ISSN 1991-346X

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ

Х А Б А Р Л А Р Ы

ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

N E W S

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА СЕРИЯСЫ

♦

СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

♦

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

4 (302)

ШІЛДЕ – ТАМЫЗ 2015 ж.
ИЮЛЬ – АВГУСТ 2015 г.
JULY – AUGUST 2015

1963 ЖЫЛДЫҢ ҚАҢТАР АЙЫНАН ШЫҒА БАСТАҒАН
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1963 ГОДА
PUBLISHED SINCE JANUARY 1963

ЖЫЛЫНА 6 РЕТ ШЫҒАДЫ
ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД
PUBLISHED 6 TIMES A YEAR

АЛМАТЫ, ҚР ҰҒА
АЛМАТЫ, НАН РК
ALMATY, NAS RK

«Известия НАН РК. Серия физико-математическая». ISSN 1991-346X
Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы)
Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации и архивов Министерства культуры и информации Республики Казахстан **№5543-Ж**, выданное 01.06.2006 г.

Периодичность: 6 раз в год.
Тираж: 300 экземпляров.

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, ком. 219, 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,
www:nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75.

News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physical-mathematical series.
ISSN 1991-346X
Owner: RPA "National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan" (Almaty)
The certificate of registration of a periodic printed publication in the Committee of information and archives of the Ministry of culture and information of the Republic of Kazakhstan N 5543-Ж, issued 01.06.2006

Periodicity: 6 times a year
Circulation: 300 copies

Editorial address: 28, Shevchenko str., of. 219, 220, Almaty, 050010, tel. 272-13-19, 272-13-18,
www:nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

Address of printing house: ST "Aruna", 75, Muratbayev str, Almaty

N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 4, Number 302 (2015), 129 – 138

ON THE STOCHASTIC STABILITY ANALYTICALLY GIVEN INTEGRAL MANIFOLD

M. I. Tleubergenov[1], G. K. Vassilina[2]

[1]Institute of Mathematics and Mathematical Modelling of MES RK, Almaty, Kazakhstan,
[2]Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan.
E-mail: v_gulmira@mail.ru

Keywords: differential Ito equations, stability, probability, integral manifold.

Abstract. Proved in the A.M. Lyapunov's, N.G. Chetaev's, I.G. Malkin's et al. works, the classical theorems of Lyapunov functions method and their various modifications of the stability of the unperturbed motion in a class of ordinary differential equations are summarized in Matrosov's, Zubov's, Malyshev's works to the case of invariant sets using Lyapunov functions of the $V(\rho,t)$ form where $\rho = \rho(x,M)$ - the distance from the image point *x* to the set *M*.

Considering the complexity of constructing of the function $V(\rho, t)$, as a function of the distance ρ, in the Galiullin's, Mukhametzyanov's, Muharlyamov's works an analytical description of the set are used in the problem of construction of the equations of stable program motion of the ordinary differential equations and essentially the problem of studying of stability of the set is reduced to the study of stability of the trivial solution of the system. Analogues of the theorems of the Lyapunov second method for the analytically given invariant sets in a class of ordinary differential equations are proved in the works of these authors.

In this work using Lyapunov function method sufficient conditions of stability and asymptotic stability in probability of the integral manifold of Itô differential equations in the presence of random perturbations in a class of processes with independent increments are obtained.

УДК 517.925, 519.216

О СТОХАСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ АНАЛИТИЧЕСКИ ЗАДАННОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО МНОГООБРАЗИЯ

М. И. Тлеубергенов[1], Г. К. Василина[2]

[1]Институт математики и математического моделирования МОН РК, Алматы, Казахстан,
[2] Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан

Ключевые слова: дифференциальные уравнения Ито, устойчивость, вероятность, интегральное многообразие.

Аннотация. Классические теоремы метода функций Ляпунова и их различные модификации об устойчивости невозмущенного движения в классе обыкновенных дифференциальных уравнений, доказанные в работах Ляпунова А.М., Четаева Н.Г., Малкина И.Г. и др., обобщаются в работах Матросова В.М., Зубова В.И., Малышева И.В. и др. на случай инвариантных множеств с помощью функций Ляпунова вида $V(\rho, t)$, где $\rho = \rho(x, M)$ -- расстояние от изображающей точки *x* до множества *M*.

Учитывая сложность построения функции $V(\rho, t)$, как функции от расстояния ρ, в задаче построения уравнений устойчивого программного движения обыкновенных дифференциальных уравнений в работах Галиуллина А.С., Мухаметзянова И.А., Мухарлямова Р.Г. и др. используется аналитическое описание множества и, по-существу, задача исследования устойчивости множества сводится к исследованию устойчивости тривиального решения некоторой системы. В работах указанных авторов для аналитически заданных инвариантных множеств в классе обыкновенных дифференциальных уравнений доказываются аналоги теорем второго метода Ляпунова.

В настоящей работе методом функций Ляпунова получены достаточные условия устойчивости и асимптотической устойчивости по вероятности интегрального многообразия дифференциальных уравнений Ито при наличии случайных возмущений из класса процессов с независимыми приращениями.

Введение. Основные теоремы метода функций Ляпунова и их различные модификации об устойчивости невозмущенного движения в классе обыкновенных дифференциальных уравнений ([1-3] и др.) обобщены в [4-7] и др. на случай инвариантных множеств с помощью функций Ляпунова вида $V(\rho, t)$, где $\rho = \rho(x, M)$ - расстояние от изображающей точки *x* до множества *M*.

Учитывая сложность построения функции $V(\rho, t)$, как функции от расстояния ρ, в задаче построения уравнений устойчивого программного движения обыкновенных дифференциальных уравнений используется аналитическое описание множества [8, 9] и, по-существу, задача исследования устойчивости множества сводится к исследованию устойчивости тривиального решения некоторой системы. В работах [8-11] для аналитически заданных инвариантных множеств в классе обыкновенных дифференциальных уравнений доказываются аналоги теорем второго метода Ляпунова. При этом для аналитически заданных инвариантных множеств в [12, 13] доказываются теоремы об устойчивости по первому приближению, устойчивости при постоянно действующих возмущениях.

Впервые задача о стохастической устойчивости невозмущенного движения методом функций Ляпунова исследовалась в [14, 15]. В классе обыкновенных дифференциальных уравнений при случайных возмущениях из класса винеровских процессов (как частный случай процессов с независимыми приращениями) методом функций Ляпунова в [16] доказаны теоремы о стохастической устойчивости невозмущенного движения. В этом же классе в [16-19] доказаны теоремы о стохастической устойчивости инвариантных множеств с помощью функций Ляпунова вида $V(\rho,t)$.

Достаточные условия устойчивости аналитически заданного интегрального многообразия [10-13] обобщаются в [20-23] на класс стохастических дифференциальных уравнений при наличии случайных возмущений из класса винеровских процессов.

Задача о стохастической устойчивости невозмущенного движения при случайных возмущениях из класса процессов с независимыми приращениями рассматривалась в [24].

Настоящая работа посвящена исследованию стохастической устойчивости аналитически заданного интегрального многообразия при наличии случайных возмущений из класса процессов с независимыми приращениями.

1. Постановка задачи о стохастической устойчивости аналитически заданного интегрального многообразия. Пусть задано стохастическое дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = X(x(t),t)dt + \sigma(x(t),t)dw(t) + \int_{R^n} f(x(t),t,u)\tilde{\nu}(dt,du), \tag{1}$$

где $X(x,t), \sigma(x,t), f(x,t,u)$ – не случайны, X, f – векторные функции со значениями в R^n, $t \geq 0$, $x \in R^n; u \in R^n$, $\sigma(x,t)$ – матричная функция размера $n \times m$, $w(t)$ – m-мерный винеровский процесс с независимыми компонентами, $\tilde{\nu}(t,A) = \nu(t,A) - t\Pi(A)$, $\nu(t,A)$ - пуассоновская мера на R^d, $E\nu(t,A) = t\Pi(\text{A})$, процесс $w(t)$ и мера $\nu(t,A)$ независимы между собой, $\Pi(\text{A})$ - мера на σ - алгебре борелевских множеств R^n.

Предположим, что

1) существует постоянная $L > 0$ такая, что

$$\|X(x,t)\|^2 + \|\sigma(x,t)\|^2 + \int_{R^n} \|f(x,t,u)\|^2 \Pi(\mathrm{du}) \leq \mathrm{L}(1 + \|\mathrm{x}\|^2);$$

2) функции $X(x,t), \sigma(x,t), f(x,t,u)$ - непрерывны по совокупности аргументов;

3) выполнено локальное условие Липшица по , т.е. для любого $R > 0$ найдется постоянная $C_R > 0$ такая, что при $\|x\| \leq R, \|y\| \leq R$

$$\|X(x,t) - X(y,t)\|^2 + \|\sigma(x,t) - \sigma(y,t\|^2 + \int_{R^n} \|f(x,t,u) - f(y,t,u\|^2 \Pi(\mathrm{du}) \leq C_R \|\mathrm{x - y}\|^2.$$

Согласно [25, стр. 276], эти условия обеспечивают существование и единственность с точностью до стохастической эквивалентности решения $x^{x_0,t_0}(t)$ (1) с начальным условием $x(t_0) = x_0$, являющегося непрерывным справа с вероятностью 1 строго марковским случайным процессом.

Рассмотрим в пространстве R^{n+1} поверхность $\Lambda(t)$ заданную системой уравнений:

$$\Lambda(t): \lambda(x,t) = 0, \tag{2}$$

где $\lambda = \lambda(x,t) \in C^{21}_{xt}$ - r-мерная вектор-функция, $r \leq n$.

В дальнейшем приведем условия того, что эта поверхность инвариантная для (1) (интегральное многообразие), т.е. если $(x_0, t_0) \in \Lambda(t_0)$ с вероятностью 1, то

$$P\{(x(t), t) \in \Lambda(t), t \geq t_0\} = 1,$$

а также исследуем ее на стохастическую устойчивость.

Определение 1. *Назовем* $a(r)$ *- функцией класса* K *(* $a \in K$ *), если* $a(r)$ *- непрерывная, строго возрастающая функция и* $a(0)=0$.

Условия инвариантности и стохастической устойчивости приведем в терминах функций Ляпунова вида $V(\lambda;x,t) \in C^{221}_{\lambda xt} : R^r \times R^n \times R^+ \to R^+$, и таких, что $V(0;x,t)=0$.

Обозначим $V_1(x,t) = V(\lambda(x,t),x,t)$. Очевидно, что $V_1(x,t) \in C^{21}_{x,t}$. Будем рассматривать такие функции Ляпунова, чтобы

$$\int\limits_{R^n} \left\| [V_1(x) + f(x,t,u)) - V_1(x,t) - (\frac{\partial V_1}{\partial x_i})^T f_i(x,t,u)] \right\| \Pi(\mathrm{du}) < \infty. \tag{3}$$

Введем следующий производящий оператор

$$\widetilde{L}V(\lambda(x,t),x,t) = \widetilde{L}V_1(x,t) =$$

$$= \frac{\partial V_1}{\partial t} + \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_i}\right)^T X_i + \frac{1}{2} tr[\frac{\partial^2 V_1}{\partial x_i \partial x_j} \sigma_{ik} \sigma^T_{jk}] +$$

$$+ \int\limits_{R^n} [V_1(x + f(x,t,u)) - V_1(x,t) - (\frac{\partial V_1}{\partial x_i})^T f_i(x,t,u)] \Pi(\mathrm{du}).$$

Определение 2. [16] *Интегральное многообразие* $\Lambda(t)$, *определяемое формулой (2), уравнения (1) называется* ρ *-устойчивым по вероятности, если*

$$\lim_{\rho(x_0,\Lambda(t_0))\to 0} P_{x_0} \left\{ \sup_{t>0} \rho(x^{x_0,t_0}(t), \Lambda(t)) > \varepsilon \right\} = 0. \tag{4}$$

Определение 3. *Интегральное многообразие* $\Lambda(t)$, *определяемое формулой (2), уравнения (1) называется* λ *-устойчивым по вероятности, если*

$$\lim_{\|\lambda(x_0,t_0)\|\to 0} P_{x_0} \left\{ \sup_{t>0} \| \lambda(x^{x_0,t_0}(t),t) \| > \varepsilon \right\} = 0. \tag{5}$$

Определение 4. [16] *Интегральное многообразие* $\Lambda(t)$, *определяемое формулой (2), уравнения (1) называется асимптотически* ρ *-устойчивым по вероятности, если оно* ρ *-устойчиво по вероятности и, кроме того,*

$$\lim_{\rho(x_0,\Lambda(t_0))\to 0} P_{x_0} \left\{ \lim_{t\to\infty} \sup_{t>0} \rho(x^{x_0,t_0}(t), \Lambda(t)) = 0 \right\} = 1. \tag{6}$$

Определение 5. *Интегральное многообразие* $\Lambda(t)$, *определяемое формулой (2), уравнения (1) называется асимптотически* λ *-устойчивым по вероятности, если оно* λ *-устойчиво по вероятности и, кроме того,*

$$\lim_{\|\lambda(x_0,t_0)\|\to 0} P_{x_0} \left\{ \lim_{t\to\infty} \sup_{t>0} \| \lambda(x^{x_0,t_0}(t),t) \| = 0 \right\} = 1. \tag{7}$$

Теорема 1. *Если для уравнения (1) и множества (2) существует функция Ляпунова* $V(\lambda;x,t) \in C^{221}_{\lambda xt}$ *со свойствами*

$$V(0,x,t) \equiv 0, \tag{8}$$

$$V(\lambda,x,t)\geq a(\|\lambda\|),\ a\in K; \tag{9}$$

$$\widetilde{L}V_1(x,t)\leq 0, \tag{10}$$

и для $V_1 = V(\lambda(x,t),x,t)$ *выполнено условие (3) ;*
а также существуют положительные постоянные C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, *что*

$$V_1(x,t)\leq C_1 + C_2\|x\|^2, \qquad \left\|\frac{\partial V_1}{\partial x}\right\| \leq C_3 + C_4\|x\|, \qquad \left\|\frac{\partial^2 V_1}{\partial x_i \partial x_j}\right\| \leq C_5;$$

то множество (2) есть интегральное многообразие для (1).

Если к тому же функция $\lambda(x,t)$ *удовлетворяет условию:*

$$\|\lambda(x,t)\| \geq \alpha(\rho(x,\Lambda(t)), \quad \alpha\in K, \tag{11}$$

то множество (2) ρ *-устойчиво по вероятности.*

Замечание. В дальнейшем для краткости будем обозначать $\alpha(\rho(x,\Lambda(t)) = \alpha(\rho)$.

Доказательство. Пусть $x^{x_0,t_0}(t) = x(t)$ произвольное решение уравнения (1), что $(x(t_0), t_0) \in \Lambda(t_0)$ с вероятностью 1. Применяя к процессу $V_1(x(t),t)$ обобщенную формулу Ито [25, теорема 2, стр. 274], имеем

$$E_{x_0,t_0}V_1(x(t),t) - V_1(x_0,t_0) = \int_{t_0}^{t} E\widetilde{L}_1 V_1(x(s),s))ds.$$

Откуда, в силу условий (8) и (10) имеем

$$E_{x_0,t_0}V_1(x(t),t)\leq 0 \tag{12}$$

для $\forall\, t\geq t_0$. Получаем, что (12) имеет вид

$$E_{x_0,t_0}V(\lambda(x(t),t),x(t),t)\leq 0.$$

Учитывая при этом условие (3) имеем, что $V(\lambda(x(t),t),x(t),t) = 0$ для каждого t с вероятностью 1. Поэтому $\lambda(x(t),t) = 0$ для каждого $t\geq t_0$ с вероятностью 1.

Отсюда получаем, что

$$P\left\{\sup_{\substack{t_i\geq t_0\\ t_i\in Q^+}} \|\lambda(x(t),t)\| = 0\right\} = 1,$$

где Q^+ - множество неотрицательных рациональных чисел. Но в силу непрерывности справа траекторий $x(t)$ имеем

$$P\left\{\sup_{\substack{t_i\geq t_0\\ t_i\in Q^+}} \|\lambda(x(t),t)\| = 0\right\} = P\left\{\sup_{t_i\geq t_0} \|\lambda(x(t),t)\| = 0\right\} = 1.$$

Последнее означает инвариантность множества $\Lambda(t)$ для системы (1).

Докажем теперь $\rho -$ устойчивость по вероятности множества $\Lambda(t)$. Для этого возьмем произвольное достаточно малое число $\varepsilon > 0$, произвольный момент t_0 и начальную точку x_0. Рассмотрим решение $x^{x_0,t_0}(t)$ уравнения (1). Пусть $\tau_\varepsilon = \inf\{t : \| \lambda(x(t) \| > \varepsilon\}$, а $\tau_\varepsilon(t) = \min(\tau_\varepsilon, t)$. Тогда, используя формулу Дынкина [25, стр. 274], получим

$$E_{x_0,t_0} V(\lambda(x(\tau_\varepsilon(t)), \tau_\varepsilon(t)); x(\tau_\varepsilon(t)), \tau_\varepsilon(t)) =$$
$$= V(\lambda(x_0, t_0), x_0, t_0) + E_{x_0,t_0} \int\limits_{t_0}^{\tau_\varepsilon(t)} \widetilde{L} V(\lambda(x(u), u); x(u), u) du, \tag{13}$$

откуда в силу (10) вытекает неравенство

$$E_{x_0,t_0} V(\lambda(x(\tau_\varepsilon(t)), \tau_\varepsilon(t)); x(\tau_\varepsilon(t)), \tau_\varepsilon(t)) \le V(\lambda(x_0, t_0); x_0, t_0),$$

которое с учетом (9) можно переписать в виде:

$$\int\limits_{\tau_\varepsilon < t} a(\| \lambda(x(\tau_\varepsilon), \tau_\varepsilon) \|) P_{x_0,t_0}(d\omega) + \int\limits_{\tau_\varepsilon \ge t} a(\| \lambda(x(t), t) \|) P_{x_0,t_0}(d\omega) \le$$
$$\le V(\lambda(x_0, t_0); x_0, t_0).$$

Следовательно,

$$a(\varepsilon) P_{x_0,t_0}\{\tau_\varepsilon < t\} \le V(\lambda(x_0, t_0); x_0, t_0).$$

В силу непрерывности по λ функции $V(\lambda; x_0, t_0)$ и $V(0; x, t) \equiv 0$ из последнего неравенства вытекает соотношение

$$\lim_{\|\lambda\| \to 0} P_{x_0,t_0}\{\tau_\varepsilon < t\} = 0,$$

которое влечет за собой λ-устойчивость $\Lambda(t)$ в соответствии с определением 3. И, учитывая оценку (11), получаем ρ -устойчивость интегрального многообразия $\Lambda(t)$ уравнения (1).

Теорема 2. *Если для процесса* $x(t)$, *описываемого уравнением (1), существует функция Ляпунова* $V(\lambda; x, t) \in C^{221}_{\lambda xt}$, $V(0; x, t) \equiv 0$ *со свойствами*

$$V(\lambda; x, t) \ge a(\| \lambda \|), a \in K; \tag{9}$$
$$V(\lambda; x, t) \le b(\| \lambda \|), b \in K; \tag{14}$$
$$\widetilde{L} V \le -c(\| \lambda \|), c \in K; \tag{15}$$

и, кроме того, вектор-функция $\lambda = \lambda(x, t)$ удовлетворяет условию

$$\| \lambda(x, t) \| \ge \alpha(\rho), \quad \alpha \in K, \tag{11}$$

то интегральное многообразие $\Lambda(t) : \lambda(x, t) = 0$ уравнения (1) асимптотически ρ -устойчиво по вероятности.

Доказательство. По теореме 1 условия (9) и (15) обеспечивают λ-устойчивость $\Lambda(t)$ по вероятности, а (11) влечет за собой ρ -устойчивость по вероятности интегрального многообразия $\Lambda(t)$.

Докажем справедливость соотношения (7) - асимптотической λ-устойчивости по вероятности $\Lambda(t)$, и из оценки (11) тогда будет следовать асимптотическая ρ -устойчивость интегрального многообразия $\Lambda(t)$.

Пусть аналогично теореме 1 $\tau_\varepsilon = \inf\{t : \|\lambda(x(t),t)\| > \varepsilon\}$, $\tau_\varepsilon(t) = \min(\tau_\varepsilon, t)$. Обозначим через $\mathcal{R}$ множество выборочных траекторий процесса $x^{x_0,t_0}(t)$ таких, что $\tau_\varepsilon(t) = t$, $t \geq 0$, то есть те траектории, которые до момента t не вышли из множества $\|\lambda(x(t),t)\| < \varepsilon$. Тогда по теореме 1 следует

$$\lim_{\|\lambda(x_0,t_0)\|\to 0} P_{x_0,t_0}\{R\} = 1.$$

Из (14) и (15) вытекает неравенство

$$E_{x_0,t_0} V(\lambda(x(\tau_\varepsilon(t)),\tau_\varepsilon(t)); x(\tau_\varepsilon(t)),\tau_\varepsilon(t)) \leq V(\lambda(x_0,t_0); x_0,t_0),$$

т.е. случайный процесс $V(\lambda(x(\tau_\varepsilon(t)),\tau_\varepsilon(t)); x(\tau_\varepsilon(t)),\tau_\varepsilon(t))$ является неотрицательным супермантингалом и по теореме Дуба [16] с вероятностью 1 для траекторий из множества $\mathcal{R}$ существует конечный предел

$$\lim_{t\to\infty} V(\lambda(x(\tau_\varepsilon(t)),\tau_\varepsilon(t)); x(\tau_\varepsilon(t)),\tau_\varepsilon(t)) = \lim_{t\to\infty} V(\lambda(x(t),t); x(t),t) = æ.$$

Покажем, что с вероятностью 1 $\varkappa = 0$. Доказательство проведем от противного, т.е. предположим, что найдется хотя бы одна пара $\overset{*}{x}_0, \overset{*}{t}_0 \in U_\varepsilon$, где $U_\varepsilon = \{x : \|\lambda(x,t)\| < \varepsilon\}$, такая, что для выборочных траекторий из множества $\mathcal{R}$ с вероятностью q выполняется соотношение

$$\lim_{t\to\infty} V(\lambda(x(t),t); x(t),t) = V_* > 0.$$

Тогда из свойства (14) бесконечно малого высшего предела функции V вытекает, что с вероятностью q

$$\lim_{t\to\infty} \|\lambda(x(t),t)\| \geq b^{-1}(V_*) > \varepsilon_1 > 0.$$

Для дальнейших рассуждений нам необходимо доказать свойство возвратности выборочных траекторий процесса $x^{x_0,t_0}(t)$, принадлежащих множеству R по отношению к области $\{\|\lambda(x(t),t)\| < \nu\}$ для каждого ν, $0 < \nu < \varepsilon$. Действительно, для таких ν и всех $\{x : \nu \leq \|\lambda(x(t),t)\| \leq \varepsilon\}$ из строгой монотонности $c(r)$ выполняется оценка $LV \leq -c(\nu)$.

Пусть τ^ν - момент первого выхода процесса $x^{x_0,t_0}(t)$ из области $\nu \leq \|\lambda\| \leq \varepsilon$. Используя (13) имеем

$$E_{x_0,t_0} \tau^\nu(t) - t_0 \leq c^{-1}(\nu) V(\lambda(x_0,t_0); x_0,t_0),$$

отсюда на основании неравенства Чебышева получим

$$P_{x_0,t_0}\{\tau^\nu \geq t\} \leq \frac{c^{-1}(\nu) V(\lambda(x_0,t_0); x_0,t_0)}{t}.$$

Переходя к пределу при $t \to \infty$, будем иметь

$$P_{x_0,t_0}\{\tau^\nu < \infty\} = 1, \tag{16}$$

что доказывает возвратность траекторий процесса $x^{x_0,t_0}(t)$, принадлежащих множеству $\mathcal{R}$ по отношению к $\{\|\lambda(x,t)\| < \nu\}$.

Из (16) и строгой марковости процесса $x(t)$ получаем для любого $\nu > 0$

$$q = P_{x_0^*,t_0^*}\{\lim_{t\to\infty} \| \lambda(x(t),t) \| > \varepsilon_1\} =$$

$$= \int\limits_{\{x:\|\lambda(x,t)\|=\nu\}} \int\limits_0^\infty P_{x_0,t_0}\{\lim_{t\to\infty} \| \lambda(x(t),t) \| > \varepsilon_1\} P_{x_0^*,t_0^*}\{\tau^\nu \in dt, x(\tau^\nu) \in dx\} \le$$

$$\le \sup_{\{x:\|\lambda(x,t)\|\le\nu, t_0>0\}} P_{x_0,t_0}\{\lim_{t\to\infty} \| \lambda(x(t),t) \| > \varepsilon_1\},$$

что противоречит λ-устойчивости по вероятности интегрального многообразия $\Lambda(t)$.

Таким образом, для почти всех выборочных траекторий множества $\mathcal{R}$ с вероятностью 1 $\lim \| \lambda(x(t),t) \| = 0$ при $t \to \infty$ для всех $x \in U_\varepsilon(0)$. Отсюда и из оценки $V(\lambda; x,t) \ge a(\| \lambda \|)$ для почти всех траекторий из $\mathcal{R}$ следует $\lim\limits_{t\to\infty} \| \lambda(x(t),t) \| = 0$, откуда с учетом (16) и оценки (11) вытекает утверждение теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. - М., 1950. - 472 с.

[2] Четаев Н.Г. Устойчивость движения. - М.: Наука, 1965. - 208 с.

[3] Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. - М., 1966. - 530 с.

[4] Матросов В.М. Об устойчивости движения // ПММ. - 1962. - Т. 26, вып. 5. - С. 885-895.

[5] Зубов В.И. Устойчивость движения. - М., 1973. - 272 с.

[6] Малышев Ю.В. Об устойчивости некомпактных множеств для неавтономных систем // Теория устойчивости и ее приложения. - Новосибирск, 1979. - С. 66-70.

[7] Hajek O. Ordinary and asymptotic stability of Noncompact sets // J. of Diff. Eq. - 1972. - № 11. - P. 49-65.

[8] Галиуллин А.С., Мухаметзянов И.А., Мухарлямов Р.Г., Фурасов В.Д. Построение систем программного движения. - М.: Наука, 1971. - 352 с.

[9] Мухарлямов Р.Г. О построении дифференциальных уравнений оптимального движения к заданному многообразию // Дифференциальные уравнения. - 1971. -- Т. 7, № 10. - С. 688-699.

[10] Галиуллин А.С. Устойчивость движения. - М.: Наука, 1973. - 104 с.

[11] Мухаметзянов И.А. Об устойчивости программного многообразия // Дифференциальные уравнения. - 1973. - Т. 9, № 5. - С. 846-856.

[12] Тлеубергенов М.И. Необходимые и достаточные условия устойчивости интегрального многообразия // Дифференциальные уравнения и обратные задачи динамики. - М.: Изд-во УДН, 1983. - С. 125-132.

[13] Тлеубергенов М.И. Об устойчивости программного движения по первому приближению // Известия АН КазССР. Серия физ.-матем. - 1984. - № 5. - С. 58-61.

[14] Bertram J.E., Sarachik P.E. Stability of circuits with randomly time-varying parameters // Proc. of the Intern. on Circuit and Inform. Theory. Los-Angelos. Calif. IRE transactions. CT-6. - 1959. - P. 260-270.

[15] Кац И.Я., Красовский Н.Н. Об устойчивости систем со случайными параметрами // ПММ. - 1960. - Т. 27, вып. 5. - С. 809-823.

[16] Хасьминский Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. - М., 1969. - 368 с.

[17] Samoilenko A.M., Stanzhytskyi O.M. Qualitative and asymptotic analysis of differential equations with random perturbations. - World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. Singapore, 2011. - 312 p.

[18] Станжицький А.Н. Об устойчивости по вероятности инвариантных множеств систем со случайными возмущениями // Нелінійні коливання. - 1998. - 1, № 2. - С. 138-142.

[19] Станжицький О.М. Дослідження інваріантних множин стохастичних систем Іто за допомогою функцій Ляпунова // Украинский математический журнал. - 2001. - 53, № 2. - С. 282-285.

[20] Тлеубергенов М.И. Метод функций Ляпунова в задаче стохастической устойчивости программного движения // Математический журнал. - 2001. - Т. 1, № 2. - С. 98-106.

[21] Тлеубергенов М.И. Об устойчивости интегрального многообразия стохастического дифференциального уравнения Ито // Известия МОН РК, НАН РК. - 2001. - № 3. - С. 55-62.

[22] Тлеубергенов М.И. Об устойчивости по вероятности программного движения // Известия МОН РК, НАН РК. - 2002. - № 3. - С. 47-53.

[23] Тлеубергенов М.И. Об устойчивости по вероятности программного движения при постоянно-действующих возмущениях // Известия МОН РК, НАН РК. - 2004. - № 3. - С. 53-58.

[24] Гихман И.И., Дороговцев А.Я. Об устойчивости решений стохастических дифференциальных уравнений // Украинский математический журнал. - 1965. - Т. 17, № 6. - С. 3-21.

[25] Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения. - Киев: Наукова думка, 1968. - 256 с.

REFERENCES

[1] Lyapunov A.M. The general problem of stability of motion. - M., 1950. - 472 p. (in Russ.).
[2] Chetaev N.G. Resistance movement. - M .: Nauka, 1965 - 208 p. (in Russ.).
[3] Malkin I.G. The theory of motion stability. - M., 1966. - 530 p. (in Russ.).
[4] Matrosov V.M. On the stability of motion. PMM. - 1962. - V. 26, no. 5. - p. 885-895. (in Russ.).
[5] Zubov V.I. Resistance movement. - M., 1973. - 272 p. (in Russ.).
[6] Malyshev Yu.V. The stability of non-compact sets for non-autonomous systems. Stability Theory and Its Applications. - Novosibirsk, 1979. - P. 66-70. (in Russ.).
[7] Hajek O. Ordinary and asymptotic stability of Noncompact sets. J. of Diff. Eq. - 1972. - № 11. - P. 49-65.
[8] Galiullin A.S., Mukhametzyanov I.A., Mukharlyamov R.G., Furasov V.D. Building systems software movement. - M.: Nauka, 1971. - 352 p. (in Russ.).
[9] Mukharlyamov R.G. On the construction of the differential equations of motion for optimal given variety. Differential Equations. - 1971. - V. 7, № 10. - p. 688-699. (in Russ.).
[10] Galiullin A.S. Resistance movement. - M .: Nauka, 1973 - 104 p.
[11] Mukhametzyanov I.A. The stability of software diversity. Differential Equations. - 1973. - T. 9, № 5. - p. 846-856. (in Russ.).
[12] Tleubergenov M.I. The necessary and sufficient conditions for the stability of the integral manifold. Differential equations and inverse problems of dynamics. - M .: Publishing House of the PFU, 1983. - p. 125-132. (in Russ.).
[13] Tleubergenov M.I. On the stability of the software in the first approximation of motion. Proceedings of the Kazakh SSR. Series of Physics and Mathematics. - 1984. - № 5. - p. 58-61. (in Russ.).
[14] Bertram J.E., Sarachik P.E. Stability of circuits with randomly time-varying parameters. Proc. of the Intern. on Circuit and Inform. Theory. Los-Angelos. Calif. IRE transactions. CT-6. - 1959. - P. 260-270.
[15] Katz I.Ya., Krasovsky N.N. On the stability of systems with random parameters // PMM. - 1960. - V. 27, no. 5. - p. 809-823. (in Russ.).
[16] Khas'minskii R.Z. The stability of systems of differential equations with random perturbations of their parameters. - M., 1969. - 368 p. (in Russ.).
[17] Samoilenko A.M., Stanzhytskyi O.M. Qualitative and asymptotic analysis of differential equations with random perturbations. - World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. Singapore, 2011. - 312 p.
[18] 18 AN Stanzhitsky On stability in probability of invariant sets of systems with random perturbations // Neliniyni Oscillations. - 1998 - 1, № 2. - p. 138-142. (in Russ.).
[19] Stanzhitsky O.M. Doslidzhennya invariantnih mnozhin stochasticity systems ITO for Relief funktsiy Lyapunov. Ukrainian mathematical journal. - 2001 - 53, № 2. - p. 282-285. (in Ukr.).
[20] Tleubergenov M.I. Method of Lyapunov functions in a problem of stochastic stability program motion. Mathematical Journal. - 2001. - Volume 1, № 2. - p. 98-106.
[21] Tleubergenov M.I. The stability of the integral manifold Ito stochastic differential equations. Proceedings of the MES, NAS RK. - 2001. - № 3. - p. 55-62. (in Russ.).
[22] Tleubergenov M.I. On stability in probability programmed motion. Proceedings of the MES, NAS RK. - 2002. - № 3. - p. 47-53. (in Russ.).
[23] Tleubergenov M.I. On the stability of motion in the probability of software, constantly acting perturbations. Proceedings of the MES, NAS RK. - 2004. - № 3. - p. 53-58. (in Russ.).
[24] Gikhman I.I., Dorogovtsev A.Ya. On the stability of solutions of stochastic differential equations. Ukrainian mathematical journal. - 1965. - V. 17, № 6. - p. 3-21. (in Russ.).
[25] Gikhman I.I., Skorokhod A.V. Stochastic differential equations. - Kiev: Naukova Dumka, 1968. - 256 p. (in Russ.).

АНАЛИТИКАЛЫҚ ТҮРДЕ БЕРІЛГЕН ИНТЕГРАЛДЫҚ КӨПБЕЙНЕНІҢ СТОХАСТИКАЛЫҚ ОРНЫҚТЫЛЫҒЫ ТУРАЛЫ

М. И. Тлеубергенов[1], Г. К. Василина[2]

[1]Математика және математикалық моделдеу институты, Алматы, Қазақстан,
[2]Аль-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

Тірек сөздер: Ито дифференциалдық теңдеулері, орнықтылық, ықтималдық, интегралдық көпбейне.

Аннотация. А.М. Ляпуновтың, Н.Г. Четаевтің, И.Г. Малкиннің және тағы басқалардың жұмыстарында дәлелденген, жәй дифференциалдық теңдеулер класында түрткіленбеген қозғалыстың орнықтылығы туралы Ляпуновтың функциялар әдісінің классикалық теоремалары және олардың түрлі жетілдірулері В.Т. Матросовтың, В.И. Зубовтың, И.В. Малышевтың және басқалардың жұмыстарында $V(\rho,t)$ түріндегі Ляпунов функцияларының көмегі арқылы, мұнда $\rho = \rho(x,M)$ кескіндеуші *x* нүктесінен *M* жиынына дейінгі қашықтық, инварианттық жиындар жағдайында жалпыланады. ρ қашықтығының функциясы ретінде $V(\rho,t)$ функцияларын құрудың қиындығын ескере отырып, жәй дифференциалдық теңдеулердің бағдарламалық

қозғалысының теңдеулерін тұрғызу есебінде А.С. Галиуллиннің, И.А. Мухарлямовтың, Р.Г. Мухамедияновтың және басқалардың жұмыстарында жиынның аналитикалық суреттеуі пайдаланылады және негізінде жиынның орнықтылығын зеттеу есебі белгілі бір жүйенің көрнекі шешімінің орнықтылғын зерттеуге әкелінеді. Корсетілген авторлардың жұмыстарында жай дифференциалдық теңдеулер класында екінші Ляпунов әдісінің теоремаларының тәріздестігі аналитикалық түрде берілген инварианттық жиындар үшін дәлелденеді.

Аталмыш жұмыста Ляпуновтың функциялар әдісі арқылы Ито дифференциалдық теңдеулерінің интегралдық көпбейнелерінің ықтималдық бойынша орнықтылығының және асимптотикалық орнықтылығының жеткілікті шарттары кездейсоқ түтркілі тәуелсіз өсімшелі үрдістер класында алынды.

Поступила 07.07.2015 г.

Publication Ethics and Publication Malpractice in the journals of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan

For information on Ethics in publishing and Ethical guidelines for journal publication see http://www.elsevier.com/publishingethics and http://www.elsevier.com/journal-authors/ethics.

Submission of an article to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan implies that the described work has not been published previously (except in the form of an abstract or as part of a published lecture or academic thesis or as an electronic preprint, see http://www.elsevier.com/postingpolicy), that it is not under consideration for publication elsewhere, that its publication is approved by all authors and tacitly or explicitly by the responsible authorities where the work was carried out, and that, if accepted, it will not be published elsewhere in the same form, in English or in any other language, including electronically without the written consent of the copyright-holder. In particular, translations into English of papers already published in another language are not accepted.

No other forms of scientific misconduct are allowed, such as plagiarism, falsification, fraudulent data, incorrect interpretation of other works, incorrect citations, etc. The National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan follows the Code of Conduct of the Committee on Publication Ethics (COPE), and follows the COPE Flowcharts for Resolving Cases of Suspected Misconduct (http://publicationethics.org/files/u2/New_Code.pdf). To verify originality, your article may be checked by the Cross Check originality detection service http://www.elsevier.com/editors/plagdetect.

The authors are obliged to participate in peer review process and be ready to provide corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. All authors of a paper should have significantly contributed to the research.

The reviewers should provide objective judgments and should point out relevant published works which are not yet cited. Reviewed articles should be treated confidentially. The reviewers will be chosen in such a way that there is no conflict of interests with respect to the research, the authors and/or the research funders.

The editors have complete responsibility and authority to reject or accept a paper, and they will only accept a paper when reasonably certain. They will preserve anonymity of reviewers and promote publication of corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. The acceptance of a paper automatically implies the copyright transfer to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.

The Editorial Board of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan will monitor and safeguard publishing ethics.

Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайте:

www:nauka-nanrk.kz

http://www.physics-mathematics.kz

Редактор *М. С. Ахметова*
Верстка на компьютере *Д. Н. Калкабековой*

Подписано в печать 14.07.2015.
Формат 60х881/8. Бумага офсетная. Печать – ризограф.
17,25 п.л. Тираж 300. Заказ 4.

Национальная академия наук РК
050010, Алматы, ул. Шевченко, 28, т. 272-13-18, 272-13-19