ISSN 1991-346X

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ

Х А Б А Р Л А Р Ы

ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

N E W S

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА СЕРИЯСЫ

♦

СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

♦

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

4 (302)

ШІЛДЕ – ТАМЫЗ 2015 ж.
ИЮЛЬ – АВГУСТ 2015 г.
JULY – AUGUST 2015

1963 ЖЫЛДЫҢ ҚАҢТАР АЙЫНАН ШЫҒА БАСТАҒАН
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1963 ГОДА
PUBLISHED SINCE JANUARY 1963

ЖЫЛЫНА 6 РЕТ ШЫҒАДЫ
ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД
PUBLISHED 6 TIMES A YEAR

АЛМАТЫ, ҚР ҰҒА
АЛМАТЫ, НАН РК
ALMATY, NAS RK

«Известия НАН РК. Серия физико-математическая». ISSN 1991-346X
Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы)
Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации и архивов Министерства культуры и информации Республики Казахстан **№5543-Ж**, выданное 01.06.2006 г.

Периодичность: 6 раз в год.
Тираж: 300 экземпляров.

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, ком. 219, 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,
www:nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75.

News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physical-mathematical series.
ISSN 1991-346X
Owner: RPA "National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan" (Almaty)
The certificate of registration of a periodic printed publication in the Committee of information and archives of the Ministry of culture and information of the Republic of Kazakhstan N 5543-Ж, issued 01.06.2006

Periodicity: 6 times a year
Circulation: 300 copies

Editorial address: 28, Shevchenko str., of. 219, 220, Almaty, 050010, tel. 272-13-19, 272-13-18,
www:nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

Address of printing house: ST "Aruna", 75, Muratbayev str, Almaty

N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 4, Number 302 (2015), 185 – 192

REPRESENTATIONS OF S_n ON SOME ROOTED TREES IN FREE RIGHT-COMMUTATIVE ALGEBRA

B. K. Zhakhayev

Suleyman Demirel University, Kaskelen, Kazakhstan.
E-mail: bekzat22@hotmail.com

Key words: free algebra, multi-linear part, identity, irreducible module, basis, rooted tree, Young symmetrizer, group of automorphisms, cycle index, permutation module.

Abstract. Algebra with identity $(a \cdot b) \cdot c = (a \cdot c) \cdot b$ is called a right-commutative. In [2] the basis of the free right-commutative algebra constructed by rooted trees. Studies varieties of free algebras lead to the study of multi-linear part of free algebra as S_n-module. Research on the S_n-modules is a representation of the permutation group S_n. Maschke's theorem says, that any finite V $G-$module decomposes into irreducible $G-$ submodules, where V is finite-dimensional vector space, G is any finite group. $\mathbb{C}S_n$ is group algebra of S_n and S_n-module. Irreducible submodules in $\mathbb{C}S_n$ S_n-module are called Specht modules. The dimension of the Specht module for partition $\lambda \vdash n$ in $\mathbb{C}S_n$ S_n-module is equal to the number of standard Young tableaux for the partition λ. Multiplicity of the Specht module for partition $\lambda \vdash n$ in $\mathbb{C}S_n$ S_n-module is equal to the number of standard Young tableaux for the partition λ. In this paper consider the multi-linear part $F_n^{multi}(X)$ of free right-commutative algebra $F(X)$ as S_n-module. Fully describe the representations of S_n on some rooted trees, that is decomposing into Specht modules.

ЕРКІН ОҢ-КОММУТАТИВТІ АЛГЕБРАНЫҢ КЕЙБІР ТҮБІРЛІ АҒАШТАРЫНДАҒЫ S_n ТОБЫНЫҢ КӨРСЕТІЛІМДЕРІ

Б. К. Жахаев

Сулейман Демирел атындағы университет, Қаскелең, Қазақстан

Тірек сөздер: еркін алгебра, мульти-сызықты бөлік, тепе-теңдік, келтірілмейтін модуль, базис, түбірлі ағаш, Юнг симметризаторы, автоморфизмдер тобы, циклдік индекс, алмастыру модулі.

Аннотация. Алгебра $(a \cdot b) \cdot c = (a \cdot c) \cdot b$ тепе-теңдігін қанағаттандырса оң-коммутативті деп аталады. Еркін оң-коммутативті алгебраның базисы [2] жұмыста түбірілі ағаштар арқылы көрсетілген. Еркін алгебралардың көпбейнелерін зерттеу берілген еркін алгебраның мульти-сызықты бөлігін S_n-модульге жіктелуіне алып келеді. Ал S_n-модульді зерттеу бұл S_n алмастыру тобының көрсетілімін зерттеу есебіне пара пар. $G-$модульге қатысты Машке теоремасы былай дейді, кез келген ақырлы өлшемді V $G-$модуль келтірілмейтін немесе жіктелмейтін $G-$ішкімодульдерге жіктеледі, мұндағы V ақырлы векторлық кеңістік, G кез келген ақырлы топ. $\mathbb{C}S_n$ S_n тобының топтық алгебрасы және S_n-модуль. $\mathbb{C}S_n$ S_n-модулінің келтірілмейтін S_n-ішкімодульдерін Шпехт модуль деп атайды. $\mathbb{C}S_n$ S_n-модулінде $\lambda \vdash n$ бөліктеуіне сәйкес келетін Шпехт модулінің өлшемі λ бөліктеуіне сәйкес келетін стандартты Юнг таблицаларына тең. $\mathbb{C}S_n$ S_n-модулінде $\lambda \vdash n$ бөліктеуіне сәйкес келетін Шпехт модулінің еселігі λ бөліктеуіне сәйкес келетін стандартты Юнг таблицаларына тең. Бұл мақалада $F(X)$ еркін оң-коммутативті алгебраның мульти-сызықты $F_n^{multi}(X)$ бөлігі S_n-модуль ретінде қарастырылады. Кейбір түбірлі ағаштардың S_n-модульге жіктелуі толық сипатталады. Басқаша айтқанда Шпехт модульдерге жіктелуі толық сипатталады.

1. Кіріспе. Еркін алгебралардың көпбейнелілігін зерттеу заманауи алгебраның маңызды есебі. Еркін алгебралардың келтірілмейтін тепе-теңдіктері мен келтірілмейтін модульдерін табу бір есеп болып саналады.

Ғылымда кейбір еркін алгебралардың модульге жіктелуі белгілі. Мысалы, айталық F_n^{assoc}, F_n^{zinb} және F_n^{leib} еркін ассоциативті, еркін Цинбиел және еркін Лейбниц алгебраларының мульти-сызықты бөлігі болсын, онда F_n^{assoc}, F_n^{zinb} және F_n^{leib} мульти-сызықты бөліктері $\mathbb{C}S_n$-ге изоморфты.

Егер F_n^{lie} еркін Ли алгебрасының мульти-сызықты бөлігі болса, онда келтірілмейтін модульдердің еселіктері [7] жұмыста толығымен есептелінген.

Еркін бикоммутативті және еркін Новиков алгебраларының мульти-сызықты бөліктерінің F_n^{bicom}, F_n^{nov} модульдік құрылымдары [3], [4] жұмыстарда толығымен қарастырылған.

Еркін анти-коммутативті алгебраның F_n^{acom} мульти-сызықты бөлігінің модульдік құрылымдары $1 \leq n \leq 7$ үшін [1] жұмыста зерттелген.

Осы жұмыста $F(X)$ еркін оң-коммутативті алгебраның $F_n^{multi}(X)$ мульти-сызықты бөлігі S_n -модуль ретінде қарастырылады. Қарастырылатын алгебра векторлық кеңістік ретінде характеристикасы 0-ге тең өріс үстінде зерттеледі. S_n алмастыру тобының $F_n^{multi}(X)$

кеңістігіне әсері табиғи түрде анықталған. Мысалы, егер $\sigma = (12)(34)(5) \in S_5$ және $m = ((x_1 \cdot x_3) \cdot (x_2 \cdot (x_4 \cdot x_5))) \in F_5^{multi}$ болса, онда

$$\sigma(m) = ((x_2 \cdot x_4) \cdot (x_1 \cdot (x_3 \cdot x_5))).$$

2. Базис ережесі.

Анықтама 2.1: $(A, \cdot)$ алгебрасы оң-коммутативті деп аталады, егер кез келген $x, y, z \in A$ үшін

$$(x \cdot y) \cdot z = (x \cdot z) \cdot y$$

тепе-теңдігі орындалса.

Боялған түбірлі ағаштардың анықтамасы $[2]$ жұмыста келтірілген. Алайда $[2]$ жұмыста келтірілген анықтаманы екіге бөліп қарастырайық. Алдымен боялмаған түбірлі ағаштардың, сосын боялған түбірлі ағаштардың анықтамаларын келтірейік.

Анықтама 2.2: Егер $\bar{\mathbb{T}}$ жиыны үшін төмендегі шарттар орындалса:

$(1)\, \bullet \in \bar{\mathbb{T}}$ және $\bullet = t(\bullet)$, мұндағы $\bullet$– түп және t-жай ғана формалды символ,

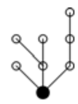
$(2)\, \bullet, u_1, u_2, ..., u_k \in \bar{\mathbb{T}} \Rightarrow t(\bullet, u_1, u_2, ..., u_k) \in \bar{\mathbb{T}}$,

онда $\bar{\mathbb{T}}$ түбірлі ағаштардың рекурсивті жиыны деп аталады.

Мысалы 2.1: Айталық $\bullet, u_1, u_2, u_3 \in \bar{\mathbb{T}}$, және

$u_1 = \circ$, $u_2 =$ , $u_3 =$ ,

болса, онда

$t(\bullet, u_1, u_2, u_3) =$ 

Анықтама 2.3: Егер $\mathbb{T} := \bar{\mathbb{T}}/\sim$ жиыны үшін төмендегі шарттар орындалса:

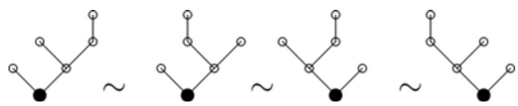
$(1)\, t(\bullet) \sim t(\bullet)$,

$(2)\, t(\bullet, u_1, u_2, ..., u_k) \sim t(\bullet, u_{i_1}, u_{i_2}, ..., u_{i_k})$, егер $(i_1, i_2, ..., i_k)$ тізбегі $(1, 2, ..., k)$ тізбегінің алмастыруы болса,

$(3)\, t(\bullet, u_1, u_2, ..., u_k) \sim t(\bullet, v_1, v_2, ..., v_k)$, егер кез келген $i = 1, 2, ..., k$ үшін $u_i \sim v_i$,

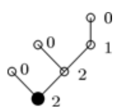
онда $\mathbb{T}$ түбірлі ағаштардың жиыны деп аталады.

Мысалы 2.2:



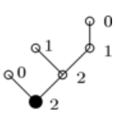
Енді әрбір эквивалент кластан өкіл таңдайық және өкілдер арасына рет анықтайық. Барлық түбірлі ағаштар түптен жапыраққа қарай бағытталған, сондықтан ағаштың әрбір төбесінде төбеге кіретін және төбеден шығатын бұтақтары болады. Енді ағаштың әрбір төбесін сол төбеден шығатын бұтақтар санымен белгілеп шығайық.

Мысалы 2.3:



Енді ағашты саяхаттау ұғымын енгізейік, анығырақ айтсақ preorder$=$ $(\mathrm{root}, \mathrm{left}, \mathrm{right})$.

Мысалы 2.4: Айталық

$u =$ 

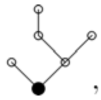
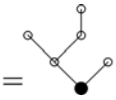
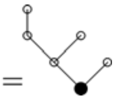
болсын, онда $preorder(u) = 202110$.

Енді $\mathbb{T}$ жиынында рет $<$ енгізейік, $(\mathbb{T}, <)$.

Анықтама 2.4: Айталық $u, v \in \mathbb{T}$ болсын, онда $u < v$ деп аталады, егер $|u| < |v|$, немесе $|u| = |v|$ және $\mathrm{preorder}(u) <_{\mathrm{lex}} \mathrm{preorder}(v)$.

Мысалы 2.5: Жоғарыда келтірілген мысалдағы ағашты қарастырайық.

Айталық,

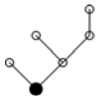
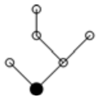
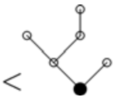
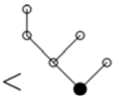
$u_1 =$  $, u_2 =$  $, u_3 =$  $, u_4 =$ 

болсын, онда

$$preorder(u_1) = 202010, preorder(u_2) = 202100,$$
$$preorder(u_3) = 220100, preorder(u_4) = 221000.$$

Содықтан $preorder(u_1) <_{\text{lex}} preorder(u_2) <_{\text{lex}} preorder(u_3) <_{\text{lex}} preorder(u_4)$.

Демек

 $<$  $<$  $<$  .

Мұндағы минимал ағаш осы эквивалентті кластың өкілі болады және n төбеден тұратын барлық минимал түбірлі ағаштардың жиынын $\mathbb{T}_n$ арқылы белгілейік. Онда біздер $\mathbb{T}$ жиынын $\mathbb{T}_n$ жиындарының бірігуі ретінде жазуға болады

$$\mathbb{T} = \bigcup_{n \geq 1} \mathbb{T}_n.$$

Анықтама 2.5: Берілген $u = t(\circ, u_1, u_2, ..., u_k)$ түбірлі ағашы $v \in \mathbb{T}_n$ ағашының симметриялық бөлігі деп аталады, егер келесі шарттар орындалса:

(1) $\circ \in \varnothing, |\circ| = 0,$

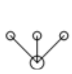
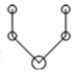
(2) $u_1 = u_2 = ... = u_k \neq u_{k+1},$

және $t(\circ, u_1, u_2, ..., u_k)$ ағашы қысқаша $t(\circ, ku_1)$ арқылы белгіленеді.

Мысалы 2.6: Айталық,

$v =$ 

болсын, онда v ағашының симметриялық бөліктері

$u =$  $u' =$  .

Айталық $X = \{a_1, a_2, ...\}$ әріптер жиыны болсын (немесе әліпби) және $X_n = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ n әріптен тұратын және реттелген жиын болсын, яғни $a_1 < a_2 < ... < a_n$. Енді $u \in \mathbb{T}_n$ ағашының төбелерін X_n жиынының элементтерімен бояп шығайық және пайда болған жиынды $\mathbb{T}(X)_n$ арқылы белгілейік.

Базис ережесі немесе RCom ағаштарын толтыру ережесі:

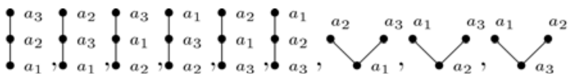
Айталық $t(\circ, x_1, x_2, ..., x_k)$ $x \in \mathbb{T}(X)_n$ ағашының кез келген симметриялық бөлігі болсын, онда

(1) $a_1 < a_2 < ... < a_k$, мұндағы a_i x_i-дің түбі, $1 \leq i \leq k$,

(2) қалған жағдайларда рет жоқ,

мұндағы $x_1, x_2, ..., x_k \in \mathbb{T}(X)$,

Мысалы 2.7: Айталық $\mathbb{T}_3$ және $X_3 = \{a_1, a_2, a_3\}$ болсын, онда

$\mathbb{T}(X)_3 = \{$  $\}$.

3. Әсер ету теоремасы.

Теорема 3.1: Кез келген $u_f \in F_n^{multi}$ және $\sigma \in S_n$ үшін

$$\sigma u_f = u_g$$

теңдігі орындалатындай g-толтыруы табылады және $u_g \in F_n^{multi}$.

Дәлелдеуі: Кез келген u_f элементін $u_f = a_n(...a_{k+3}(a_{k+2}((...((a_{k+1}a_1)a_2)a_3...)a_k))...)$ арқылы қарастыру жеткілікті. Енді u_f элементінің симметриялық және симметриялық емес бөліктерін бөліп алайық

$$\underbrace{a_n(...a_{k+3}(a_{k+2}((...((a_{k+1}}_{nonsym-part}\underbrace{a_1)a_2)a_3...)a_k}_{sym-part}))...).$$

S_n алмастыру тобы элементінің түбірлі ағашқа әсер етуінің үш жолын қарастырсақ жеткілікті:

1-жол: σ алмастыруы nsp(u_f) симметриялы емес бөлігіне әсер етеді

2-жол: σ алмастыруы sp(u_f) симметриялық бөлігіне әсер етеді

3-жол: σ алмастыруы nsp(u_f) симметриялық емес және sp(u_f) симметриялық бөліктеріне әсер етеді.

1-жол: Базис ережесі бойынша $u_g \in F_n^{multi}$, яғни симметриялық емес бөліктегі бояулардың орын алмастыруы базис ережесіне қайшы келмейді.

2-жол: Ыңғайлылық үшін u_f элементінің симметриялық бөлігін алу және кез келген $\sigma \in S_n$ алмастыруын $(i \quad i+1)$ транспозиция ретінде қарау дәлелдеуге жеткілікті, сондықтан

$$(i \quad i+1) : (...((\circ a_1)a_2)a_3...a_i)a_{i+1})...)a_k \mapsto (...((\circ a_1)a_2)a_3...a_{i+1})a_i)...)a_k.$$

Анықтылық үшін $x = (...((\circ a_1)a_2)a_3...)a_{i-1}, y = a_i, z = a_{i+1}$ деп алайық, онда

$$(...(xz)y)a_{i+2}...)a_k = |\text{RCom identity}| = (...(xy)z)a_{i+2}...)a_k,$$

яғни $u_g \in F_n^{multi}$ және $f = g$.

3-жол: 1 және 2-жолдар арқылы дәлелденеді.

4. Негізгі нәтижелер. Берілген u түбірлі ағашының u_1 және u_2 жапырақтары егіз деп аталады, егер олардың әкелері ортақ болса. Берілген ағаштың v төбесінің b', b'' ішкі ағаштары егіз деп аталады, егер $b' = b''$. Берілген $b_1, b_2, \ldots, b_k$ егіздері *еселігі k-ға тең қарапайым егіздер* деп аталады, егер $b_1 = b_2 = \cdots = b_k =$төбе.

Анықтама 4.1: Егер $u \in \mathbb{T}_n$ түбірлі ағашының әрбір төбесінің барлық ішкі ағаштары әртүрлі болса, онда u ағашы 0-асимметриялы деп аталады. Егер $u \in \mathbb{T}_n$ түбірлі ағашының әрбір төбесінің барлық қарапайым емес ішкі ағаштары әртүрлі болса, онда u ағашы 1-асимметриялы деп аталады. Егер $u \in \mathbb{T}_n$ түбірлі ағашының әрбір төбесінің барлық егіздерінің ұзындығы жұп болса, онда u ағашы супер деп аталады және мұндай ағаштар жиыны $super\mathbb{T}_n$ деп белгіленеді.

Төмендегі алгоритм бойынша $u \in \mathbb{T}_n$ түбірлі ағашының әрбір төбесін $\Omega = \{a_1, a_2, a_3, ...\}$, бояуларымен бояп шығайық:

- Егер әкесі ортақ екі төбе жапырақ болса, онда олар бір түспен боялады,
- Егер екі төбе бір түс болса, онда олар жапырақтар және әкелері ортақ.

Сондықтан әрбір $u \in \mathbb{T}_n$ 1-асимметриялы ағашқа оның бояуын сәйкес қоюға болады

$$color(u) = \{k_1 a_1, k_2 a_2, ...\},$$

мұндағы k_i u ағашындағы a_i бояуларының еселегі.

Анықтама 4.2: Берілген u 1-асимметриялы ағашының салмағы төмендегідей анықталады

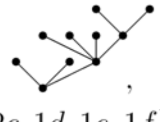
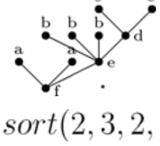
$$\omega(u) = \omega(\{k_1 a_1, k_2 a_2, ...\}) = sort(k_1, k_2, ...),$$

мұндағы $k_i\, a_i \in \Omega$ бояуының еселегі.

Мысалы 4.1: Кез келген $u \in \mathbb{T}_n$ 0-асимметриялы ағаштың салмағы төмендегі өрнекке тең

$$\omega(u) = \omega(\{a_1, a_2, ..., a_n\}) = (1, 1, ..., 1).$$

Мысалы 4.2: Айталық $\Omega = \{a, b, c, d, e, f\}$ және

$u =$  , $u =$ 

.

Сондықтан $\omega(u) = \omega(\{2a, 3b, 2c, 1d, 1e, 1f\}) = sort(2, 3, 2, 1, 1, 1) = (3, 2, 2, 1, 1, 1)$.

Теорема 4.1: Кез келген n үшін $F_n^{multi}(X)$ мульти-сызықты бөлігінің тривиал модульдер саны түбірлі ағаштар санына $|\mathbb{T}_n|$ тең.

Дәлелдеуі: Айталық M^u кеңістігі $u \in \mathbb{T}$ түбірлі ағашымен туындатылған векторлық кеңістік болсын. Диаграммасы $\lambda = (n) \vdash n$ болатын T стандартты Юнг таблицасын алайық және c_T Юнг симметризаторы болсын, толығырақ [5] жұмыстан көруге болады. Қандай да бір $u_f \in M^u$

элементін тіркейік. Мұнда M^u кеңістігінің барлық элементерін u_f элементіне кейбір $\sigma \in S_n$ алмастыруларымен әсер ету арқылы алуға болады, $\sigma \cdot u_f$. Сондықтан $c_T \cdot M^u \cong 1 \cdot S^{(n)}$, мұндағы $S^{(n)}$ диаграммасы (n) сәйкес келетін Шпехт модулі, толығырақ [8] жұмыстан көруге болады.

Теорема 4.2: Кез келген n үшін $F_n^{multi}(X)$ мульти-сызықты бөлігінің таңбасы айнымалы модульдер саны супер түбірлі ағаштар санына $|super\mathbb{T}_n|$ тең.

Дәлелдеуі: Айталық M^u кеңістігі $u \in \mathbb{T}$ түбірлі ағашымен туындатылған векторлық кеңістік болсын. Диаграммасы $\lambda = (1^n) \vdash n$ болатын T стандартты Юнг таблицасын алайық және c_T Юнг симметризаторы болсын. Қандай да бір $u_f \in M^u$ элементін тіркейік. Мұнда M^u кеңістігінің барлық элементері u_f элементіне кейбір $\sigma \in S_n$ алмастыруларымен әсер ету арқылы алынады, яғни $\sigma \cdot u_f$. Демек $c_T \cdot \sigma = \pm c_T$ екені айқын, сондықтан $c_T \cdot M^u \cong 1 \cdot S^{(1^n)}$ немесе $c_T \cdot M^u \cong 0 \cdot S^{(1^n)}$. Анықтылық үшін $u \in \mathbb{T}_n$ элементінің арнайы бір симметриялық бөлігін $t(\circ, kv)$ крастырайық , мұндағы $v \in asym\mathbb{T}$ және v өкіл, $|v| = l$. Енді, $t(\circ, kv)$ элементінің әрбір төбесін $\{1, 2, 3, ..., l(k-1), lk\}$ жиыны элементтерімен солдан оңға және төменнен жоғары қарай белгілеп шығайық. Пайда болған элементті $t(\circ, kv)'$ арқылы өрнектейік. Мұнда $t(\circ, kv)'$ элементінің симметриялық тобының туындатушылары төмендегідей анықталады

$$\sigma = (12)(k+1 \ \ k+2) \ \ ... \ \ ((l-1)k+1 \ \ (l-1)k+2),$$
$$\tau = (1 \ \ 2 \ \ ... \ \ k)(k+1 \ \ k+2 \ \ ... \ \ 2k) \ \ ... \ \ ((l-1)k+1 \ \ (l-1)k+2 \ \ ... \ \ lk)$$

және

$$Sym(t(\circ, kv)') = \langle \sigma, \tau \rangle.$$

Енді, $Sym(t(\circ, kv)')$ тобы элементтерінің таңбасын S_n тобындағындай анықтайық және v ішкі ағашының ұзындығы таңбаға әсер ететіні айқын. Егер $|v|$ тақ болса, онда $c_T \cdot M^u \cong 0$, ал егер $|v|$ жұп болса, онда $c_T \cdot M^u \cong 1 \cdot S^{(1^n)}$. Ал бұл супер түбірлі ағаштан туындатылған векторлық кеңістікте таңбасы айнымалы модульдердің саны 1-ге тең екенін көрсетеді.

Теорема 4.3: Айталық $\lambda \vdash n$ және u n төбеден тұратын 1-асимметриялы түбірлі ағаш болсын. Егер $\omega(u) = \lambda$, онда

$$M^u \cong M^\lambda,$$

мұндағы M^λ λ бөліктеуіне сәйкес келетін алмастыру модулі. M^λ алмастыру модулі жайлы $[7]$ жұмыстан көруге болады.

Дәлелдеуі: Айталық $u = \{t(\circ, k_1\bullet), t(\circ, k_2\bullet), ..., t(\circ, k_m\bullet), \underbrace{\bullet, ..., \bullet}_{i}\}$ және $\lambda = (l_1, l_2, ..., l_m, 1^j)$. Енді $[6]$ жұмыста көрсетілгендей u элементінің автоморфизмдер тобы төмендегідей анықталады

$$\Gamma(u) = S_{k_1} \cdot S_{k_2} \cdot ... \cdot S_{k_m} \cdot \underbrace{S_1 \cdot ... \cdot S_1}_{i}.$$

Сонымен $\Gamma(u)$ тобының циклдік индексін $[6]$ жұмыстағыдай есептейік

$$Z(\Gamma(u)) = Z(S_{k_1} \cdot S_{k_2} \cdot ... \cdot S_{k_m} \cdot S_1 \cdot ... \cdot S_1) = Z(S_{k_1}) \cdot Z(S_{k_2}) \cdot ... \cdot Z(S_{k_m}) \cdot Z(S_1) \cdot ... \cdot Z(S_1) =$$
$$= Z(S_{k_1}) \cdot Z(S_{k_2}) \cdot ... \cdot Z(S_{k_m}) \cdot Z(S_1)^i.$$

және λ бөліктеуінің циклдық индексін төмендегідей есептейік

$$\Gamma(\lambda) = S_{l_1} \cdot S_{l_2} \cdot ... \cdot S_{l_m} \cdot S_1 \cdot ... \cdot S_1.$$

Көріп тұрғанымыздай u ағашы мен λ бөліктеуінің автоморфизмдер тобы бірдей. Демек

$$Z(\Gamma(\lambda)) = Z(S_{l_1} \cdot S_{l_2} \cdot ... \cdot S_{l_m} \cdot S_1 \cdot ... \cdot S_1) = Z(S_{l_1}) \cdot Z(S_{l_2}) \cdot ... \cdot Z(S_{l_m}) \cdot Z(S_1) \cdot ... \cdot Z(S_1) =$$
$$= Z(S_{l_1}) \cdot Z(S_{l_2}) \cdot ... \cdot Z(S_{l_m}) \cdot Z(S_1)^j.$$

Енді теорема шартын ескерсек $\omega(u) = \lambda$, яғни $k_1 = l_1, k_2 = l_2, ..., k_m = l_m, i = j,$ онда біздер төмендегі тепе-теңдікті аламыз.

$$Z(\Gamma(u)) = Z(\Gamma(\lambda)).$$

Ал бұл $M^u \cong M^\lambda$ изоморфты екенін көрсетеді.

Мысалы 4.3: Айталық

$u =$ 

болсын, онда $\omega(u) = (3, 2, 2, 1, 1, 1)$ және $M^u \cong M^{(3,2,2,1,1,1)}$.

Салдары 4.1: Егер u n төбеден тұратын 0-асимметриялы түбірлі ағаш болса, онда

$$M^u \cong \mathbb{C}S_n,$$

мұндағы $\mathbb{C}S_n$ S_n тобының топтық алгебрасы.

Дәлелдеуі: Берілген u n төбеден тұратын 0-асимметриялы түбірлі ағашының салмағы (1^n) тең, сондықтан Теорема 4.3 бойынша $M^u \cong M^{(1^n)}$ және $[8]$ жұмыстан белгілі $M^{(1^n)} \cong \mathbb{C}S_n$.

Мысалы 4.4: Айталық $u \in \mathbb{T}_4$ және

$u =$

болсын, онда $\omega(u) = (1, 1, 1, 1) = (1^4)$ және $M^u \cong M^{(1^4)} \cong \mathbb{C}S_4$.

ӘДЕБИЕТ

[1] Bremner M., Classifying varieties of anti-commutative algebras, *Nova J. Math. Game Theory Algebra*, **1996**, 4 (2), 119-127.

[2] Dzhumadil'daev A.S., Löfwall C., Trees, Free Right-symmetric algebras, Free Novikov algebras and identities, *Homology, Homotopy and Applications*, **2002**, 4(2), 165-190.

[3] Dzhumadil'daev A.S., Ismailov N.A., Tulenbaev K.M., Free bicommuatative algebras, *Serdica Math. J.*, **2011**, 37 (1), 25-44.

[4] Dzhumadil'daev A.S., Ismailov N.A., S_n - and GL_n - module structures on free Novikov algebras, *Journal of Algebra*, **2014**, 416, 287-313.

[5] Fulton W., Harris J., Representation theory: A First Course, Graduate Texts in Mathematics, Springer Verlag New York, 1991. 551 p.

[6] Harary F., Palmer E.M., Graphical Enumeration, Academic Press, New York and London, 1973. 271 p.

[7] Kraśkiewicz W., Weynman L., Algebra of coinvariants and the action of a Coxeter element, *Bayreuth. Math. Schr.*, **2001**, 63, 265-284.

[8] Sagan B.E., The symmetric group: Representations, Combinatorial Algorithms, and Symmetric Functions, Graduate Texts in Mathematics, vol. 203, Springer Verlag, New York, 2001. 241 p.

REFERENCES

[1] Bremner M., Classifying varieties of anti-commutative algebras, *Nova J. Math. Game Theory Algebra*, **1996**, 4 (2), 119-127. (in Eng.)

[2] Dzhumadil'daev A.S., Löfwall C., Trees, Free Right-symmetric algebras, Free Novikov algebras and identities, *Homology, Homotopy and Applications*, **2002**, 4(2), 165-190. (in Eng.)

[3] Dzhumadil'daev A.S., Ismailov N.A., Tulenbaev K.M., Free bicommuatative algebras, *Serdica Math. J.*, **2011**, 37 (1), 25-44. (in Eng.)

[4] Dzhumadil'daev A.S., Ismailov N.A., S_n - and GL_n - module structures on free Novikov algebras, *Journal of Algebra*, **2014**, 416, 287-313. (in Eng.)

[5] Fulton W., Harris J., Representation theory: A First Course, Graduate Texts in Mathematics, Springer Verlag New York, 1991. 551 p. (in Eng.)

[6] Harary F., Palmer E.M., Graphical Enumeration, Academic Press, New York and London, 1973. 271 p. (in Eng.)

[7] Kraśkiewicz W., Weynman L., Algebra of coinvariants and the action of a Coxeter element, *Bayreuth. Math. Schr.*, **2001**, 63, 265-284. (in Eng.)

[8] Sagan B.E., The symmetric group: Representations, Combinatorial Algorithms, and Symmetric Functions, Graduate Texts in Mathematics, vol. 203, Springer Verlag, New York, 2001. 241 p. (in Eng.)

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ S_n НА НЕКОТОРЫХ КОРНЕВЫХ ДЕРЕВЬЯХ В СВОБОДНОЙ ПРАВО-КОММУТАТИВНОЙ АЛГЕБРЕ

Б. К. Жахаев

Университет им. Сулеймана Демиреля, Каскелен, Казахстан

Ключевые слова: свободная алгебра, мульти-линейная часть, тождество, неприводимый модуль, базис, корневые деревья, Юнг симметризатор, группа автоморфизмов, цикловой индекс, модуль перестановка.

Аннотация. Алгебра с тождеством $(a \cdot b) \cdot c = (a \cdot c) \cdot b$ называется право-коммутативной. В работе [2] базис право-коммутативной алгебры построен с помощью корневых деревьев. Исследование многообразий свободных алгебр приводят к исследованию мульти-линейой части свободной алгебры как S_n-модуль. Исследование на S_n-модулей это есть представления группы перестановок S_n. В теореме Машке сказано, что любая конечномерная *V G*-модуль разлагается на неприводимую $G-$подмодулей, где *V* конечномерное векторное пространство, *G* любая конечномерная группа. $\mathbb{C}S_n$ есть групповая алгебра группы S_n и S_n-модуль. Неприводимые S_n-подмодули в $\mathbb{C}S_n$ S_n-модулья называются модулем Шпехта. Размерность модуля Шпехта для разбиение $\lambda \vdash n$ в $\mathbb{C}S_n$ S_n-модуле равна количеству стандартных таблиц Юнга для разбиение $\lambda \vdash n$. Кратность модуля Шпехта для разбиение $\lambda \vdash n$ в $\mathbb{C}S_n$ S_n-модуле равна количеству стандартных таблиц Юнга для разбиение $\lambda \vdash n$. В этой статье рассматривается мульти-линейная часть $F_n^{multi}(X)$ свободной право-коммутативной алгебры $F(X)$ как S_n-модуль. Полностью описываются представления S_n на некоторых корневых деревьях. Иными словами описываются разложения на модули Шпехта.

Поступила 07.07.2015 г.

Publication Ethics and Publication Malpractice in the journals of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan

For information on Ethics in publishing and Ethical guidelines for journal publication see http://www.elsevier.com/publishingethics and http://www.elsevier.com/journal-authors/ethics.

Submission of an article to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan implies that the described work has not been published previously (except in the form of an abstract or as part of a published lecture or academic thesis or as an electronic preprint, see http://www.elsevier.com/postingpolicy), that it is not under consideration for publication elsewhere, that its publication is approved by all authors and tacitly or explicitly by the responsible authorities where the work was carried out, and that, if accepted, it will not be published elsewhere in the same form, in English or in any other language, including electronically without the written consent of the copyright-holder. In particular, translations into English of papers already published in another language are not accepted.

No other forms of scientific misconduct are allowed, such as plagiarism, falsification, fraudulent data, incorrect interpretation of other works, incorrect citations, etc. The National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan follows the Code of Conduct of the Committee on Publication Ethics (COPE), and follows the COPE Flowcharts for Resolving Cases of Suspected Misconduct (http://publicationethics.org/files/u2/New_Code.pdf). To verify originality, your article may be checked by the Cross Check originality detection service http://www.elsevier.com/editors/plagdetect.

The authors are obliged to participate in peer review process and be ready to provide corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. All authors of a paper should have significantly contributed to the research.

The reviewers should provide objective judgments and should point out relevant published works which are not yet cited. Reviewed articles should be treated confidentially. The reviewers will be chosen in such a way that there is no conflict of interests with respect to the research, the authors and/or the research funders.

The editors have complete responsibility and authority to reject or accept a paper, and they will only accept a paper when reasonably certain. They will preserve anonymity of reviewers and promote publication of corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. The acceptance of a paper automatically implies the copyright transfer to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.

The Editorial Board of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan will monitor and safeguard publishing ethics.

Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайте:

www:nauka-nanrk.kz

http://www.physics-mathematics.kz

Редактор *М. С. Ахметова*
Верстка на компьютере *Д. Н. Калкабековой*

Подписано в печать 14.07.2015.
Формат 60x881/8. Бумага офсетная. Печать – ризограф.
17,25 п.л. Тираж 300. Заказ 4.

Национальная академия наук РК
050010, Алматы, ул. Шевченко, 28, т. 272-13-18, 272-13-19