpha,n}^k-\gamma v_{\alpha,n}^k=0,\quad \mathrm{k}=\overline{1,\mathrm{k_n}},\ \mathrm{n}=0,1,... \tag{10_α}$$

$$v_{\alpha,n}^k(r,0)=0,\ v_{\alpha,n}^k(1,x_0)=0,\ v_{\alpha,n}^k(r,\beta')=0,\ k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,..., \tag{11}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_0}v_{\alpha,n}^k(r,0)=0,\ v_{\alpha,n}^k(1,x_0)=0,\ v_{\alpha,n}^k(r,\beta')=0,\ k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,..., \tag{12}$$

где

$$0<\alpha=\frac{p}{2+p}<1,\ \overline{\lambda}_n=\frac{[(m-1)(3-m)-4\lambda_n]}{4},\ v_{\alpha,n}^k(r,x_0)=u_n^k\left[r,\left(\frac{2+p}{2}x_0\right)^{\frac{2}{2+p}}\right]$$

Наряду с уравнением (10_α) рассмотрим уравнение

$$L_0v_{0,n}^k\equiv v_{0,nrr}^k-v_{0,nx_0x_0}^k+\frac{\overline{\lambda}_n}{r^2}v_{0,n}^k-\gamma v_{0,n}^k=0, \tag{10_0}$$

Как доказано в [2, 3] (см. также [4]), существует следующая функциональная связь между решениями задачи Коши для уравнений (10_α) и (10_0).

Утверждения 1. Если $v_{0,n}^{k,1}(r,x_0)$-решение задачи Коши для уравнения (10_0), удовлетворяющее условиям

$$v_{0,n}^{k,1}(r,0)=\tau_n^k(r),\ \frac{\partial}{\partial x_0}v_{0,n}^{k,1}(r,0)=0, \tag{13}$$

то функция

$$v_{\alpha,n}^{k,1}(r,x_0)=\gamma_\alpha\int_0^1 v_{0,n}^{k,1}(r,\xi x_0)\left(1-\xi^2\right)^{\frac{\alpha}{2}-1}d\xi\equiv 2^{-1}\gamma_\alpha\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)x_0^{1-\alpha}D_{0x_0^2}^{-\frac{\alpha}{2}}\left[\frac{v_{0,n}^{k,1}(r,x_0)}{x_0^2}\right] \tag{14}$$

при $\alpha>0$ является решением уравнения (10_α) с данными (13).

Утверждения 2. Если $v_{0,n}^{k,1}(r,x_0)$-решение задачи Коши для уравнения (10_0), удовлетворяющее условиям

$$v_{0.n}^{k,1}(r,0)=\frac{v_n^k(r)}{(1-\alpha)(3-\alpha)\dots(2q+1-\alpha)},\ \ \frac{\partial}{\partial x_0}v_{0.n}^{k,1}(r,0)=0,$$

то при $0<\alpha<1$ функция

$$v_{\alpha,n}^{k,2}(r,x_0)=\gamma_{2-k+2q}\left(\frac{1}{x_0}\frac{\partial}{\partial x_0}\right)^q\left[x_0^{1-\alpha+2q}\int_0^1 v_{0,n}^{k,1}(r,\xi x_0)\left(1-\xi^2\right)^{q-\frac{\alpha}{2}}d\xi\right]\equiv$$

$$\equiv 2^{q-1}\gamma_{2-k+2q}\Gamma\left(q-\frac{\alpha}{2}+1\right)D_{0x_0^2}^{\frac{\alpha}{2}-1}\left[\frac{v_{0,n}^{k,1}(r,x_0)}{x_0}\right] \qquad (15)$$

является решением уравнения (10_α) с начальными данными

$$v_{\alpha.n}^{k,2}(r,0)=0.\ \lim_{x_0\to 0}x_0^\alpha\frac{\partial}{\partial x_0}v_{\alpha.n}^{k.2}(r,x_0)=v_n^k(r),$$

где $\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\gamma_\alpha=2\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)$, $\Gamma(z)$- гамма-функция D_{0t}^α- оператор Римана-Лиувилля ([2]), а $q\geq 0$- наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству $2-\alpha+2q\geq m-1$.

Учитывая формулу (15), а также обратимость оператора D_{0t}^α ([2]), задачу Дирихле (10_α), (11) сводим к задаче Пуанкаре для уравнения (10_0), с условием

$$\frac{\partial}{\partial x_0}v_{0,n}^{k,1}(r,0)=0,\ v_{0,n}^{k,1}(1,x_0)=0,\ v_{0,n}^{k,1}(r,\beta')=0,\ k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,..., \qquad (16)$$

Используя формулу (14), задачу Пуанкаре (10_α), (12) также приводим к задаче (10_0), (16).

В [5] показано, что 1) если $\gamma\leq-\mu_{s,n}^2$, то задача (10_0) (16) имеет только нулевое решение; 2) при $\gamma>-\mu_{s,n}^2$ задача (10_0) (16) имеет только тривиальное решение, тогда и только тогда, когда имеет место условие (4).

Далее, используя утверждения 1 и 2, устанавливаются аналогичные результаты для задач (10_α), (11) и (10_α), (12).

Следовательно, из (6) следует справедливость теоремы 1 для задачи 1.

Заметим, что при $\gamma=0$ теорема 1 согласуется с результатами работы [6].

Отметим, также, что теорема 1 анонсировано в [7].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения, М.: Физматгиз, 1962-254с.

[2] Алдашев С.А. Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. Алматы: Ғылым, 1994-170с.

[3] Алдашев С.А. Вырождающиеся многомерные гиперболические уравнения, Орал: ЗКАТУ, 2007-139с.

[4] Терсенов С.А. Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе, Новосибирск: НГУ, 1973-94с.

[5] Алдашев С.А. Критерий однозначной разрешимости спектральной задачи Пуанкаре в цилиндрической области для многомерного волнового уравнения// Материалы I международной конференции молодых ученых «Математическое моделирование фрактальных процессов, родственные проблемы анализа и информатики», Нальчик: НИИ ПМА КБНЦ РАН, 2011-с. 35-39.

[6] Алдашев С.А. Корректность задач Дирихле и Пуанкаре в цилиндрической области для многомерного уравнения Геллерстедта// Украинский математический журнал, 2012, т.64, №3-с.3-9.

[7] Алдашев С.А. Критерий однозначной разрешимости спектральной задач Дирихле и Пуанкаре для многомерного уравнения Геллерстедта// Материалы международной конференции «Математическое моделирование фрактальных процессов, родственные проблемы анализа и информатики», Нальчик: НИИ ПМА КБНЦ РАН, 2013-с. 31-33.

REFERENCES

[1] Mikhlin S.G. Multidimensional singular integrals and integral equations, M.: Physmathgiz, **1962**, 254 p. (in Russ.).

[2] Aldashev S.A. Boundary value problems for multidimensional hyperbolic and mixed equations, Almaty: Gylym, **1994**, 170 p. (in Russ.).

[3] Aldashev S.A. Confluent multidimensional hyperbolic equations, Oral: ZKATU, **2007**, 139 p. (in Russ.).

[4] Tersenov S.A. Introduction to the theory of equations confluent on the boundary, Novosibirsk: NGU, **1973**, 94 p. (in Russ.).

[5] Aldashev S.A. Criterion of one-valued solvability of Poincare spectral problem in a cylindrical domain for a multi-dimensional wave equation, Materials of the IInternational conference of young scientists "Math modeling of fractal processes, related problems of analysis and informatics", Nalchik: SRI PMA KBSC RAS, **2011**. P. 35-39. (in Russ.).

[6] Aldashev S.A. Correctness of Dirichlet and Poincare problems in a cylindrical domain for Gellerstedt multidimensional equation , Ukrainian math journal, **2012**, v.64, №3, p.3-9. (in Russ.).

[7] Aldashev S.A. Criterion nfone-valueds olvability of Dirichlet and Poincare spectral problem for Gellerstedt multi-dimensional equation, Materials of the International conference of young scientists "Math modeling of fractal processes, related problems of analysis and informatics", Nalchik: SRI PMA KBSC RAS, **2013**, p. 31-33. (in Russ.).

КӨП ӨЛШЕМДІ ГЕЛЛЕРСТЕДТ ТЕҢДЕУІНЕ СПЕКТАРЛІК ДИРИХЛЕ ЖӘНЕ ПУАНКАРЕ ЕСЕПТЕРІНІҢ БІР МӘНДІ ШЕШІМДІЛІК КРИТЕРИЯСЫ

С. А. Алдашев[1], Б. Уаисов[2]

[1]Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университет, Алматы, Қазакстан,
[2]М. Тынышбаев атындағы Қазақ көлік және коммуникация академиясы, Алматы, Қазакстан

Тірек сөздер: критерия, спектрлік есептер, көп өлшемді, Бессель функциясы.

Аннотация. Жазықтықта көрсетілгендей, ішектің толқуының қозғалысы математикалық физиканың негізгі есептері болып келеді. Дирихле есебі, тек ғана толқын теңдеуіне емес және де жалпы гиперболалық теңдеулерге де корректна емес екендігі дәлелденген.

Жұмыста көп өлшемді Геллерстедт теңдеуіне спектрлік Дирихле және Пуанкаре есептерінің бір мәнді шешімділік критериясы алынған.

Поступила 07.07.2015 г.

Publication Ethics and Publication Malpractice
in the journals of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan

For information on Ethics in publishing and Ethical guidelines for journal publication see http://www.elsevier.com/publishingethics and http://www.elsevier.com/journal-authors/ethics.

Submission of an article to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan implies that the described work has not been published previously (except in the form of an abstract or as part of a published lecture or academic thesis or as an electronic preprint, see http://www.elsevier.com/postingpolicy), that it is not under consideration for publication elsewhere, that its publication is approved by all authors and tacitly or explicitly by the responsible authorities where the work was carried out, and that, if accepted, it will not be published elsewhere in the same form, in English or in any other language, including electronically without the written consent of the copyright-holder. In particular, translations into English of papers already published in another language are not accepted.

No other forms of scientific misconduct are allowed, such as plagiarism, falsification, fraudulent data, incorrect interpretation of other works, incorrect citations, etc. The National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan follows the Code of Conduct of the Committee on Publication Ethics (COPE), and follows the COPE Flowcharts for Resolving Cases of Suspected Misconduct (http://publicationethics.org/files/u2/New_Code.pdf). To verify originality, your article may be checked by the Cross Check originality detection service http://www.elsevier.com/editors/plagdetect.

The authors are obliged to participate in peer review process and be ready to provide corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. All authors of a paper should have significantly contributed to the research.

The reviewers should provide objective judgments and should point out relevant published works which are not yet cited. Reviewed articles should be treated confidentially. The reviewers will be chosen in such a way that there is no conflict of interests with respect to the research, the authors and/or the research funders.

The editors have complete responsibility and authority to reject or accept a paper, and they will only accept a paper when reasonably certain. They will preserve anonymity of reviewers and promote publication of corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. The acceptance of a paper automatically implies the copyright transfer to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.

The Editorial Board of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan will monitor and safeguard publishing ethics.

Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайте:

www:nauka-nanrk.kz

http://www.physics-mathematics.kz

Редактор *М. С. Ахметова*
Верстка на компьютере *Д. Н. Калкабековой*

Подписано в печать 14.07.2015.
Формат 60x881/8. Бумага офсетная. Печать – ризограф.
17,25 п.л. Тираж 300. Заказ 4.

Национальная академия наук РК
050010, Алматы, ул. Шевченко, 28, т. 272-13-18, 272-13-19