

ISSN 1991-346X

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ  
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ

# Х А Б А Р Л А Р Ы

---

---

## ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК  
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES  
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА  
СЕРИЯСЫ**



**СЕРИЯ**

**ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ**



**PHYSICO-MATHEMATICAL  
SERIES**

**4 (302)**

**ШІЛДЕ – ТАМЫЗ 2015 ж.**

**ИЮЛЬ – АВГУСТ 2015 г.**

**JULY – AUGUST 2015**

1963 ЖЫЛДЫҢ ҚАҢТАР АЙЫНАН ШЫҒА БАСТАҒАН  
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1963 ГОДА  
PUBLISHED SINCE JANUARY 1963

ЖЫЛЫНА 6 РЕТ ШЫҒАДЫ  
ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД  
PUBLISHED 6 TIMES A YEAR

АЛМАТЫ, ҚР ҰҒА  
АЛМАТЫ, НАН РК  
ALMATY, NAS RK

Б а с р е д а к т о р

ҚР ҰҒА академигі,

**Мұтанов Г. М.**

Р е д а к ц и я а л қ а с ы:

физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Әшімов А.А.**; техн. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Байғұнчечков Ж.Ж.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Жұмаділдаев А.С.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Қалменов Т.Ш.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Мұқашев Б.Н.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Өтелбаев М.О.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Тәкібаев Н.Ж.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Харин С.Н.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Әбішев М.Е.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Жантаев Ж.Ш.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Қалимолдаев М.Н.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Косов В.Н.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Мұсабаев Т.А.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Ойнаров Р.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Рамазанов Т.С.** (бас редактордың орынбасары); физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Темірбеков Н.М.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Өмірбаев У.У.**

Р е д а к ц и я к ең е с і:

Украинаның ҰҒА академигі **И.Н. Вишневский** (Украина); Украинаның ҰҒА академигі **А.М. Ковалев** (Украина); Беларусь Республикасының ҰҒА академигі **А.А. Михалевич** (Беларусь); Әзірбайжан ҰҒА академигі **А. Пашаев** (Әзірбайжан); Молдова Республикасының ҰҒА академигі **И. Тигиняну** (Молдова); мед. ғ. докторы, проф. **Иозеф Банас** (Польша)

Главный редактор

академик НАН РК

**Г. М. Мутанов**

Редакционная коллегия:

доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **А.А. Ашимов**; доктор техн. наук, проф., академик НАН РК **Ж.Ж. Байгунчеков**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **А.С. Джумадильдаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **Т.Ш. Кальменов**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **Б.Н. Мукашев**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **М.О. Отелбаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **Н.Ж. Такибаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **С.Н. Харин**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **М.Е. Абишев**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Ж.Ш. Жантаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **М.Н. Калимолдаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **В.Н. Косов**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Т.А. Мусабаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Р. Ойнаров**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Т.С. Рамазанов** (заместитель главного редактора); доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Н.М. Темирбеков**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **У.У. Умирбаев**

Редакционный совет:

академик НАН Украины **И.Н. Вишневский** (Украина); академик НАН Украины **А.М. Ковалев** (Украина); академик НАН Республики Беларусь **А.А. Михалевич** (Беларусь); академик НАН Азербайджанской Республики **А. Пашаев** (Азербайджан); академик НАН Республики Молдова **И. Тигиняну** (Молдова); д. мед. н., проф. **Иозеф Банас** (Польша)

«Известия НАН РК. Серия физико-математическая». ISSN 1991-346X

Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы)

Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации и архивов Министерства культуры и информации Республики Казахстан №5543-Ж, выданное 01.06.2006 г.

Периодичность: 6 раз в год.

Тираж: 300 экземпляров.

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, ком. 219, 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,

[www.nauka-nanrk.kz](http://www.nauka-nanrk.kz) / [physics-mathematics.kz](http://physics-mathematics.kz)

---

© Национальная академия наук Республики Казахстан, 2015

Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75.

Editor in chief

**G. M. Mutanov**,  
academician of NAS RK

Editorial board:

**A.A. Ashimov**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **Zh.Zh. Baigunchekov**, dr. eng. sc., prof., academician of NAS RK; **A.S. Dzhumadildayev**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **T.S. Kalmenov**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **B.N. Mukhashev**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **M.O. Otelbayev**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **N.Zh. Takibayev**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **S.N. Kharin**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **M.Ye. Abishev**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **Zh.Sh. Zhantayev**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **M.N. Kalimoldayev**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **V.N. Kosov**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **T.A. Mussabayev**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **R. Oinarov**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **T.S. Ramazanov**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK (deputy editor); **N.M. Temirbekov**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **U.U. Umirbayev**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK

Editorial staff:

**I.N. Vishnievski**, NAS Ukraine academician (Ukraine); **A.M. Kovalev**, NAS Ukraine academician (Ukraine); **A.A. Mikhalevich**, NAS Belarus academician (Belarus); **A. Pashayev**, NAS Azerbaijan academician (Azerbaijan); **I. Tighineanu**, NAS Moldova academician (Moldova); **Joseph Banas**, prof. (Poland).

**News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physical-mathematical series.**  
**ISSN 1991-346X**

Owner: RPA "National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan" (Almaty)

The certificate of registration of a periodic printed publication in the Committee of information and archives of the Ministry of culture and information of the Republic of Kazakhstan N 5543-Ж, issued 01.06.2006

Periodicity: 6 times a year

Circulation: 300 copies

Editorial address: 28, Shevchenko str., of. 219, 220, Almaty, 050010, tel. 272-13-19, 272-13-18,

[www.nauka-nanrk.kz](http://www.nauka-nanrk.kz) / [physics-mathematics.kz](http://physics-mathematics.kz)

---

© National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, 2015

Address of printing house: ST "Aruna", 75, Muratbayev str, Almaty

**NEWS**

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES**

ISSN 1991-346X

Volume 4, Number 302 (2015), 124 – 129

**ABOUT ONE METHOD OF THE SOLUTION OF THE RETURN TASK  
OF CAUCHY FOR THE STORM LIOUVILLE EQUATION**

**S. T. Ahmetova, A. B. Imanbaeva, A. Sh. Shaldanbaev**

M. Auezov South-Kazakhstan State University, Shymkent, Kazakhstan.

E-mail: shaldanbaev51@mail.ru

**Keywords:** self-conjugacy, quite continuity, Cauchy's task, operator Shturma-Liuvillya.

**Abstract.** We will consider the operator equation in Hilbert space

$$Au = f, \tag{1.1}$$

where - quite continuous operator, and and space elements. If the operator one-to-one displays spaces on the area of value, there is a return operator displaying sets in spaces who is the unlimited operator. In this case the equation (1.1) has the only decision for any right part from which has an appearance

$$u = A^{-1}f, \quad (1.2)$$

but unfortunately, because of limitlessness of the return operator, this decision isn't steady, that is small deviations of the right part from true value can lead to big deviations from the required true decision. In practice, as a rule, the right part known it is only approximate therefore there is a problem of search of steady algorithm of the solution of the equation (1.1). For the first time such Tikhonov A.N. started considering tasks. [1], it appeared that many problems of geophysics, seismic exploration belong to this class of tasks. The bright representative of this class of tasks is the return task of Cauchy for the Storm Liouville equation. We will consider a task in space I Mow for the Storm Liouville equation

$$\begin{aligned} Ly = y''(x) = f(x), x \in (0,1) \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

the decision which has an appearance

$$y(x) = \int_0^x (x-t)f(t)dt. \quad (1.4)$$

The essence of the return task of Cauchy consists in finding of the right part according to the known decision, that is is reduced to the solution of the integrated equation of the first sort

$$\int_0^x (x-t)f(t)dt = y(x). \quad (1.5)$$

УДК 517.91

## ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

С. Т. Ахметова, А. Б. Иманбаева, А. Ш. Шалданбаев

Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, Шымкент, Казахстан

**Ключевые слова:** самосопряженность, вполне непрерывность, задача Коши, оператор Штурма-Лиувилля.

**Аннотация.** В настоящей работе решена одна обратная задача для оператора Штурма-Лиувилля.

### 1. Введение.

Рассмотрим в гильбертовом пространстве  $H$  операторное уравнение

$$Au = f, \quad (1.1)$$

где  $A$  – вполне непрерывный оператор,  $f$  и  $u$  элементы пространства  $H$ . Если оператор  $A$  взаимно однозначно отображает пространства  $H$  на свою область значения  $R(A) \subset H$ , то существует обратный оператор  $A^{-1}$ , отображающий множества  $R(A)$  в пространства  $H$ , который является неограниченным оператором. В этом случае уравнение (1.1) имеет единственное решение  $u$  для любой правой части  $f$  из  $R(A)$ , который имеет вид

$$u = A^{-1}f, \quad (1.2)$$

но к сожалению, из-за неограниченности обратного оператора  $A^{-1}$ , это решение не устойчиво, то есть малые отклонения правой части от истинного значения могут привести к большим отклонениям от искомого истинного решения. На практике, как правило, правая часть бывает известной лишь приближенно, поэтому возникает проблема поиска устойчивого алгоритма решения уравнения (1.1). Впервые задачи такого рода начал рассматривать Тихонов А.Н. [1], оказалось, что многие задачи геофизики, сейсморазведки относятся именно к этому классу задач. Ярким представителем этого класса задач является обратная задача Коши для уравнения Штурма-Лиувилля. Рассмотрим в пространстве  $L^2(0,1)$  задачу Коши для уравнения Штурма-Лиувилля

$$\begin{aligned} Ly = y''(x) = f(x), x \in (0,1) \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

решение, которого имеет вид

$$y(x) = \int_0^x (x-t)f(t)dt. \quad (1.4)$$

Суть обратной задачи Коши состоит в нахождении правой части  $f$  по известному решению  $y(x)$ , то есть сводится к решению интегрального уравнения первого рода

$$\int_0^x (x-t)f(t)dt = y(x). \quad (1.5)$$

**2. Методы исследования.** В этом разделе мы докажем две леммы, которые могут иметь и самостоятельное значение и они подсказаны нам теоремой Эрвина Шмидта, о разложении произвольного компактного оператора в ряд по собственным функциям «модуля» оператора [2].

**Лемма 2.1.** Если  $A$  вольтерровый оператор,  $S$ - унитарный оператор и имеют место равенства

$$SA = A^*S, S = S^*, N(A) = \{0\}, \quad (2.1)$$

то операторное уравнение

$$Au = f \quad (2.2)$$

имеет в пространстве  $H$  единственное решение вида

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f, S\varphi_n)}{\lambda_n} \varphi_n, \quad (2.3)$$

где  $\lambda_n$ - собственное значение оператора  $SA$ , а  $\varphi_n$ - собственные векторы этого оператора.

**Доказательство.** По условию леммы оператор  $A$  компактный, а в силу условий  $SA = A^*S$ ,  $S = S^*$  оператор  $SA$ - самосопряженный и компактный. По теореме Гильберта-Шмидта [3] для любого вектора  $u$  пространства  $H$  имеет место разложение

$$SAu = \sum_{n=1}^{\infty} (SAu, \varphi_n) \varphi_n + \varphi_0,$$

где  $\varphi_0 \in N(SA)$ . В нашем случае  $N(SA) = \{0\}$ , поэтому

$$SAu = \sum_{n=1}^{\infty} (SAu, \varphi_n) \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (u, \varphi_n) \varphi_n, \Rightarrow (SAu, \varphi_n) = \lambda_n (u, \varphi_n), (u, \varphi_n) = \frac{(SAu, \varphi_n)}{\lambda_n}.$$

Если  $(u, \varphi_n) = 0$ , то  $SAu = 0$ ,  $\Rightarrow u = 0$ , следовательно, система  $\{\varphi_n\}$  является полной ортогональной системой. Полагая ее ортонормированной, имеем

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} (u, \varphi_n) \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(SAu, \varphi_n)}{\lambda_n} \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(Sf, \varphi_n)}{\lambda_n} \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f, S\varphi_n)}{\lambda_n} \varphi_n.$$

**Лемма 2.2.** (а) Если  $A$  вольтерровый оператор,  $S$ - унитарный оператор, действующие в гильбертовом пространстве  $H$  и удовлетворяющие условию

$$SA = A^*S, S = S^*, N(A) = \{0\}, \quad (2.1)$$

то операторное уравнение

$$(SA - i\alpha)u_\alpha = Sf \quad (2.4)$$

для любого вещественного числа  $\alpha$ , отличного от нуля, и правой части  $f \in H$  имеет единственное решение вида

$$u_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f, S\varphi_n)}{\lambda_n + i\alpha} \varphi_n, \quad (2.5)$$

где  $SA\varphi_n = \lambda_n\varphi_n, n = 1, 2, \dots$

(б) для любого элемента  $f \in R(A)$  имеет место оценка

$$\|Au_\alpha - f\| \ll |\alpha| \cdot \|u\|, f = Au, \quad (2.6)$$

которая показывает скорость приближения элемента  $Au_\alpha$  к  $f$  при  $\alpha \rightarrow 0$ ;

(в) если  $f \in R(A)$  и  $\alpha \rightarrow 0$ , то величина  $\|u_\alpha - u\|$  стремится к нулю.

**Доказательство.** а) Оператор  $SA$  вполне непрерывен и самосопряжен, поэтому все его собственные значения вещественны. По альтернативе Фредгольма любое комплексное число является либо собственным значением вполне непрерывного оператора, либо принадлежит к резольвент-

ному множеству, стало быть, оператор  $SA - i\alpha I$  ограниченно обратим при любом вещественном значении  $\alpha \neq 0$ . Следовательно, уравнение

$$(SA - i\alpha I)u_\alpha = Sf$$

разрешимо при любом вещественном  $\alpha \neq 0$ , т.е. имеет место формула:  $u_\alpha = (SA - i\alpha I)^{-1}Sf$ .

Найдем Фурье представление этого решения.

$$\begin{aligned} u_\alpha &= \sum_{n=1}^{\infty} (u_\alpha, \varphi_n) \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} ((SA - i\alpha I)^{-1}Sf, \varphi_n) \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} (Sf, (SA + i\alpha)^{-1} \varphi_n) \varphi_n = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(Sf, \varphi_n) \varphi_n}{\lambda_n + i\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f, S\varphi_n) \varphi_n}{\lambda_n + i\alpha}. \end{aligned}$$

Оценим норму  $u_\alpha$  в пространстве  $H$ .

$$\|u_\alpha\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(Sf, \varphi_n)|^2}{\lambda_n^2 + \alpha^2} < \frac{1}{\alpha^2} \sum_{n=1}^{\infty} |(f, S\varphi_n)|^2 \ll \frac{\|f\|^2}{\alpha^2}, \quad \alpha \neq 0;$$

б) Из условия  $f \in R(A)$  следует, что существует такой элемент  $u$  пространства  $H$ , что  $f = Au$ . Оператор  $A$  ограничен и  $A\varphi_n = \lambda_n S\varphi_n$ , поэтому

$$\begin{aligned} Au_\alpha &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(Sf, \varphi_n)}{\lambda_n + i\alpha} A\varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f, S\varphi_n)}{\lambda_n + i\alpha} S\varphi_n; \\ \|Au_\alpha - f\|^2 &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f, S\varphi_n)}{\lambda_n + i\alpha} \lambda_n S\varphi_n - \sum_{n=1}^{\infty} (f, S\varphi_n) S\varphi_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\lambda_n}{\lambda_n + i\alpha} - 1 \right|^2 |(f, S\varphi_n)|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\alpha|^2}{\lambda_n^2 + \alpha^2} |(f, S\varphi_n)|^2 \ll \alpha^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(f, S\varphi_n)|^2}{\lambda_n^2} \ll \alpha^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(Au, S\varphi_n)|^2}{\lambda_n^2} \ll \alpha^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(SAu, \varphi_n)|^2}{\lambda_n^2} \\ &\ll \alpha^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(u, SA\varphi_n)|^2}{\lambda_n^2} \ll \alpha^2 \cdot \|u\|^2; \end{aligned}$$

в) Оценим норму  $\|u_\alpha - u\|$  в пространстве  $H$ .

$$\begin{aligned} \|u_\alpha - u\| &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(Sf, \varphi_n)}{\lambda_n + i\alpha} \varphi_n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f, S\varphi_n)}{\lambda_n} \varphi_n \right\|^2 = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\lambda_n + i\alpha} - \frac{1}{\lambda_n} \right) (f, S\varphi_n) \varphi_n \right\|^2 = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^2}{\lambda_n^2 (\lambda_n^2 + \alpha^2)} |(f, S\varphi_n)|^2 = \alpha^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(Au, S\varphi_n)|^2}{\lambda_n^2 (\lambda_n^2 + \alpha^2)} = \alpha^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(u, SA\varphi_n)|^2}{\lambda_n^2 (\lambda_n^2 + \alpha^2)} = \alpha^2 \cdot \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(u, \varphi_n)|^2}{\lambda_n^2 + \alpha^2} = \alpha^2 \sum_{n=1}^N \frac{|(u, \varphi_n)|^2}{\lambda_n^2 + \alpha^2} + \sum_{N+1}^{+\infty} \frac{|(u, \varphi_n)|^2 \alpha^2}{\lambda_n^2 + \alpha^2} \ll \alpha^2 \sum_{n=0}^N \frac{|(u, \varphi_n)|^2}{\lambda_n^2 + \alpha^2} + \sum_{N+1}^{\infty} |(u, \varphi_n)|^2. \end{aligned}$$

Из условия  $f \in R(A)$  следует сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} |(u, \varphi_n)|^2 < +\infty$ , поэтому для любого  $\varepsilon > 0$  существует такой номер  $N(\varepsilon)$ , что  $\sum_{N+1}^{\infty} |(u, \varphi_n)|^2 < \frac{\varepsilon^2}{2}$ . При фиксированном  $N(\varepsilon)$  найдем число  $\delta(\varepsilon) > 0$ , такое, что для всех  $0 < \alpha < \delta(\varepsilon)$  имеет место

$$\alpha^2 \sum_{n=1}^N \frac{|(u, \varphi_n)|^2}{\lambda_n^2 + \alpha^2} < \frac{\varepsilon^2}{2}$$

неравенство. Следовательно, для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta(\varepsilon) > 0$ , такое, что для всех  $0 < \alpha < \delta(\varepsilon)$  имеет место неравенство  $\|u_\alpha - u\| < \varepsilon$ , что и требовалось доказать.

Заметим, что если  $u$  является элементом функционального пространства, иначе говоря, функцией, то быстрота сходимости к нулю величины  $\sum_{N+1}^{\infty} |(u, \varphi_n)|^2$  зависит от гладкости функции  $u(x)$ .

### 3. Результаты исследований.



**Теорема 3.1.** (а) Если  $f(x) \in W_2^2(0,1)$ , то интегральное уравнение

$$Au(x) = \int_0^x (x-t)u(t)dt = f(x) \quad (3.1)$$

имеет единственное решение вида

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f, S\varphi_n)}{\lambda_n} \varphi_n, \quad (3.2)$$

где  $S\varphi_n(x) = \varphi_n(1-x)$ ,  $SA\varphi_n = \lambda_n\varphi_n$ ;

(б) для любого  $f(x) \in W_2^2(0,1)$  имеет место оценка

$$\|Au_\alpha - f\| \ll |\alpha| \cdot \|u\|, f = Au,$$

где  $u_\alpha(x)$  является решением уравнения

$$(SA - i\alpha)u_\alpha = Sf, \alpha - \text{вещественная величина};$$

(в) если  $f(x) \in W_2^2(0,1)$ , то  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|u_\alpha - u\| = 0$ .

**Доказательство.** Если  $Au = 0$ , то  $\int_0^x (x-t)u(t)dt = 0$ , тогда из теоремы Лебега [3] следует, что  $u(x) = 0$  почти всюду в  $(0,1)$ , следовательно, обратный оператор  $A^{-1}$  существует;

Ядро интегрального оператора (3.1) имеет вид  $A(x,t) = (x-t) \cdot \theta(x-t)$ , поэтому ограничен и принадлежит классу Гильберта-Шмидта. Следовательно, оператор  $A$  вполне непрерывен. Вольтерровость оператора  $A$  является следствием теоремы единственности решения задачи Коши для уравнения Штурма-Лиувилля. Проверка выполнения условий лемм 2.1, 2.2 не составляет труда.

**4. Выводы.** Результаты данной работы могут быть использованы в спектральной теории операторов [4-15].

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач.- М.: Наука, 1979, 288с.  
 [2] Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в спектральную теорию несамосопряженных операторов.- М.: Наука, 1965, 447с.  
 [3] Треногин В.А. Функциональный анализ.- М.: Наука, 1980, 494с.  
 [4] Шалданбаев А.Ш., Ахметова С.Т. О полноте собственных векторов задачи Коши. - Республиканский научный журнал «Наука и образования ЮК» № 27, 2002. с. 58-62.  
 [5] Шалданбаев А.Ш. Об операторах симметрии. - Республиканская научная конференция “Дифференциальные уравнения и теория колебаний” – Алматы, 10-12 октября 2002г, с. 81-84.  
 [6] Шалданбаев А.Ш., Аширбекова К.Ш. О кратности спектра оператора Штурма-Лиувилля. Республиканская научная конференция “Дифференциальные уравнения и теория колебаний”. – г. Алматы, 10-12 октября 2002г., с. 84-86.  
 [7] Шалданбаев А.Ш., Ахметова С.Т. О полноте собственных векторов периодической и антипериодической задачи. - Республиканский научный журнал «Наука и образование ЮК» №34, 2003г, - с. 25-30.  
 [8] Шалданбаев А.Ш., Аширбекова Ж.Ш. Об одном необходимом признаке симметрии задачи Штурма-Лиувилля. - Республиканский научный журнал «Наука и образование ЮК» №34, 2003г, - с. 133-136.  
 [9] Шалданбаев А.Ш. Необходимое и достаточное условие существования сильного решения для параболического уравнения с обратным течением времени. - КазНУ им. АльФараби «Вестник», г. Алматы, №2 (53), 2007. – с.58-72.  
 [10] Шалданбаев А.Ш. О формулах следов одного класса операторов Штурма-Лиувилля. - Башкирский Государственный Университет, «Вестник», том 14, №2, 2009. – с.351-355.  
 [11] Шалданбаев А.Ш. О сингулярно возмущенной задаче Коши в пространстве  $L^2(0,1)$ . // Математический журнал. г.Алматы, 2008, т.8, №4(30), с. 88-97.  
 [12] Шалданбаев А.Ш. Решение сингулярно возмущенной задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами методом отклоняющегося аргумента. // Вестник КазНУ, серия мат.-мех., инф., 2010г, №1, с. 85-87.  
 [13] Кальменов Т.Ш., Шалданбаев А.Ш. Об одном рекуррентном методе решения сингулярно возмущенной задачи Коши для уравнения второго порядка. // Математические труды. г.Новосибирск. 2010, т.13, №2, с. 128-138.  
 [14] Kal'menov T.Sh., Shaldanbaev A.Sh. On a criterion of solvability of the inverse problem of heat conduction. Journal of Inverse and ill- posed problems.2010, v18, №4, p.352-369.  
 [15] Шалданбаев А.Ш. Спектральные разложения корректных-некорректных начально краевых задач для некоторых классов дифференциальных уравнений.- 193с, LAP LAMBERT Academic Publishing. <http://dnb.d-nb.de>. Email:info@lap-publishing.com,Saarbrucken 2011,Germanu.

#### REFERENCES

- [1] Tihonov A.N., Arsenin V.Ja. Metody reshenija nekorrektnyh zadach.- M.: Nauka, 1979, 288s.  
 [2] Gohberg I.C., Krejn M.G. Vvedenie v spektral'nuju teoriju nesamosoprjazhennyh operatorov.- M.: Nauka, 1965, 447s.  
 [3] Trenogin V.A. Funkcional'nyj analiz.- M.: Nauka, 1980, 494s.  
 [4] Shaldanbaev A.Sh., Ahmetova S.T. O polnote sobstvennyh vektorov zadachi Koshi. - Respublikanskij nauchnyj zhurnal «Nauka i obrazovanija JuK» № 27, 2002. s. 58-62.

[5] Shaldanbaev A.Sh. Ob operatorah simmetrii. - Respublikanskaja nauchnaja konferencija "Differencial'nye uravnenija i teorija kolebanij" – Almaty, 10-12 oktjabrja 2002g, s. 81-84.

[6] Shaldanbaev A.Sh., Ashirbekova K.Sh. O kratnosti spektra operatora Shturma-Liuvillja. Respublikanskaja nauchnaja konferencija "Differencial'nye uravnenija i teorija kolebanij". – g. Almaty, 10-12 oktjabrja 2002g., s. 84-86.

[7] Shaldanbaev A.Sh., Ahmetova S.T. O polnote sobstvennyh vektorov periodicheskoj i antiperiodicheskoj zadachi. - Respublikanskij nauchnyj zhurnal «Nauka i obrazovanie JuK» №34, 2003g, - s. 25-30.

[8] Shaldanbaev A.Sh., Ashirbekova Zh.Sh. Ob odnom neobhodimom priznake simmetrii zadachi Shturma-Liuvillja. - Respublikanskij nauchnyj zhurnal «Nauka i obrazovanie JuK» №34, 2003g, - s. 133-136.

[9] Shaldanbaev A.Sh. Neobhodimoe i dostatochnoe uslovie sushhestvovanija sil'nogo reshenija dlja parabolicheskogo uravnenija s obratnym techeniem vremeni. - KazNU im. Al'Farabi «Vestnik», g. Almaty, №2 (53), 2007. – s.58-72.

[10] Shaldanbaev A.Sh. O formulah sledov odnogo klassa operatorov Shturma-Liuvillja. - Bashkirskij Gosudarstvennyj Universitet, «Vestnik», tom 14, №2, 2009. – s.351-355.

[11] Shaldanbaev A.Sh. O singuljarno vozmushhennoj zadache Koshi v prostranstve. // Matematicheskij zhurnal. g.Almaty, 2008, t.8, №4(30), s. 88-97.

[12] Shaldanbaev A.Sh. Reshenie singuljarno vozmushhennoj zadachi Koshi dlja sistemy obyknovennyh differencial'nyh uravnenij s peremennymi koefficientami metodom otklonjajushhegosja argumenta. // Vestnik KazNU, serija mat.-meh., inf., 2010g, №1, s. 85-87.

[13] Kal'menov T.Sh., Shaldanbaev A.Sh. Ob odnom rekurrentnom metode reshenija singuljarno vozmushhennoj zadachi Koshi dlja uravnenija vtorogo porjadka. // Matematicheskie trudy. g.Novosibirsk. 2010, t.13, №2, s. 128-138.

[14] Kal'menov T.Sh., Shaldanbaev A.Sh. On a criterion of solvability of the inverse problem of heat conduction. Journal of Inverse and ill- posed problems. 2010, v18, №4, p.352-369.

[15] Shaldanbaev A.Sh. Spektral'nye razlozhenija korrektnyh-nekorrektnyh nachal'no kraevyh zadach dlja nekotoryh klassov differencial'nyh uravnenij.- 193c, LAP LAMBERT Academic Publishing. <http://dnb.d-nb.de>. Email:info@lap-publishing.com,Saarbrucken 2011,Germanu.

### **ШТУРМ-ЛИУВИЛ ТЕҢДЕУІНІҢ КОШИ ЕСЕБІНЕ КЕРІ ЕСЕПТІ ШЕШУДІҢ БІР ТӘСІЛІ ТУРАЛЫ**

**С. Т. Ахметова, А. Б. Иманбаева, А. Ш. Шалданбаев**

М. О. Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент, Қазақстан

**Тірек сөздер:** жалкылық, әсіре үзіксіздік, Кошидің есебі, Штурм-Лиувилл операторы.

**Аннотация.** Еңбекте Штурм-Лиувилл есебіне арналған Коши есебіне кері есеп шешілді.

*Поступила 07.07.2015 г.*

**Publication Ethics and Publication Malpractice  
in the journals of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan**

For information on Ethics in publishing and Ethical guidelines for journal publication see <http://www.elsevier.com/publishingethics> and <http://www.elsevier.com/journal-authors/ethics>.

Submission of an article to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan implies that the described work has not been published previously (except in the form of an abstract or as part of a published lecture or academic thesis or as an electronic preprint, see <http://www.elsevier.com/postingpolicy>), that it is not under consideration for publication elsewhere, that its publication is approved by all authors and tacitly or explicitly by the responsible authorities where the work was carried out, and that, if accepted, it will not be published elsewhere in the same form, in English or in any other language, including electronically without the written consent of the copyright-holder. In particular, translations into English of papers already published in another language are not accepted.

No other forms of scientific misconduct are allowed, such as plagiarism, falsification, fraudulent data, incorrect interpretation of other works, incorrect citations, etc. The National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan follows the Code of Conduct of the Committee on Publication Ethics (COPE), and follows the COPE Flowcharts for Resolving Cases of Suspected Misconduct ([http://publicationethics.org/files/u2/New\\_Code.pdf](http://publicationethics.org/files/u2/New_Code.pdf)). To verify originality, your article may be checked by the Cross Check originality detection service <http://www.elsevier.com/editors/plagdetect>.

The authors are obliged to participate in peer review process and be ready to provide corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. All authors of a paper should have significantly contributed to the research.

The reviewers should provide objective judgments and should point out relevant published works which are not yet cited. Reviewed articles should be treated confidentially. The reviewers will be chosen in such a way that there is no conflict of interests with respect to the research, the authors and/or the research funders.

The editors have complete responsibility and authority to reject or accept a paper, and they will only accept a paper when reasonably certain. They will preserve anonymity of reviewers and promote publication of corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. The acceptance of a paper automatically implies the copyright transfer to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.

The Editorial Board of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan will monitor and safeguard publishing ethics.

Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайте:

[www.nauka-nanrk.kz](http://www.nauka-nanrk.kz)

<http://www.physics-mathematics.kz>

Редактор *М. С. Ахметова*

Верстка на компьютере *Д. Н. Калкабековой*

Подписано в печать 14.07.2015.

Формат 60x881/8. Бумага офсетная. Печать – ризограф.

17,25 п.л. Тираж 300. Заказ 4.