

ISSN 1991-346X

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ  
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ

# Х А Б А Р Л А Р Ы

---

---

## ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК  
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES  
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА  
СЕРИЯСЫ**



**СЕРИЯ**

**ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ**



**PHYSICO-MATHEMATICAL  
SERIES**

**4 (302)**

**ШІЛДЕ – ТАМЫЗ 2015 ж.**

**ИЮЛЬ – АВГУСТ 2015 г.**

**JULY – AUGUST 2015**

1963 ЖЫЛДЫҢ ҚАҢТАР АЙЫНАН ШЫҒА БАСТАҒАН  
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1963 ГОДА  
PUBLISHED SINCE JANUARY 1963

ЖЫЛЫНА 6 РЕТ ШЫҒАДЫ  
ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД  
PUBLISHED 6 TIMES A YEAR

АЛМАТЫ, ҚР ҰҒА  
АЛМАТЫ, НАН РК  
ALMATY, NAS RK

Б а с р е д а к т о р

ҚР ҰҒА академигі,

**Мұтанов Г. М.**

Р е д а к ц и я а л қ а с ы:

физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Әшімов А.А.**; техн. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Байғұнчекөв Ж.Ж.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Жұмаділдаев А.С.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Қалменов Т.Ш.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Мұқашев Б.Н.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Өтелбаев М.О.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Тәкібаев Н.Ж.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Харин С.Н.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Әбішев М.Е.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Жантаев Ж.Ш.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Қалимолдаев М.Н.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Косов В.Н.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Мұсабаев Т.А.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Ойнаров Р.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Рамазанов Т.С.** (бас редактордың орынбасары); физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Темірбеков Н.М.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Өмірбаев У.У.**

Р е д а к ц и я к ең е с і:

Украинаның ҰҒА академигі **И.Н. Вишневский** (Украина); Украинаның ҰҒА академигі **А.М. Ковалев** (Украина); Беларусь Республикасының ҰҒА академигі **А.А. Михалевич** (Беларусь); Әзірбайжан ҰҒА академигі **А. Пашаев** (Әзірбайжан); Молдова Республикасының ҰҒА академигі **И. Тигиняну** (Молдова); мед. ғ. докторы, проф. **Иозеф Банас** (Польша)

Главный редактор

академик НАН РК

**Г. М. Мутанов**

Редакционная коллегия:

доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **А.А. Ашимов**; доктор техн. наук, проф., академик НАН РК **Ж.Ж. Байгунчеков**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **А.С. Джумадильдаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **Т.Ш. Кальменов**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **Б.Н. Мукашев**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **М.О. Отелбаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **Н.Ж. Такибаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **С.Н. Харин**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **М.Е. Абишев**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Ж.Ш. Жантаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **М.Н. Калимолдаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **В.Н. Косов**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Т.А. Мусабаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Р. Ойнаров**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Т.С. Рамазанов** (заместитель главного редактора); доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Н.М. Темирбеков**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **У.У. Умирбаев**

Редакционный совет:

академик НАН Украины **И.Н. Вишневский** (Украина); академик НАН Украины **А.М. Ковалев** (Украина); академик НАН Республики Беларусь **А.А. Михалевич** (Беларусь); академик НАН Азербайджанской Республики **А. Пашаев** (Азербайджан); академик НАН Республики Молдова **И. Тигиняну** (Молдова); д. мед. н., проф. **Иозеф Банас** (Польша)

«Известия НАН РК. Серия физико-математическая». ISSN 1991-346X

Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы)

Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации и архивов Министерства культуры и информации Республики Казахстан №5543-Ж, выданное 01.06.2006 г.

Периодичность: 6 раз в год.

Тираж: 300 экземпляров.

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, ком. 219, 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,

[www.nauka-nanrk.kz](http://www.nauka-nanrk.kz) / [physics-mathematics.kz](http://physics-mathematics.kz)

---

© Национальная академия наук Республики Казахстан, 2015

Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75.

Editor in chief

**G. M. Mutanov**,  
academician of NAS RK

Editorial board:

**A.A. Ashimov**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **Zh.Zh. Baigunchekov**, dr. eng. sc., prof., academician of NAS RK; **A.S. Dzhumadildayev**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **T.S. Kalmenov**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **B.N. Mukhashev**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **M.O. Otelbayev**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **N.Zh. Takibayev**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **S.N. Kharin**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **M.Ye. Abishev**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **Zh.Sh. Zhantayev**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **M.N. Kalimoldayev**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **V.N. Kosov**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **T.A. Mussabayev**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **R. Oinarov**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **T.S. Ramazanov**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK (deputy editor); **N.M. Temirbekov**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **U.U. Umirbayev**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK

Editorial staff:

**I.N. Vishnievski**, NAS Ukraine academician (Ukraine); **A.M. Kovalev**, NAS Ukraine academician (Ukraine); **A.A. Mikhalevich**, NAS Belarus academician (Belarus); **A. Pashayev**, NAS Azerbaijan academician (Azerbaijan); **I. Tighineanu**, NAS Moldova academician (Moldova); **Joseph Banas**, prof. (Poland).

**News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physical-mathematical series.**  
**ISSN 1991-346X**

Owner: RPA "National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan" (Almaty)

The certificate of registration of a periodic printed publication in the Committee of information and archives of the Ministry of culture and information of the Republic of Kazakhstan N 5543-Ж, issued 01.06.2006

Periodicity: 6 times a year

Circulation: 300 copies

Editorial address: 28, Shevchenko str., of. 219, 220, Almaty, 050010, tel. 272-13-19, 272-13-18,

[www.nauka-nanrk.kz](http://www.nauka-nanrk.kz) / [physics-mathematics.kz](http://physics-mathematics.kz)

---

© National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, 2015

Address of printing house: ST "Aruna", 75, Muratbayev str, Almaty

**NEWS**

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES**

ISSN 1991-346X

Volume 4, Number 302 (2015), 172 – 181

**WEIGHTED FUNCTIONAL INEQUALITIES**

**Sh. Bilal, A. B. Darzhanova**

Institute of Mathematics and mathematical modeling, Almaty, Kazakhstan.

E-mail: bilal44@mail.ru

**Keywords:** weight, inequality, investment, compact, space.

**Abstract.** With the emergence of a new direction in functional analysis - "embedding theorems of the functional spaces" - it turned out that study of the many qualitative properties of differential and integral operators is equivalent to the determination of appropriate embedding theorems with certain properties. Particularly, this approach gives productive results in establishing the properties of singular operators and embedding theorems of weighted spaces. In this article are discussed embedding of weighted spaces, embedding of functions with absolutely - continuous derivatives of a certain order in the Lebesgue space or score weighted inequality of Hardy. Obtained the necessary and sufficient conditions for the weighted inequality of Hardy or investments mentioned spaces. Founded matching two-sided estimates in order. Criterion for compactness of the embedding operator was given. It uses the method of localization based on a detailed study of the objects in the "characteristic" range, introduced in additive behavior factors. One productive approach in studies of this kind belongs to M. Otelbaev which we use too. At the same time the results of this work are the results of the Oynarova's addition.

УДК 517.51

**О ВЕСОВЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВАХ**

**Ш. Билал, А. Б. Даржанова**

Институт математики и математического моделирования МОН РК, Алматы, Казахстан

**Ключевые слова:** весовые, неравенства, вложение, компактность, пространства.

**Аннотация.** С возникновением нового направления в функциональном анализе - «теоремы вложения функциональных пространств» - выяснилось, что изучение многих качественных свойств дифференциальных и интегральных операторов эквивалентно установлению соответствующих теорем вложения с теми или иными свойствами. Особенно, такой подход дает плодотворные результаты в установлении свойств сингулярных операторов и теорем вложений весовых пространств. В данной статье рассматривается вложение весовых пространств, вложение пространства функций, имеющих абсолютно-непрерывные производные

определенного порядка в Лебегово пространство или оценка весового неравенства типа Харди. Получены необходимые и достаточные условия выполнения весового неравенства типа Харди или вложения упомянутых пространств. Найдены двухсторонние оценки совпадающие по порядку. Дан критерий компактности оператора вложения. При этом используется метод локализации основанный на детальном изучении исследуемых объектов на “характеристическом” интервале, внедренный в зависимости поведения коэффициентов. Один из плодотворных подходов в исследованиях такого рода принадлежит М. Отелбаеву [18] которым пользуемся и мы. При этом результаты данной работы представляют собой дополнение результатов работы Р. Ойнарова [20].

В теории сингулярных интегро-дифференциальных операторов центральное место занимает вопросы, связанные с изучением свойств операторов в зависимости от поведения коэффициентов соответствующего интегро-дифференциального выражения. В этом направлении получены фундаментальные результаты в работах С.М. Никольского, Л.Д. Кудрявцева, А. Куфнер, П.И. Лизоркина, В.Г. Мазья, Ж.Л. Лионса, Э. Мадженеса, М.Ш. Бирмана, М. Отелбаева, С.Н. Похожаева, В.И. Буренкова, К. Бойматова, В.Д. Степанова, Р. Ойнарова и других [3–16, 21].

Пусть  $\rho, \nu, r$  - заданные весовые функции, определенные на интервале  $J = (a, b)$ ,  $-\infty < a < b < \infty$ , удовлетворяют на этом интервале следующим требованиям:

$$\begin{aligned} 0 < \rho(x) \in L_{\infty}^{loc}(J), \quad \rho^{-1}(x) \in L_1^{loc}(J), \\ 0 < \nu(x) \in C^{loc}(J), \quad 0 \leq r(x) \in C^{loc}(J) \end{aligned} \tag{1}$$

При этом будем считать, что  $\rho^{-1}(x)$  не суммируема хотя бы в одном конце интервала  $J$ . И пусть это будет окрестность точки  $x = a$ .

Введем в рассмотрение следующие величины, характеризующие локальное поведение весовых функций:

$$\begin{aligned} \omega(x, y) &= \sup \left\{ d > 0 : \int_{x-d}^x \rho^{-1}(\tau) d\tau \leq \int_x^{x+y} \rho^{-1}(\tau) d\tau, (x-d, x+y] \subset J \right\}, \\ d^+(x) &= \sup \left\{ d > 0 : \sup_{x-\omega(x,d) \leq t \leq x+d} \nu(t) \int_{x-\omega(x,d)}^{x+d} \rho^{-1}(\tau) d\tau \leq 1, [x, x+d) \subset J \right\}, \\ d^-(x) &= \omega(x, d^+(x)). \end{aligned}$$

Обозначим

$$\Delta(x) = [x - d^-(x), x + d^+(x)] = [x^-, x^+], \quad \Delta^-(x) = [x - d^-(x), x], \quad \Delta^+(x) = [x, x + d^+(x)]$$

Будем считать, что для некоторого  $c \in (a, b)$  выполнено

$$\lim_{t \rightarrow a} \left( \nu(t) \int_t^c \rho^{-1}(\tau) d\tau \right) = \infty, \quad \lim_{t \rightarrow b} \left( \nu(t) \int_c^t \rho^{-1}(\tau) d\tau \right) = \infty \tag{2}$$

**Лемма 1.** Имеет место неравенство [1]:

$$\int_{y-d^-(y)}^{y+d^+(y)} \rho^{-1}(\tau) d\tau \leq 2 \int_{x-d^-(x)}^{x+d^+(x)} \rho^{-1}(\tau) d\tau \quad \forall y \in \Delta(x) \quad (3) \quad \int_{\Delta^+(y)} \rho^{-1}(\tau) d\tau \leq 2 \int_{\Delta^+(x)} \rho^{-1}(\tau) d\tau$$

Рассмотрим условия выполнения неравенства

$$\|rf\|_{\infty} \leq c \left( \|\rho f'\|_{\infty} + \|\nu f\|_{\infty} \right) \tag{4}$$

Введем функцию  $B(x) = \sup_{x^- \leq z \leq x} r(z) \int_{x^- - d^-(x^-)}^z \rho^{-1}(\tau) d\tau + \sup_{x \leq z \leq x^+} r(z) \int_z^{x^+ - d^+(x^+)} \rho^{-1}(\tau) d\tau.$

**Теорема 1 [2].** Пространство  $W'_\infty$  вложено в  $L_{\infty,r}$  тогда и только тогда или неравенство (4) выполнено тогда и только тогда, когда

$$B = \sup_{x \in J} B(x) < \infty \quad (5)$$

При этом для нормы оператора вложения  $E : W'_\infty \rightarrow L_{\infty,r}$  справедлива оценка:

$$c^{-1}B \leq \|E\| \leq cB \quad (6)$$

Пусть  $AC^{n+1}(\overset{\circ}{R}_+)(R_+ = [0, \infty))$  - совокупность функций, имеющих абсолютно непрерывные производные  $(n+1)$ -го порядка и обращающихся в нуль некоторой окрестности бесконечно удаленной точки, своей для каждой функции.

Обозначим через  $H_\infty^n$  пополнение пространства  $AC^{n+1}(\overset{\circ}{R}_+)$  по норме

$$\|f\|_{H_\infty^n} = \|\rho f^{(n+1)}\|_\infty + \|\nu f^{(n)}\|_\infty.$$

Здесь  $\nu, \rho \in C[0, N] \quad \forall N > 0$ . Продолжим функции  $\nu, \rho$  четным образом на всю ось и будем предполагать выполнение условия (2). Положим

$$\rho_*(x) = \left( \int_{\Delta^+(x)} \rho^{-1}(\tau) d\tau \right)^{-1}$$

**Лемма 2.** Имеет место неравенство

$$\|\rho_* f^{(n)}\|_\infty \leq K \|f\|_{H_\infty^n} \quad \forall f \in AC^{n+1}(\overset{\circ}{R}_+), \quad (7)$$

где постоянная  $K > 0$  не зависит от  $\nu, \rho$  и  $f$ .

Доказательство. Положим  $\varphi = f^{(n)}$ . Тогда (7) имеет вид

$$\|\rho_* \varphi\|_{\infty, R_+} \leq K (\|\rho \varphi'\|_{\infty, R_+} + \|\nu \varphi\|_{\infty, R_+}) \quad (8)$$

Продолжим функцию  $\varphi$  четным образом на всю ось. Тогда (8) эквивалентно неравенству

$$\|\rho_* \varphi\|_{\infty, R} \leq K \|\varphi\|_{W'_\infty(R)} \quad (9)$$

По теореме 1 (9) выполнено, если

$$\sup_{x \in R} B(x) < \infty,$$

где

$$B(x) = \sup_{x^- \leq z \leq x} \rho_*(z) \int_{x^- - d^-(x^-)}^z \rho^{-1}(\tau) d\tau + \sup_{x \leq z \leq x^+} \rho_*(z) \int_z^{x^+ + d^+(x^+)} \rho^{-1}(\tau) d\tau$$

Имеем

$$\begin{aligned} \rho_*(z) \int_{x^- - d^-(x^-)}^z \rho^{-1}(\tau) d\tau &\leq \rho_*(z) \int_{x^- - d^-(x^-)}^{x^-} \rho^{-1}(\tau) d\tau + \rho_*(z) \int_{x^-}^z \rho^{-1}(\tau) d\tau \leq \\ &\leq \rho_*(z) (\rho_*(x^-))^{-1} + \rho_*(z) (\rho_*(z))^{-1}. \end{aligned}$$

Так как  $x^- \in \Delta^-(z) \quad \forall z \in \Delta^-(x)$ , то по лемме 1  $\rho_*(z) \leq 2\rho_*(x^-) \quad \forall z \in \Delta^-(x)$ .

Поэтому  $\rho_*(z) \int_{x^- - d^-(x^-)}^z \rho^{-1}(\tau) d\tau \leq 3$  при  $z \in \Delta^-(x)$ .

Аналогично  $\rho_*(z) \int_z^{x^+ + d^+(x^+)} \rho^{-1}(\tau) d\tau \leq 3$  при  $z \in \Delta^+(x)$ .

Следовательно  $\sup_{x \in R} B(x) \leq 6$ .

Лемма доказана.

Положим

$$B_n(x) = r(x) \int_z^\infty (s-x)^{n-1} \rho^{-1}(s) ds$$

**Теорема 2.** Вложение пространств  $H_\infty^n \subset L_{\infty,r}$  имеет место тогда и только тогда, когда

$$B_n = \sup_{x>0} B_n(x) < \infty \quad (10)$$

Для нормы оператора вложения  $E: H_\infty^n \subset L_{\infty,r}$  имеет оценка

$$C^{-1} B_n \leq \|E\| \leq C B_n$$

где постоянная  $C > 0$  не зависит от  $r, \rho, \nu$ .

Доказательство. Достаточность. Пусть выполнено (10). Положим  $\psi(t) = \rho_*(t) f^{(n)}(t)$ .

Тогда

$$f(t) = \gamma \int_t^\infty (s-t)^{n-1} \rho^{-1}(s) \psi(s) ds, \quad \gamma = \frac{(-1)^n}{(n-1)!}.$$

Рассмотрим интегральный оператор

$$A\psi = \gamma r(t) \int_t^\infty (s-t)^{n-1} \rho^{-1}(s) \psi(s) ds$$

из  $L_\infty(R_+)$  в  $L_\infty(R_+)$ . Как известно [17, гл.2, теор. 4]

$$\|A\|_{\infty \rightarrow \infty} = \gamma B_n$$

В силу (45) оператор  $A$  ограничен в  $L_\infty$ , что равносильно выполнению неравенства

$$\|rf\|_\infty \leq \gamma B_n \|\rho_* f^{(n)}\|_\infty \quad \forall f \in AC^{n+1}\left(\overset{\circ}{R}_+\right)$$

Теперь, применяя лемму 2 убедимся, что имеет место вложение  $H_\infty^n \subset L_{\infty,r}$  и  $\|E\| \leq K \gamma B_n$ .

Необходимость. Пусть оператор вложения  $E: H_\infty^n \subset L_{\infty,r}$  непрерывен. Тогда

$$\|rf\|_\infty \leq \|E\| \|f\|_{H_\infty^n} \quad f \in H_\infty^n \quad (11)$$

Пусть  $z \in R_+$  произвольная фиксированная точка.

Пусть  $R = \bigcup_{i=-\infty}^\infty \Delta^+(z_i)$ , причем  $z_0 = z$  и  $z_{i+1} = z_i + d^+(z_i)$ . В силу леммы 1

$$\int_{\Delta^+(z_{i+1})} \rho^{-1}(\tau) d\tau \leq 2 \int_{\Delta^+(z_i)} \rho^{-1}(\tau) d\tau \quad (12)$$

Введем функции



$$f_i(t) = f_{i,z}(t) = \begin{cases} \alpha_i \int_{z_{i-1}}^t \rho^{-1}(\tau) d\tau & \text{при } z_{i-1} \leq t \leq z_i \\ \int_t^{z_{i+2}} \rho^{-1}(\tau) d\tau & \text{при } z_i \leq t \leq z_{i+2} \\ 0 & \text{при } t \in [z_{i-1}, z_{i+2}], \end{cases}$$

где  $\alpha_i = \left( \int_{z_{i-1}}^{z_i} \rho^{-1}(\tau) d\tau \right)^{-1} \int_{z_i}^{z_{i+2}} \rho^{-1}(\tau) d\tau$ .

Для любого целого  $m > 0$  и  $z \in R_+$  положим

$$\varphi_m(t) = \varphi_{z,m}(t) = \sum_{i=0}^m \int_t^\infty (s-t)^{n-1} f_i(s) ds.$$

Тогда имеем

$$\int_t^\infty (s-t)^{n-1} f_i(s) ds = \begin{cases} \alpha_i \int_{z_{i-1}}^{z_i} (s-t)^{n-1} \int_{z_{i-1}}^S \rho^{-1}(\tau) d\tau ds + \int_{z_i}^{z_{i+2}} (s-t)^{n-1} \int_S^{z_{i+2}} \rho^{-1}(\tau) d\tau ds, & t \leq z_{i-1} \\ \alpha_i \int_t^{z_i} (s-t)^{n-1} \int_{z_{i-1}}^S \rho^{-1}(\tau) d\tau ds + \int_{z_i}^{z_{i+2}} (s-t)^{n-1} \int_S^{z_{i+2}} \rho^{-1}(\tau) d\tau ds, & z_{i-1} \leq t \leq z_i \\ \int_t^{z_{i+1}} (s-t)^{n-1} \int_S^{z_{i+2}} \rho^{-1}(\tau) d\tau ds, & z_i \leq t \leq z_{i+2} \\ 0, & t \geq z_{i+2} \end{cases}$$

Пусть  $t \in [0, \infty)$ . Тогда существует  $\Delta^+(z_{i_0})$  такой, что  $t \in [z_{i_0}, z_{i_0+1})$ ,

$$\rho(t) \sum_{i=0}^\infty |f'_i(t)| = \rho(t) |f'_{i_0-1}(t)| + \rho(t) |f'_{i_0}(t)| + \rho(t) |f'_{i_0+1}(t)|,$$

$$\nu(t) \sum_{i=0}^\infty |f_i(t)| = \nu(t) f_{i_0-1}(t) + \nu(t) f_{i_0}(t) + \nu(t) f_{i_0+1}(t)$$

Вычисления показывают  $\rho(t) |f'_{i_0-1}(t)| = 1$ ,  $\rho(t) |f'_{i_0}(t)| = 1$ ,  $\rho(t) |f'_{i_0+1}(t)| = \alpha_{i_0+1} \leq 6$

Последнее неравенство получено на основании (12). Итак

$$\left\| \rho(t) \sum_{i=0}^\infty f'_i(t) \right\|_\infty \leq 8.$$

Таким же образом получаем

$$\left\| \nu(t) \sum_{i=0}^m f_i \right\|_\infty = \max_{0 \leq j \leq \infty} \sum_{k=-1}^1 \|\nu f_{i+k}\|_\infty \leq 10.$$

Тогда

$$\|\varphi_{z,m}\|_{H_\infty^n} \leq 18(n-1)! \tag{13}$$

При  $t \leq z_i$  справедливо неравенство

$$\int_t^\infty (s-t)^{n-1} f_i(s) ds \geq \int_{z_i}^{z_{i+2}} (s-t)^{n-1} \int_S^{z_{i+2}} \rho^{-1}(\tau) d\tau ds \leq \int_{z_i}^{z_{i+1}} (s-t)^{n-1} \int_S^{z_{i+2}} \rho^{-1}(\tau) d\tau ds \geq \int_{z_i}^{z_{i+1}} (s-t)^{n-1} \int_S^{S^+} \rho^{-1}(\tau) d\tau = \int_{z_i}^{z_{i+1}} (s-t)^{n-1} \rho_*^{-1}(s) ds$$

Пусть  $t = z = z_0$ . Тогда  $t \leq z_i \quad \forall i \geq 0$ , поэтому

$$\varphi_{z,m}(t) = \sum_{i=0}^\infty \int_t^\infty (s-t)^{n-1} f_{i,z}(s) ds \geq \sum_{i=0}^\infty \int_{z_i}^{z_{i+1}} (s-z)^{n-1} \rho_*^{-1}(s) ds = \int_t^{z_{m+1}} (s-t)^{n-1} \rho_*^{-1}(s) ds \tag{14}$$

Из (11), (13), (14) имеем

$$r(t) \int_t^{z_{m+1}} (s-t)^{n-1} \rho_*^{-1}(s) ds \leq r(t) \varphi_t(x) \leq \sup_{x \geq 0} |r(x) \varphi_t(x)| \leq \|E\| \|\varphi_t\|_{H_\infty^n} \leq 18(n-1)! \|E\|.$$

Откуда в силу произвольности  $t = z \in R_+$  и  $m > 0$

$$B_n \leq 18(n-1)! \|E\| < \infty$$

Теорема 2 доказана.

**Следствие 1.** Неравенство

$$\|r\varphi^{(k)}\|_\infty \leq C \|\varphi\|_{H_\infty^n}, \quad \varphi \in AC^{n+1}(\overset{\circ}{R}_+)$$

выполнено тогда и только тогда, когда

$$\sup_{x>0} r(x) \int_x^\infty (s-x)^{n-k-1} \rho_*^{-1}(s) ds < \infty$$

**Следствие 2.** Если  $\int_0^\infty s^{n-1} \rho_*^{-1}(s) ds < \infty$ , то

$$\forall f \in H_\infty^n \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f^{(k)}(x) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Следствие 2 вытекает из следствия 1 и неравенства

$$\int_0^\infty s^k \rho_*^{-1}(s) ds \leq \int_0^1 \rho_*^{-1}(s) ds + \int_1^\infty s^{n-1} \rho_*^{-1}(s) ds$$

**Теорема 3.** Вложение  $H_\infty^n(R_+) \subset C_r(R_+)$  компактно тогда и только тогда, когда

$$\lim_{x \rightarrow \infty} B_n(x) = 0$$

Доказательство. Необходимость. Пусть вложение  $H_\infty^n(R_+) \subset C_r(R_+)$  компактно.

Тогда  $B_n < \infty$ . Рассмотрим семейство функций  $M = \{\varphi_{z,m}(\square), m > 0, z \in R_+\}$ . Из доказательства теоремы 2 следует, что  $\forall z \in R_+ \|\varphi_{z,m}\|_{H_\infty^n} \leq 18(n-1)!$ . Следовательно множество  $rM = \{r\varphi_{z,m}, m > 0, z \in R_+\}$  предкомпактно в  $C(R_+)$ . На основании теоремы о компактности

ограниченного множества в  $C(R_+)$ , для  $\varepsilon > 0$  существует конечное число  $n = n(\varepsilon)$  и точек

$\{\alpha_i\}^n \subset R_+$  такие, что  $R_+ = \bigcup_{i=1}^n [\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ ,  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_{n+1} = \infty$ ,

$$\sup_{\varphi \in rM} \sup_{x, y \in [\alpha_i, \alpha_{i+1})} |r(x)\varphi(x) - r(y)\varphi(y)| < \varepsilon \quad \forall i = \overline{1, n} \quad (15)$$

Пусть  $R_\eta = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \Delta^+(z_k)$ ,  $z_0 = z \in [\alpha_n, \infty)$ .

Положим  $x = z_{m+2}$ ,  $y = z$ . Тогда  $r(x)\varphi_{z,m}(x) = 0$  так как  $\int_x^\infty (s-x)^{n-1} f_{i,z}(s) ds = 0$  при

$z_{m+2} = x \geq z_{i+2}$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$

Из (14), (15) имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon &> |r(x)\varphi_{y,m}(x) - r(y)\varphi_{y,m}(y)| = r(y) \sum_y^\infty \int (s-y)^{n-1} f_{i,y}(s) ds \geq \\ &\geq r(y) \int_y^{z_{m+1}} (s-y)^{n-1} \rho_*^{-1}(s) ds. \end{aligned}$$

Откуда в силу произвольности  $m > 0$

$$r(y) \int_y^\infty (s-y)^{n-1} \rho_*^{-1}(s) ds < \varepsilon \quad \text{при } y > \alpha_n(\varepsilon)$$

т.е.  $\lim_{y \rightarrow \infty} B_n(y) = 0$ . Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть выполнено условие  $\lim_{x \rightarrow \infty} B_n(x) = 0$ .

Тогда для  $\varepsilon > 0$  существует  $N = N(\varepsilon)$  такое, что для всех  $x > N$   $B_n(x) < \varepsilon$ . Из – за непрерывности составляющих,  $B_n(x)$  непрерывна на отрезке  $[0, N]$  и поэтому ограничена на нем

$$\sup_{x \in [0, N]} B_n(x) \leq C.$$

Следовательно  $\sup_{x \in R_+} B_n(x) < \infty$ . Тогда по теореме 2 имеет место непрерывное вложение

$$H_\infty^n \subset C_r.$$

Пусть  $S$  - единичный шар в  $H_\infty^n$ . Тогда применяя теорему 2 на интервале  $[N, \infty)$  получаем

$$\begin{aligned} \sup_{\varphi \in S} \sup_{x, y \in [N, \infty)} |r(x)\varphi(x) - r(y)\varphi(y)| &\leq 2 \sup_{\varphi \in S} \|r\varphi\|_{\infty, [N, \infty)} \leq \\ &\leq C \sup_{x, y \in [N, \infty)} B_n(x) \|\varphi\|_{H_\infty^n} \leq C\varepsilon \end{aligned} \quad (16)$$

Из равномерной непрерывности функции  $r(\cdot)$  на  $[0, N]$  для  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon)$  и  $|r(x) - r(y)| \leq \varepsilon$  при  $|x - y| \leq \delta_1$ ,  $x, y \in [0, N]$ .

Из условия (10)  $\int_0^\infty S^{n-1} \rho_*^{-1}(s) ds < \infty$ . Поэтому на основании следствия 2 теоремы 2  $\forall \varphi \in H_\infty^n$

$$\lim_{S \rightarrow \infty} \varphi^{(k)}(s) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Далее для  $\varphi \in S$ ,  $x, y \in [0, N]$

$$\begin{aligned}
 |\varphi(x) - \varphi(y)| &= \frac{1}{(n-1)!} \left| \int_y^\infty (s-y)^{n-1} \varphi^{(n)}(s) ds - \int_x^\infty (s-x)^{n-1} \varphi^{(n)}(s) ds \right| = \\
 &= \frac{1}{(n-1)!} \left| \int_y^x (s-y)^{n-1} \varphi^{(n)}(s) ds + \int_x^\infty [(s-y)^{n-1} - (s-x)^{n-1}] \varphi^{(n)}(s) ds \right| \leq \\
 &\leq \frac{1}{(n-1)!} \left| \int_y^x (s-y)^{n-1} \varphi^{(n)}(s) ds \right| + \frac{1}{(n-1)!} \left| \sum_{k=1}^{n-1} C_k^{n-1} (x-y)^k \int_y^x (s-y)^{n-k-1} \varphi^{(n)}(s) ds \right| \leq \\
 &\leq \frac{1}{(n-1)!} \left| \int_y^x (s-y)^{n-1} \rho_*^{-1}(s) ds \right| \|\rho_* \varphi^{(n)}\|_\infty + \frac{1}{(n-1)!} \left| \sum_{k=1}^{n-1} C_k^{n-1} |x-y|^k \right| \cdot \\
 &\cdot \int_x^\infty (s-x)^{n-k-1} \rho_*^{-1}(s) ds \|\rho_* \varphi^{(n)}\|_\infty \leq \frac{1}{(n-1)!} \int_y^x (s-y)^{n-1} \rho_*^{-1}(s) ds \|\varphi\|_{H_\infty^n} + \\
 &+ \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=1}^{n-1} C_k^{n-1} |x-y|^k \int_x^\infty (s-x)^{n-k-1} \rho_*^{-1}(s) ds \|\varphi\|_{H_\infty^n} \leq \\
 &\leq \frac{1}{(n-1)!} \left| \int_y^x (s-y)^{n-1} \rho_*^{-1}(s) ds \right| + \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=1}^{n-1} C_k^{n-1} |x-y|^k \int_0^\infty S^{n-k-1} \rho_*^{-1}(s) ds = \theta(x, y)
 \end{aligned}$$

Из условия (10) следует, что

$$\int_0^\infty S^{n-1} \rho_*^{-1}(s) ds < \infty.$$

Поэтому

$$\int_0^\infty S^{n-k-1} \rho_*^{-1}(s) ds \leq \int_0^1 \rho_*^{-1}(s) ds + \int_1^\infty S^{n-1} \rho_*^{-1}(s) ds < \infty.$$

Выберем  $0 < \delta \leq \delta_1$  так, чтобы при  $|x - y| \leq \delta$  выполнялось неравенство  $\theta(x, y) \leq \varepsilon$ . Тогда  $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \varepsilon$ .

Пусть  $[0, N] = \bigcup_{i=1}^{m-1} [\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ , причем  $\alpha_{i+1} - \alpha_i \leq \delta$ .

Тогда

$$\begin{aligned}
 &\sup_{\varphi \in S} \sup_{x, y \in [\alpha_i, \alpha_{i+1}]} |r(x)\varphi(x) - r(y)\varphi(y)| \leq \\
 &\sup_{\varphi \in S} \sup_{x, y \in [\alpha_i, \alpha_{i+1}]} |r(x)| |\varphi(x) - \varphi(y)| + \sup_{\varphi \in S} \sup_{x, y \in [\alpha_i, \alpha_{i+1}]} |\varphi(y)| |r(x) - r(y)| \leq \\
 &\leq \varepsilon \left( \sup_{x \in [0, N]} |r(x)| + \sup_{\varphi \in S} \sup_{y \in [0, N]} |\varphi(y)| \right) \tag{17}
 \end{aligned}$$

Из теоремы 2 следует

$$\sup_{\varphi \in S} \sup_{y \in [0, N]} |\varphi(y)| \leq \sup_{\varphi \in S} \|\varphi\|_\infty \leq \int_0^\infty S^{n-1} \rho_*^{-1}(s) ds \|\varphi\|_{H_\infty^n} \leq \int_0^\infty S^{n-1} \rho_*^{-1}(s) ds$$

Поэтому из (16), (17) на основании теоремы о предкомпактности ограниченного множества в  $C(R_+)$  следует, что  $S$  предкомпактно в  $C_r$ . Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бялов Ш. Об одном весовом вложении // Изв. АН Каз ССР. Сер. физ.-мат. 1988. №5. С. 17 – 21.
- [2] Бялов Ш. Об одном трехвесовом вложении // Деп. в ВИНТИ. 1988. №4834 – В88. 21 с.
- [3] Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.
- [4] Кудрявцев Л.Д. Прямые и обратные теоремы вложения. Приложения к решению вариационным методом эллиптических уравнений // Тр. МИАН СССР. 1959. Т. 55. С. 1-181.
- [5] Куфнер А., Опиц Б. и др. Точные теоремы вложения для одного класса весовых пространств С.Л. Соболева // ДАН УССР. 1988. №1. С. 22-26.
- [6] Лизоркин П.Н., Отелбаев М. Теоремы вложения и компактности для пространств соболевского типа с весами // Мат. Сб. 1979. Т. 108. №3. С. 358-377 (4.1); Мат. Сб. 1980. Т. 112. №1. С. 56-85 (4.11)
- [7] Лизоркин П.И., Никольский С.М. Коэрцитивные свойства эллиптического уравнения с вырождением и обобщенной правой частью // Тр. МИАН СССР. 1983. Т.161. С. 157-183.
- [8] Мазья В.Г. Пространства Соболева. Л. : Изд-во ЛГУ, 1985.
- [9] Лионс Ж.Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир. 1971. 372 с.
- [10] Бирман М.Ш., Павлов В.С. О полной непрерывности некоторых операторов вложения // Вестн. ЛГУ. Математика. Механика. Астрология. 1961. №1, С. 61-74.
- [11] Отелбаев М. Теоремы вложения пространств с весом и их применения к изучению спектра оператора Шредингера // Тр. МИАН СССР. 1979. Т. 150. С. 265-305.
- [12] Мынбаев К.Т., Отелбаев М. Весовые функциональные пространства и спектр дифференциальных операторов. М.: Наука, 1988, 288 с.
- [13] Похожаев С.И. Вложение нелинейных операторов и априорные оценки решений нелинейных уравнений // ДАН СССР. 1982. Т. 266. №5. С. 1063-1066.
- [14] Буренков В.Н. Теорема о повторных нормах для пространств Никольского – Бесова и ее применение // Тр. МИАН. 1980. Т. 181. С. 27-39.
- [15] Бойматов К.Х. О некоторых весовых пространствах. – Вкн.: Функциональный анализ и его приложения к теор. вес. 1984. М.: МГУ. С. 119-120.
- [16] Степанов В.Д. О весовом неравенстве Харди // Сиб. Мат. журнал. 1987. Т. 28. №3. С. 205-207.
- [17] Контарович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 744 с.
- [18] Г. Харди, Дж.Е. Литтлвуд, Г. Полиа. Неравенства. М.: ИЛ. 1948.
- [19] Ойнаров Р., Отелбаев М. Критерий дискретности спектр общего оператора Штурма – Лиувилля и теоремы вложения, связанные с ним. // Диф. уравнения. 1988. Т. 24. №4 С. 584-591.
- [20] Ойнаров Р. О плотности финитных функций в весовых пространствах и весовые неравенства // ДАН СССР. 1988. Т. 303. №3. С.
- [21] Ойнаров Р. Дуальное неравенство к аддитивной оценке матричного оператора // Труды междунар. конф. “Современное состояние и перспектива развития математики в рамках программы “Казахстан в третьем тысячелетии”” 2001. – С. 111-115.
- [22] Oinarov R., Temirkhanova A.M. Boundedness of multiple discrete Hardy operators with weighted sequence spaces // J. Math. Ineq. - 2008. – V. 2. №4. – P. 555-570.
- [23] Oinarov R., Okroti C.A., Person L. E. Weighted inequalities of Hardy type for matrix operators: the case  $q < p$  // Math. Inequal. Appl. – 2007. №4. – P. 843 – 861.
- [24] Taspaganbetova Zh. Two – sided estimates for matrix operators on the core of monotone sequences // J. Math. Anal. – 2014. – V. 410.
- [25] Taspaganbetova Zh. Temirkhanova A.M. Boundedness and Compactness criteria of a certain class of matrix operators // Математический журнал. – 2011. Т. 11, №2(40). – С. 73-85.
- [26] Taspaganbetova Zh., Temirkhanova A.M. Criteria on boundedness of matrix operators in weighted spaces of sequences and their applications // Annals of functional Analysis. – 2011. Т. 2, №1. – С. 114-127.

REFERENCES

- [1] Blyalov Sh. A weight attachment // Math. AN Kazakh SSR. Ser. phys - mat. 1988. №5. S. 17 - 21.
- [2] Blyalov Sh. A three weight attachment // Dep. VINITI. 1988. №4834 - V88. 21.
- [3] Nikolsky S.M. Approximation of functions of several variables and embedding theorems. M. : Nauka, 1977.
- [4] Kudryavtsev L.D. Direct and inverse imbedding theorems. Applications to the solution of the variational method of elliptic equations // Tr. Steklov. 1959. T. 55. S. 1-181.
- [5] Kufner A., Opitz B. et al. Exact embedding theorem for a class of weighted spaces C.L. Sobolev // Dokl. 1988. №1. S. 22-26.
- [6] Lizorkin. P.N., Otelbaev M. Embedding theorems and compactness for spaces of Sobolev type with weights // Mat. Coll. 1979. T. 108. №3. Pp 358-377 (4.1); Mat. Coll. 1980. T. 112. №1. Pp 56-85 (4.11)
- [7] Lizorkin P.I., Nikol'skii S.M. Coercive properties of an elliptic equation with degeneration and a generalized right-hand side // Tr. MI USSR. 1983 T.161. Pp 157-183.
- [8] Maz'ya V.G. Sobolev spaces. AL: Leningrad State University, 1985.
- [9] Lions J.L., Magenes E. Heterogeneous boundary value problems and their applications. M. : Mir. 1971. 372 p.
- [10] Birman M.Sh., Pavlov V.S. On the complete continuity of certain imbedding operators // Vestn. LSU. Mathematics. Mechanics. Astrology. 1961. №1, pp 61-74.

- [11] M. Otelbaev. Imbedding theorems for spaces with weight and their application to the study of the spectrum of the Schrödinger operator // Tr. MI USSR. T. 1979. 150 pp 265-305.
- [12] Mynbayev KT, Otelbaev M. Weighted function spaces and a range of differential operators. M.: Nauka, 1988, 288 p.
- [13] Pokhozhaev S.I. Attachment of nonlinear operators and a priori estimates of the solutions of nonlinear equations // Dokl. 1982. Vol. 266. №5. P. 1063-1066.
- [14] Burenkov V.N. A theorem on iterated norms for Nikol'skij - Besov and its application // Tr. Mat. T. 1980. 181 pp 27-39.
- [15] Boymatov K.H. On some weighted spaces. - WPC.: Functional analysis and its application on the weight theory. 1984. M.: MGU. Pp 119-120.
- [16] Stepanov V.D. About the weighted Hardy inequality // Sib. Mt.zhurnal. 1987. V. 28. №3. Pp 205-207.
- [17] Kontorovich L.V., Akilov G.P. Functional Analysis. M.: Nauka, 1977. 744 p.
- [18] G. Hardy, J.E. Littlewood, G. Polya. Neravenstva. M.: IL. 1948.
- [19] Oinarov R., Otelbaev M. Discreteness criterion for the spectrum of the total of the Sturm - Liouville theorem and investments associated with it. // Diff. equation. 1988. Vol. 24. №4 P. 584-591.
- [20] Oinarov R. On the density of finite functions in weighted spaces, and the weight of unequal // Dokl. 1988. Vol. 303. №3. FROM.
- [21] Oinarov R. The dual inequality addition to the assessment matrix operator // Proceedings of Int. Conf. "Current state and prospects of development of mathematics in the framework of the program" Kazakhstan in the third millennium ", 2001 -P. 111-115.
- [22] Oinarov R., Temirkhanova A.M. Boundedness of  $n$ -multiplied discrete Hardy operators with weighted sequence spaces // J. Math/Ineq/ - 2008. – V. 2. №4. – P. 555-570.
- [23] Oinarov R., Okroti C.A., Persson L. E. Weighted inequalities of Hardy type for matrix operators: the case  $q < p$  // Math. Inequal. Appl. – 2007. №4. – P. 843 – 861.
- [24] Taspaganbetova Zh. Two – sided estimates for matrix operators on the core of monotone sequences // J. Math. Anal. – 2014. – V. 410.
- [25] Taspaganbetova Zh. Temirkhanova A.M. Boundedness and Compactness criteria of a certain class of matrix operators // Mathematical j. – 2011. T. 11, №2(40). – pp. 73-85.
- [26] Taspaganbetova Zh. Temirkhanova A.M. Criteria on boundedness of matrix operators in weighted spaces of sequences and their applications // Annals of functional Analysis. – 2011. T. 2, №1. – pp. 114-127.

## ЖҮКТЕЛГЕН ФУНКЦИОНАЛДЫҚ ТЕҢСІЗДІКТЕР ТУРАЛЫ

Ш. Біләл, А. Б. Даржанова

ҚР БҒМ Математика және математикалық үлгілеу институты, Алматы, Қазақстан

**Тірек сөздер:** жүктелген теңсіздіктер, ену, жинақылық, кеңістіктер.

**Аннотация.** Функционалдық талдауда “функционалдық кеңістіктердің ену теоремалары” атты жаңа бағыттың пайда болуымен дифференциалдық және интегралдық операторлардың көптеген сапалық қасиеттерінің зерттеу – сәйкес әр түрлі қасиеттерге ие ену теоремаларын орнықтырумен пара – пар келетіндігі анықталды. Ерекше, мұндай тәсіл сингуляр операторлармен жүктелген кеңістіктердің ену теоремалары қасиеттерін орнықтыруда жемісті нәтижелер береді. Бұл мақалада жүктелген кеңістіктердің енуі, белгілі ретті абсолют – үзіліссіз туындылары бар функциялар кеңістігінің Лебег кеңістігіне енуі немесе Харди типтес жүктелген теңсіздіктерді бағалау қарастырылған. Харди типтес теңсіздіктің орындалу немесе аталған кеңістіктердің енуінің қажетті және жеткілікті шарттары алынды. Реті бойынша теңескен екіжақты бағалар да алынды. Ену операторы жинақылығының критеріі берілді. Бұл жерде коэффициенттерінің әрекеттеріне байланысты еңгізілген зерттеу нысандарын “сипаттамалық” аралықта түбегейлі зерттеуге негізделген тәсілдер қолданылады. Мұндай тектес зерттеулердің жемісті әдістерінің бірі М. Отелбаевқа тиесілі. Біз де соны пайдаланамыз. Сонымен қатар бұл жұмыстың нәтижелері Р. Ойнаров жұмысы нәтижелерін толықтыра түседі.

Поступила 07.07.2015 г.

**Publication Ethics and Publication Malpractice  
in the journals of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan**

For information on Ethics in publishing and Ethical guidelines for journal publication see <http://www.elsevier.com/publishingethics> and <http://www.elsevier.com/journal-authors/ethics>.

Submission of an article to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan implies that the described work has not been published previously (except in the form of an abstract or as part of a published lecture or academic thesis or as an electronic preprint, see <http://www.elsevier.com/postingpolicy>), that it is not under consideration for publication elsewhere, that its publication is approved by all authors and tacitly or explicitly by the responsible authorities where the work was carried out, and that, if accepted, it will not be published elsewhere in the same form, in English or in any other language, including electronically without the written consent of the copyright-holder. In particular, translations into English of papers already published in another language are not accepted.

No other forms of scientific misconduct are allowed, such as plagiarism, falsification, fraudulent data, incorrect interpretation of other works, incorrect citations, etc. The National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan follows the Code of Conduct of the Committee on Publication Ethics (COPE), and follows the COPE Flowcharts for Resolving Cases of Suspected Misconduct ([http://publicationethics.org/files/u2/New\\_Code.pdf](http://publicationethics.org/files/u2/New_Code.pdf)). To verify originality, your article may be checked by the Cross Check originality detection service <http://www.elsevier.com/editors/plagdetect>.

The authors are obliged to participate in peer review process and be ready to provide corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. All authors of a paper should have significantly contributed to the research.

The reviewers should provide objective judgments and should point out relevant published works which are not yet cited. Reviewed articles should be treated confidentially. The reviewers will be chosen in such a way that there is no conflict of interests with respect to the research, the authors and/or the research funders.

The editors have complete responsibility and authority to reject or accept a paper, and they will only accept a paper when reasonably certain. They will preserve anonymity of reviewers and promote publication of corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. The acceptance of a paper automatically implies the copyright transfer to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.

The Editorial Board of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan will monitor and safeguard publishing ethics.

Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайте:

[www.nauka-nanrk.kz](http://www.nauka-nanrk.kz)

<http://www.physics-mathematics.kz>

Редактор *М. С. Ахметова*

Верстка на компьютере *Д. Н. Калкабековой*

Подписано в печать 14.07.2015.

Формат 60x881/8. Бумага офсетная. Печать – ризограф.

17,25 п.л. Тираж 300. Заказ 4.