

<http://road.issn.org/issn/2518-1726>

ISSN 1991-346X

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ  
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ

# Х А Б А Р Л А Р Ы

---

---

## ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК  
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES  
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА  
СЕРИЯСЫ**



**СЕРИЯ**

**ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ**



**PHYSICO-MATHEMATICAL  
SERIES**

**5 (309)**

**ҚЫРКҮЙЕК – ҚАЗАН 2016 ж.  
СЕНТЯБРЬ – ОКТЯБРЬ 2016 г.  
SEPTEMBER – OCTOBER 2016**

1963 ЖЫЛДЫҢ ҚАҢТАР АЙЫНАН ШЫҒА БАСТАҒАН  
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1963 ГОДА  
PUBLISHED SINCE JANUARY 1963

ЖЫЛЫНА 6 РЕТ ШЫҒАДЫ  
ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД  
PUBLISHED 6 TIMES A YEAR

АЛМАТЫ, ҚР ҰҒА  
АЛМАТЫ, НАН РК  
ALMATY, NAS RK

## ҚР ҰҒА ХАБАРЛАРЫ. ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА СЕРИЯСЫ

Бас редакторы  
ф.-м.ғ.д., проф., ҚР ҰҒА академигі **Ғ.М. Мұтанов**

Р е д а к ц и я а л қ а с ы:

**Жұмаділдаев А.С.** проф., академик (Қазақстан)  
**Кальменов Т.Ш.** проф., академик (Қазақстан)  
**Жантаев Ж.Ш.** проф., корр.-мүшесі (Қазақстан)  
**Өмірбаев У.У.** проф. корр.-мүшесі (Қазақстан)  
**Жүсіпов М.А.** проф. (Қазақстан)  
**Жұмабаев Д.С.** проф. (Қазақстан)  
**Асанова А.Т.** проф. (Қазақстан)  
**Бошкаев К.А.** PhD докторы (Қазақстан)  
**Сұраған Д.** PhD докторы (Қазақстан)  
**Quevedo Hernando** проф. (Мексика),  
**Джунушалиев В.Д.** проф. (Қырғыстан)  
**Вишневский И.Н.** проф., академик (Украина)  
**Ковалев А.М.** проф., академик (Украина)  
**Михалевич А.А.** проф., академик (Белорус)  
**Пашаев А.** проф., академик (Әзірбайжан)  
**Такибаев Н.Ж.** проф., академик (Қазақстан), бас ред. орынбасары  
**Тигиняну И.** проф., академик (Молдова)

## ИЗВЕСТИЯ НАН РК. СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

Главный редактор  
д.ф.-м.н., проф. академик НАН РК **Г.М. Мутанов**

Редакционная коллегия:

**Джумадильдаев А.С.** проф., академик (Казахстан)  
**Кальменов Т.Ш.** проф., академик (Казахстан)  
**Жантаев Ж.Ш.** проф., чл.-корр. (Казахстан)  
**Умирбаев У.У.** проф. чл.-корр. (Казахстан)  
**Жусупов М.А.** проф. (Казахстан)  
**Джумабаев Д.С.** проф. (Казахстан)  
**Асанова А.Т.** проф. (Казахстан)  
**Бошкаев К.А.** доктор PhD (Казахстан)  
**Сураган Д.** доктор PhD (Казахстан)  
**Quevedo Hernando** проф. (Мексика),  
**Джунушалиев В.Д.** проф. (Кыргызстан)  
**Вишневский И.Н.** проф., академик (Украина)  
**Ковалев А.М.** проф., академик (Украина)  
**Михалевич А.А.** проф., академик (Беларусь)  
**Пашаев А.** проф., академик (Азербайджан)  
**Такибаев Н.Ж.** проф., академик (Казахстан), зам. гл. ред.  
**Тигиняну И.** проф., академик (Молдова)

«Известия НАН РК. Серия физико-математическая». ISSN 1991-346X

<http://road.issn.org/issn/2518-1726>

Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы)

Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации и архивов Министерства культуры и информации Республики Казахстан №5543-Ж, выданное 01.06.2006 г.

Периодичность: 6 раз в год.

Тираж: 300 экземпляров.

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, ком. 219, 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,  
[www.nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz](http://www.nauka-nanrk.kz/physics-mathematics.kz)

---

© Национальная академия наук Республики Казахстан, 2016

Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75.

**NEWS OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC  
OF KAZAKHSTAN. SERIES OF PHYSICS AND MATHEMATICS**

Editor in chief

doctor of physics and mathematics, professor, academician of NAS RK **G.M. Mutanov**

Editorial board:

**Dzhumadildayev A.S.** prof., academician (Kazakhstan)  
**Kalmenov T.Sh.** prof., academician (Kazakhstan)  
**Zhantayev Zh.Sh.** prof., corr. member. (Kazakhstan)  
**Umirbayev U.U.** prof. corr. member. (Kazakhstan)  
**Zhusupov M.A.** prof. (Kazakhstan)  
**Dzhumabayev D.S.** prof. (Kazakhstan)  
**Asanova A.T.** prof. (Kazakhstan)  
**Boshkayev K.A.** PhD (Kazakhstan)  
**Suragan D.** PhD (Kazakhstan)  
**Quevedo Hernando** prof. (Mexico),  
**Dzhunushaliyev V.D.** prof. (Kyrgyzstan)  
**Vishnevskiy I.N.** prof., academician (Ukraine)  
**Kovalev A.M.** prof., academician (Ukraine)  
**Mikhalevich A.A.** prof., academician (Belarus)  
**Pashayev A.** prof., academician (Azerbaijan)  
**Takibayev N.Zh.** prof., academician (Kazakhstan), deputy editor in chief.  
**Tiginyanu I.** prof., academician (Moldova)

**News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physical-mathematical series.**  
**ISSN 1991-346X**

<http://road.issn.org/issn/2518-1726>

Owner: RPA "National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan" (Almaty)

The certificate of registration of a periodic printed publication in the Committee of information and archives of the Ministry of culture and information of the Republic of Kazakhstan N 5543-Ж, issued 01.06.2006

Periodicity: 6 times a year

Circulation: 300 copies

Editorial address: 28, Shevchenko str., of. 219, 220, Almaty, 050010, tel. 272-13-19, 272-13-18,  
[www.nauka-nanrk.kz](http://www.nauka-nanrk.kz) / [physics-mathematics.kz](http://physics-mathematics.kz)

---

© National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, 2016

Address of printing house: ST "Aruna", 75, Muratbayev str, Almaty

**NEWS**

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES**

ISSN 1991-346X

Volume 5, Number 309 (2016), 168 – 175

**E.A. Bakirova, Zh.M. Kadirbayeva**

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling of MES RK, Almaty, Kazakhstan

[bakirova1974@mail.ru](mailto:bakirova1974@mail.ru), [apelman86pm@mail.ru](mailto:apelman86pm@mail.ru)

**ON A SOLVABILITY OF LINEAR MULTIPOINT BOUNDARY VALUE  
PROBLEM FOR THE LOADED DIFFERENTIAL EQUATIONS**

**Abstract.** A linear multipoint boundary value problem for the system of loaded differential equations is investigated on the basis of the parameterization method. The essence of the parameterization method is that segment is divided into parts by points of loading which the loaded differential equation is considered and initial problem is reduced to the equivalent boundary value problem with a parameter. The solution of the boundary value problem with parameter is defined as the limit of sequence of systems of pairs of parameter and function. Parameters are defined by the system of the linear algebraic equations, the system of the linear algebraic equations is determined by matrices of boundary conditions and the system of loaded differential equations and functions are solutions of the Cauchy problems at the found values of parameters. An algorithm for finding the solution of linear multipoint boundary value problem for systems of loaded differential equations is offered. The conditions of convergence of the offered algorithm providing existence and uniqueness of the solution of the considering problem are established. Sufficient conditions of unique solvability of a problem in terms of initial data are received.

**Keywords:** boundary value problem, parameterization method, loaded differential equation, algorithm.

УДК 517.956.3, 517.75

**Э.А. Бакирова, Ж.М. Кадирбаева**

Институт математики и математического моделирования МОН РК, Алматы, Казахстан

**О РАЗРЕШИМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ МНОГОТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ  
ЗАДАЧИ ДЛЯ НАГРУЖЕННЫХ  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

**Аннотация.** На основе метода параметризации исследуется линейная многоточечная краевая задача для системы нагруженных дифференциальных уравнений. Суть метода параметризации заключается в том, что отрезок, где рассматривается нагруженное дифференциальное уравнение разбивается на части точками нагружения и исходная задача сводится к эквивалентной краевой задаче с параметром. Решение краевой задачи с параметром определяется как предел последовательности систем пар параметра и функции. Параметры находятся из системы линейных алгебраических уравнений, определяемых по матрицам краевых условий и системы нагруженных дифференциальных уравнений, а функции являются решениями задач Коши при найденных значениях параметров. Предлагается алгоритм нахождения решения линейной многоточечной краевой задачи для систем нагруженных дифференциальных уравнений. Устанавливаются условия сходимости предложенного алгоритма, обеспечивающие существование и единственность решения исследуемой задачи. Получены достаточные условия однозначной разрешимости задачи в терминах исходных данных.

**Ключевые слова:** краевая задача, метод параметризации, нагруженное дифференциальное уравнение, алгоритм.

Теория краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений является одной из актуальных и активно развивающихся областей качественной теории дифференциальных

уравнений и прикладной математики. В последние годы наблюдается интенсивное исследование нагруженных дифференциальных уравнений, связанное с различными приложениями задач, ассоциированных с нагруженными уравнениями. К задачам приложений, описываемых этими уравнениями, относятся задача долгосрочного прогнозирования и регулирования уровня грунтовых вод и почвенной влаги [1-5], моделирования процессов переноса частиц, некоторые задачи оптимального управления [4,5]. Отметим, что нагруженные дифференциальные уравнения описывают процессы с последствием, в которых состояние процесса в какой-либо точке и в какой-либо момент может оказывать влияние на весь процесс в целом [2].

В работах [6-9] предложен численный метод решения систем линейных неавтономных обыкновенных нагруженных дифференциальных уравнений с неразделенными многоточечными интегральными условиями. Метод основан на операции свертывания интегральных условий в локальные, что позволяет свести решение исходной задачи к решению задачи Коши относительно систем обыкновенных дифференциальных уравнений и линейных алгебраических уравнений.

В настоящей работе рассматривается линейная многоточечная краевая задача для системы нагруженных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A_0(t)x + \sum_{i=1}^m A_i(t)x(\theta_i) + f(t), \quad t \in (0, T), \quad x \in R^n, \quad (1)$$

$$\sum_{j=0}^{m+1} B_j x(\theta_j) = d, \quad d \in R^n, \quad (2)$$

где матрицы  $A_i(t)$ ,  $i = \overline{0, m}$ , размерности  $(n \times n)$  и  $n$ -вектор-функция  $f(t)$  непрерывны на  $[0, T]$ ,  $B_j$ ,  $j = \overline{0, m+1}$  – постоянные матрицы размерности  $(n \times n)$ ,

$$0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_m < \theta_{m+1} = T, \quad \|x\| = \max_{i=1, n} |x_i|, \quad \|A(t)\| = \max_{i=1, n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}(t)|.$$

Через  $C([0, T], R^n)$  обозначим пространство непрерывных функций  $x: [0, T] \rightarrow R^n$  с нормой  $\|x\|_1 = \max_{t \in [0, T]} \|x(t)\|$ .

Решением задачи (1), (2) называется непрерывно дифференцируемая на  $[0, T]$  вектор-функция  $x^*(t) \in C([0, T], R^n)$ , удовлетворяющая на  $[0, T]$  системе нагруженных дифференциальных уравнений (1) (при этом в точках  $t = 0$ ,  $t = T$  системе (1) удовлетворяют односторонние производные  $\dot{x}_{np}^*(0)$ ,  $\dot{x}_{лев}^*(T)$ ) и для  $x^*(\theta_j)$ ,  $j = \overline{0, m+1}$  справедливо равенство (2).

Пусть  $\Phi(t)$  – фундаментальная матрица решений однородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений  $\frac{dx}{dt} = A_0(t)x$  и  $\Phi(0) = I$ , где  $I$  – единичная матрица размерности  $(n \times n)$ .

Тогда решение системы (1) можно записать в виде

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \Phi(t) \int_0^t \Phi^{-1}(\tau) \left[ \sum_{i=1}^m A_i(\tau)x(\theta_i) + f(\tau) \right] d\tau, \quad t \in [0, T] \quad (3)$$

Найдя из представления (3) значения функции  $x(t)$  в точках  $t = \theta_j$ ,  $j = \overline{0, m+1}$  и подставив в многоточечное условие (2) получим:

$$\left[ B_0 + \sum_{i=1}^{m+1} B_i \Phi(\theta_i) \right] x(0) + \sum_{i=1}^{m+1} B_i \Phi(\theta_i) \int_0^{\theta_i} \Phi^{-1}(\tau) \left[ \sum_{i=1}^m A_i(\tau)x(\theta_i) + f(\tau) \right] d\tau = d. \quad (4)$$

Здесь учтено, что  $\theta_0 = 0$ ,  $\Phi(0) = I$ .

Предположим, что матрица  $B_0 + \sum_{i=1}^{m+1} B_i \Phi(\theta_i)$  обратима. Тогда начальная функция  $x(0)$  определяется единственным образом из соотношения (4):

$$x(0) = \left[ B_0 + \sum_{i=1}^{m+1} B_i \Phi(\theta_i) \right]^{-1} \left\{ d - \sum_{i=1}^{m+1} B_i \Phi(\theta_i) \int_0^{\theta_i} \Phi^{-1}(\tau) \left[ \sum_{i=1}^m A_i(\tau) x(\theta_i) + f(\tau) \right] d\tau \right\}.$$

Таким образом, решение краевой задачи (1), (2) имеет вид

$$x(t) = \Phi(t) \left[ B_0 + \sum_{i=1}^{m+1} B_i \Phi(\theta_i) \right]^{-1} \left\{ d - \sum_{i=1}^{m+1} B_i \Phi(\theta_i) \int_0^{\theta_i} \Phi^{-1}(\tau) \left[ \sum_{i=1}^m A_i(\tau) x(\theta_i) + f(\tau) \right] d\tau \right\} + \Phi(t) \int_0^t \Phi^{-1}(\tau) \left[ \sum_{i=1}^m A_i(\tau) x(\theta_i) + f(\tau) \right] d\tau,$$

при условии, что матрица  $B_0 + \sum_{i=1}^{m+1} B_i \Phi(\theta_i)$  обратима.

Так как фундаментальную матрицу решений  $\Phi(t)$  удастся построить в очень редких случаях, возникает необходимость в получении коэффициентных условий разрешимости задачи (1), (2) и построения алгоритмов нахождения ее решений. Ранее в работах Д.С.Джумабаева [10, 11] был разработан метод параметризации для исследования и решения двухточечных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод параметризации позволил установить необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости рассматриваемой задачи в терминах исходных данных. На основе этого метода были предложены двухпараметрические семейства алгоритмов нахождения решений двухточечных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, условия осуществимости и сходимости которых одновременно обеспечивают существование единственного решения исследуемой задачи.

В работах [12-14] метод параметризации развит на многоточечные краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, установлены эффективные условия разрешимости и построены конструктивные алгоритмы нахождения решения. Ранее в работах [15-20] на основе метода параметризации найдены коэффициентные признаки однозначной разрешимости линейной двухточечной краевой задачи для систем нагруженных дифференциальных уравнений и построены алгоритмы нахождения решения этой задачи.

В данной работе метод параметризации развивается на линейную многоточечную краевую задачу для системы нагруженных дифференциальных уравнений (1), (2). По схеме метода параметризации предлагаются алгоритмы построения приближенных решений рассматриваемой задачи. Устанавливаются достаточные условия осуществимости и сходимости предложенных алгоритмов, а также существования единственного решения многоточечной краевой задачи для системы нагруженных дифференциальных уравнений (1), (2). Одним из основных условий однозначной разрешимости исследуемой задачи является обратимость специальной матрицы, составляемой по данным задачи.

Краевую задачу (1), (2) исследуем методом параметризации. Интервал  $[0, T]$  разбиваем на части точками нагружения:  $[0, T) = \bigcup_{r=1}^{m+1} [\theta_{r-1}, \theta_r)$ .

Введем пространство  $C([0, T], \theta, R^{n(m+1)})$  систем функций  $x[t] = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_{m+1}(t))$ , где функции  $x_r(t)$ ,  $r = \overline{1, m+1}$ , непрерывны на  $[\theta_{r-1}, \theta_r)$  и имеют конечные левосторонние пределы

$$\lim_{t \rightarrow \theta_r - 0} x_r(t), \quad r = \overline{1, m+1}, \quad \text{с нормой } \|x[\cdot]\|_2 = \max_{r=1, m+1} \sup_{t \in [\theta_{r-1}, \theta_r)} \|x_r(t)\|.$$

Сужение вектор-функции  $x(t)$  на  $r$ -ый интервал  $[\theta_{r-1}, \theta_r)$  обозначим через  $x_r(t)$ , т.е.  $x_r(t) = x(t)$  при  $t \in [\theta_{r-1}, \theta_r)$ ,  $r = \overline{1, m+1}$ . При этом задача (1), (2) сведется к эквивалентной многоточечной краевой задаче для нагруженных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_r}{dt} = A_0(t)x_r + \sum_{j=1}^m A_j(t)x_{j+1}(\theta_j) + f(t), \quad t \in [\theta_{r-1}, \theta_r), \quad r = \overline{1, m+1}, \tag{5}$$

$$\sum_{j=0}^m B_j x_{j+1}(\theta_j) + B_{m+1} \lim_{t \rightarrow T-0} x_{m+1}(t) = d, \tag{6}$$

$$\lim_{t \rightarrow \theta_p-0} x_p(t) = x_{p+1}(\theta_p), \quad p = \overline{1, m}. \tag{7}$$

Здесь равенства (7) являются условиями склеивания или непрерывности решения в точках нагрузки.

Решением задачи (5)–(7) является система функций  $x^*[t] = (x_1^*(t), x_2^*(t), \dots, x_{m+1}^*(t)) \in C([0, T], \theta, R^{n(m+1)})$ , где непрерывно дифференцируемая и ограниченная на  $[\theta_{r-1}, \theta_r)$  функция  $x_r^*(t)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению (5) при всех  $t \in [\theta_{r-1}, \theta_r)$ ,  $r = \overline{1, m+1}$  (при  $t = \theta_{r-1}$  уравнению (5) удовлетворяет правосторонняя производная функции  $x_r^*(t)$ ), имеют место равенства (6), (7).

Если  $x^*(t)$  – решение задачи (1), (2), то система функций  $x^*[t] = (x_1^*(t), x_2^*(t), \dots, x_{m+1}^*(t)) \in C([0, T], \theta, R^{n(m+1)})$ , где  $x_r^*(t)$  – сужение функции  $x^*(t)$  на интервал  $[\theta_{r-1}, \theta_r)$ ,  $r = \overline{1, m+1}$ ,  $\lim_{t \rightarrow T-0} x_{m+1}^*(t) = x^*(T)$ , является решением задачи (5)–(7). И, наоборот, если система функций  $\tilde{x}[t] = (\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t), \dots, \tilde{x}_{m+1}(t)) \in C([0, T], \theta, R^{n(m+1)})$ , является решением задачи (5)–(7), то функция  $\tilde{x}(t)$ , определяемая равенствами  $\tilde{x}(t) = \tilde{x}_r(t)$ ,  $t \in [\theta_{r-1}, \theta_r)$ ,  $r = \overline{1, m+1}$ ,  $\tilde{x}(T) = \lim_{t \rightarrow T-0} \tilde{x}_{m+1}(t)$  будет решением задачи (1), (2).

Введем параметры  $\lambda_r = x_r(\theta_{r-1})$ ,  $r = \overline{1, m+1}$ , и на каждом интервале  $[\theta_{r-1}, \theta_r)$  произведем замену  $u_r(t) = x_r(t) - \lambda_r$ ,  $r = \overline{1, m+1}$ . Введение дополнительных параметров позволяет получить начальные данные. Тогда получим эквивалентную краевую задачу с параметрами

$$\frac{du_r}{dt} = A_0(t)(u_r + \lambda_r) + \sum_{j=1}^m A_j(t)\lambda_{j+1} + f(t), \quad t \in [\theta_{r-1}, \theta_r), \tag{8}$$

$$u_r(\theta_{r-1}) = 0, \quad r = \overline{1, m+1}, \tag{9}$$

$$\sum_{j=0}^m B_j \lambda_{j+1} + B_{m+1} \lambda_{m+1} + B_{m+1} \lim_{t \rightarrow T-0} u_{m+1}(t) = d, \tag{10}$$

$$\lambda_p + \lim_{t \rightarrow \theta_p-0} u_p(t) = \lambda_{p+1}, \quad p = \overline{1, m}. \tag{11}$$

Решением задачи (8)–(11) является пара  $(\lambda, u[t])$  с элементами  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m+1}) \in R^{n(m+1)}$ ,  $u[t] = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_{m+1}(t)) \in C([0, T], \theta, R^{n(m+1)})$ , где функции  $u_r(t)$  непрерывно дифференцируемы на  $[\theta_{r-1}, \theta_r)$ ,  $r = \overline{1, m+1}$ , и при  $\lambda_r = \lambda_r^*$  удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений (8) и условиям (9)–(11).

Задачи (1), (2) и (8)–(11) эквивалентны. Если пара  $(\tilde{\lambda}, \tilde{u}[t])$ , где  $\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \dots, \tilde{\lambda}_{m+1}) \in R^{n(m+1)}$ ,  $\tilde{u}[t] = (\tilde{u}_1(t), \tilde{u}_2(t), \dots, \tilde{u}_{m+1}(t)) \in C([0, T], \theta, R^{n(m+1)})$  – решение задачи (8)–(11), то функция  $\tilde{x}(t)$  определяемая равенствами  $\tilde{x}(t) = \tilde{\lambda}_r + \tilde{u}_r(t)$ ,  $t \in [\theta_{r-1}, \theta_r)$ ,  $r = \overline{1, m+1}$ ,



$\tilde{x}(T) = \tilde{\lambda}_{m+1} + \lim_{t \rightarrow T-0} \tilde{u}_{m+1}(t)$  будет решением исходной задачи (1), (2). И наоборот, если функция  $x(t)$  является решением задачи (1), (2), то пара  $(\lambda, u[t])$  где  $\lambda = (x(\theta_0), x(\theta_1), \dots, x(\theta_m))$ ,  $u[t] = (x(t) - x(\theta_0), x(t) - x(\theta_1), \dots, x(t) - x(\theta_m))$ , будет решением задачи (8)–(11).

Появление начальных условий  $u_r(\theta_{r-1}) = 0$ ,  $r = \overline{1, m+1}$ , позволяют при фиксированных  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m+1})$  определить функции  $u_r(t)$ ,  $r = \overline{1, m+1}$ , из интегральных уравнений Вольтерра второго рода:

$$u_r(t) = \int_{\theta_{r-1}}^t A_0(\tau)[u_r(\tau) + \lambda_r]d\tau + \int_{\theta_{r-1}}^t \left[ \sum_{j=1}^m A_j(\tau)\lambda_{j+1} + f(\tau) \right] d\tau, \quad t \in [\theta_{r-1}, \theta_r), \quad r = \overline{1, m+1}. \quad (12)$$

В уравнении (12) вместо  $u_r(\tau)$ ,  $r = \overline{1, m+1}$ , подставляя соответствующую правую часть и повторив этот процесс  $\nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots$ ) раз, получим представление функции  $u_r(t)$ ,  $r = \overline{1, m+1}$ , вида:

$$u_r(t) = D_{\nu,r}^0(t)\lambda_r + \sum_{j=1}^m D_{\nu,r}^j(t)\lambda_{j+1} + F_{\nu,r}(t) + G_{\nu,r}(u, t), \quad t \in [\theta_{r-1}, \theta_r), \quad r = \overline{1, m+1}, \quad (13)$$

где

$$D_{\nu,r}^j(t) = \int_{\theta_{r-1}}^t A_j(\tau_1)d\tau_1 + \dots + \int_{\theta_{r-1}}^t A_0(\tau_1) \dots \int_{\theta_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}} A_0(\tau_{\nu-1}) \int_{\theta_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} A_j(\tau_\nu)d\tau_\nu \dots d\tau_1, \quad j = \overline{0, m},$$

$$F_{\nu,r}(t) = \int_{\theta_{r-1}}^t f(\tau_1)d\tau_1 + \int_{\theta_{r-1}}^t A_0(\tau_1) \int_{\theta_{r-1}}^{\tau_1} f(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1 + \dots + \int_{\theta_{r-1}}^t A_0(\tau_1) \dots \int_{\theta_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}} A_0(\tau_{\nu-1}) \int_{\theta_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu)d\tau_\nu \dots d\tau_1,$$

$$G_{\nu,r}(u, t) = \int_{\theta_{r-1}}^t A_0(\tau_1) \dots \int_{\theta_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}} A_0(\tau_{\nu-1}) \int_{\theta_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} A_0(\tau_\nu) u_r(\tau_\nu) d\tau_\nu \dots d\tau_1, \quad r = \overline{1, m+1}.$$

Переходя в правой части (13) к пределу при  $t \rightarrow \theta_r - 0$ , и подставив соответствующие им выражения в условия (10), (11), получим систему уравнений относительно неизвестных параметров  $\lambda_r$ ,  $r = \overline{1, m+1}$ :

$$\sum_{j=0}^m B_j \lambda_{j+1} + B_{m+1} [I + D_{\nu, m+1}^0(T)] \lambda_{m+1} + B_{m+1} \sum_{j=1}^m D_{\nu, m+1}^j(T) \lambda_{j+1} =$$

$$= d - B_{m+1} F_{\nu, m+1}(T) - B_{m+1} G_{\nu, m+1}(u_{m+1}, T), \quad (14)$$

$$[I + D_{\nu, p}^0(\theta_p)] \lambda_p + \sum_{j=1}^m D_{\nu, p}^j(\theta_p) \lambda_{j+1} - \lambda_{p+1} = -F_{\nu, p}(\theta_p) - G_{\nu, p}(u_p, \theta_p), \quad p = \overline{1, m}. \quad (15)$$

где  $I$  - единичная матрица размерности  $(n \times n)$ . Обозначив через  $Q_\nu(\theta)$  матрицу, соответствующей левой части системы (14), (15) и введя векторы

$$F_\nu(\theta) = (-d + B_{m+1} F_{\nu, m+1}(T), F_{\nu, 1}(\theta_1), F_{\nu, 2}(\theta_2), \dots, F_{\nu, m}(\theta_m)),$$

$$G_\nu(u, \theta) = (B_{m+1} G_{\nu, m+1}(u_{m+1}, T), G_{\nu, 1}(u_1, \theta_1), G_{\nu, 2}(u_2, \theta_2), \dots, G_{\nu, m}(u_m, \theta_m))$$

запишем ее в виде

$$Q_\nu(\theta)\lambda = -F_\nu(\theta) - G_\nu(u, \theta), \quad \lambda \in R^{n(m+1)}. \quad (16)$$

Таким образом, для нахождения неизвестной пары  $(\lambda, u[t])$  имеем замкнутую систему уравнений (12), (16).

Применяя метод последовательных приближений найдем решение краевой задачи (8) – (11) и соответственно эквивалентной краевой задачи (1), (2). В этом и заключается суть метода параметризации.

Пара  $(\lambda, u[t])$  – решение задачи (8)–(11), находится как предел последовательности пар  $(\lambda^{(k)}, u^{(k)}[t])$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , определяемой по следующему алгоритму:

0-шаг. а) Предполагая, что при выбранном  $\nu \in N$  матрица  $Q_\nu(\theta)$  обратима, начальное приближение по параметру  $\lambda^{(0)} = (\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_{m+1}^{(0)}) \in R^{n(m+1)}$  определим из уравнения  $Q_\nu(\theta)\lambda = -F_\nu(\theta)$ , т.е.  $\lambda^{(0)} = -[Q_\nu(\theta)]^{-1} F_\nu(\theta)$ . б) Используя компоненты вектора  $\lambda^{(0)} \in R^{n(m+1)}$  и решая задачу Коши (8), (9) при  $\lambda_r = \lambda_r^{(0)}$ ,  $r = \overline{1, m+1}$ , на интервалах  $t \in [\theta_{r-1}, \theta_r)$ ,  $r = \overline{1, m+1}$  находим функции  $u_r^{(0)}(t)$ ,  $r = \overline{1, m+1}$ .

1-шаг. а) Подставляя найденные  $u_r^{(0)}(t)$ ,  $r = \overline{1, m+1}$  в правую часть (16), из уравнения  $Q_\nu(\theta)\lambda = -F_\nu(\theta) - G_\nu(u^{(0)}, \theta)$  определим  $\lambda^{(1)} = (\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, \dots, \lambda_{m+1}^{(1)}) \in R^{n(m+1)}$ . б) На отрезках  $t \in [\theta_{r-1}, \theta_r)$ ,  $r = \overline{1, m+1}$  решая задачу Коши (8), (9) при  $\lambda_r = \lambda_r^{(1)}$ ,  $r = \overline{1, m+1}$ , находим функции  $u_r^{(1)}(t)$ ,  $r = \overline{1, m+1}$ . И т.д.

Продолжая процесс, на  $k$ -ом шаге получаем систему пар  $(\lambda^{(k)}, u^{(k)}[t])$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Отметим, что в пункте б) при фиксированных значениях параметра  $\lambda_k$ ,  $r = \overline{1, m+1}$ , решение задачи Коши находится отдельно на каждом интервале  $t \in [\theta_{r-1}, \theta_r)$ ,  $r = \overline{1, m+1}$ .

Достаточные условия сходимости алгоритма, существования единственного решения задачи (1), (2) дает следующая теорема:

**Теорема.** Пусть при некотором  $\nu \in N$  матрица  $Q_\nu(\theta): R^{n(m+1)} \rightarrow R^{n(m+1)}$  обратима и выполняются неравенства:

$$\|[Q_\nu(\theta)]^{-1}\| \leq \gamma_\nu(\theta), \tag{17}$$

$$q_\nu(\theta) = \gamma_\nu(\theta) \max[1, \|B_{m+1}\|] \left\{ e^{\alpha_0 h} - \sum_{i=0}^{\nu} \frac{(\alpha_0 h)^i}{i!} + h \sum_{j=1}^m \alpha_j \left[ e^{\alpha_0 h} - \sum_{i=0}^{\nu-1} \frac{(\alpha_0 h)^i}{i!} \right] \right\} < 1, \tag{18}$$

где  $h = \max_{r=\overline{1, m+1}}(\theta_r - \theta_{r-1})$ ,  $\|A_i(t)\| \leq \alpha_i$ ,  $i = \overline{0, m}$ .

Тогда линейная многоточечная краевая задача для нагруженных дифференциальных уравнений (1), (2) имеет единственное решение.

Пример. На  $[0, 1]$  рассматривается линейная многоточечная краевая задача для нагруженных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ t/4 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1/8 & 0 \\ 0 & t/16 \end{pmatrix} x(1/2) + f(t), \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x(0) + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x\left(\frac{1}{2}\right) + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x(1) &= d. \end{aligned}$$

Отрезок  $[0, 1]$  делим на две части:  $[0, 1] = [0, 1/2) \cup [1/2, 1]$ , вводя дополнительные параметры  $\lambda_1 = x(0)$ ,  $\lambda_2 = x_2(1/2)$ , переходим к эквивалентной краевой задаче с параметрами

$$\begin{aligned} \frac{du_r}{dt} &= \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ t/4 & 0 \end{pmatrix} [u_r + \lambda_r] + \begin{pmatrix} 1/8 & 0 \\ 0 & t/16 \end{pmatrix} \lambda_2 + f(t), \quad r = \overline{1, 2}, \\ u_1(0) &= 0, \quad u_2(1/2) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \lambda_1 + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \lambda_2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \lambda_2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \lim_{t \rightarrow T-0} u_2(t) = d,$$

$$\lambda_1 + \lim_{t \rightarrow \theta_1-0} u_1(t) = \lambda_2.$$

При  $\nu = 1$  матрица  $Q_1(\theta)$  имеет вид

$$Q_1(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3.0625 & 1.25 \\ 0 & 1 & 0.1875 & 3.0469 \\ 1 & 0.25 & -0.9375 & 0 \\ 0.0312 & 1 & 0 & -0.9922 \end{pmatrix}.$$

Матрица  $Q_1(\theta)$  обратима и

$$[Q_1(\theta)]^{-1} = \begin{pmatrix} 0.24056 & -0.12122 & 0.7616 & -0.06918 \\ -0.01728 & 0.25137 & -0.00617 & 0.75017 \\ 0.25199 & -0.06227 & -0.25594 & 0.12625 \\ -0.00984 & 0.24953 & 0.01777 & -0.25398 \end{pmatrix}$$

Проверим выполнение условия теоремы:

$$\|[Q_1(\theta)]^{-1}\| \leq 1.1925,$$

$$q_1(\theta) = 1.1925 \cdot \max[1, \|B_2\| [e^{0.25} - 1 - 0.25 + 0.125 \cdot 0.5 \cdot (e^{0.25} - 1)]] = 0.1235 < 1.$$

Таким образом, все условия теоремы выполнены и задача имеет единственное решение.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Нахушев А.М. Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложения к динамике почвенной влаги грунтовых вод // Дифференц. Уравнения, 1982. - Т. 18. -№1. - С. 72-81.
- [2] Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их применение. -М.: Наука, 2012. -232 с.
- [3] Джаналиев М.Т., Рамазанов М.И. Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений. - Алматы: Ғылым, 2010. -334 с.
- [4] Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. -М:Высшая школа,1995.– 205с.
- [5] Нахушев А.М. Краевые задачи для нагруженных интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа и некоторые их приложения к прогнозу почвенной влаги // Дифференц. Уравнения. -1979. - Т. 15, № 1. - С. 96-105.
- [6] Абдуллаев В.М., Айда-заде К.Р. О численном решении нагруженных дифференциальных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. - 2004. - Т. 44. -№9. - С. 1585-1595.
- [7] Абдуллаев В.М., Айда-заде К.Р. О численном решении задач оптимального управления с неразделенными многоточечными и интегральными условиями // Ж. вычисл. матем. и математической физики. - 2012. - Т.52. -№12. - С. 2163-2177.
- [8] Абдуллаев В.М., Айда-заде К.Р. Численный метод решения нагруженных нелокальных граничных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. - 2014. - Т.54, №7. -С. 1096-1109.
- [9] Aida-zade K.R., Abdullaev V.M. On Numerical Solution to Loaded Systems of Ordinary Differential Equations with Non-separated Multipoint and Integral Conditions // Numerical Analysis and Applications. - 2014. - Vol. 17, № 1. - P. 1-16.
- [10] Джумабаев Д.С. Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. - 1989. - Т.29. -№1. -С. 50-66.
- [11] Джумабаев Д.С. Аппроксимация задачи нахождения ограниченного решения двухточечными краевыми задачами // Дифференц. Уравнения. -1987. -Т. 23, № 12. – С. 2188-2189.
- [12] Джумабаев Д.С., Иманчиев А.Е. Корректная разрешимость линейной многоточечной краевой задачи // Математический журнал. - 2005. - Т.5, №1. - С. 30-38.
- [13] Иманчиев А.Е. Необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости линейной многоточечной краевой задачи // Известия МОН РК, НАН РК. Серия физико-математическая. - 2002. -№3. - С.79-84.
- [14] Иманчиев А.Е. О существовании изолированного решения нелинейной многоточечной краевой задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Материалы V-международной научной конференции "Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры", Актюбе, 9-10 октября 2009, С. 64-66.
- [15] Бакирова Э.А. О признаке однозначной разрешимости двухточечной краевой задачи для системы нагруженных дифференциальных уравнений // Известия НАН РК. Сер. физ-матем. - 2005. - №1. -С. 95-102.
- [16] Бакирова Э.А. О необходимых и достаточных условиях однозначной разрешимости двухточечной краевой задачи для нагруженных дифференциальных уравнений // Математический журнал. - 2005. -Т. 5, № 3. - С. 25-34.
- [17] Кадирбаева Ж.М. Об одном алгоритме нахождения решения линейной двухточечной краевой задачи для нагруженных дифференциальных уравнений // Матем. журнал МОН РК. - 2009. - Т. 9. -№2. - С. 64-70.
- [18] Кадирбаева Ж.М. Об однозначной и кор-ректной разрешимости ли-нейной двухточечной крае-вой задачи для нагруженных дифференциальных уравнений // Математический журнал. - Алматы, 2009. Т. 9, № 4. -С. 63-71.
- [19] Akzhigitov E.A., Kadirbayeva Zh.M. On a solvability of two-point boundary value problem for loaded differential equations // Science review. S.Seifullin Kazakh Agro Technical University. - 2012. - № 2(10). -С. 35-40.

[20] Джумабаев Д.С., Илиясова Г.Б. Об одной численной реализации метода параметризации решения линейной краевой задачи для нагруженного дифференциального уравнений // Известия НАН РК. Серия физико-математическая. - 2014. - № 2. - С. 275-280.

## REFERENCES

- [1] Nakhushhev A.M. On an approximate method of solving boundary value problems for differential equations and its applications to the dynamics of soil moisture groundwater. *Differential equations*, **1982**, 18, 1, 72-81 (in Russ.).
- [2] Nakhushhev A.M. Loaded equations and their applications. M.: Science, **2012**. 232 p. (in Russ.).
- [3] Dzhemaliev M.T., Ramazanov M.I. Loaded equation as a perturbation of differential equations. Almaty: Science, **2010**. 334 p. (in Russ.).
- [4] Nakhushhev A.M. Equations of mathematical biology. M.: Vishaya Shkola, **1995**. 205 p. (in Russ.).
- [5] Nakhushhev A.M. Boundary value problems for loaded integro-differential equations of hyperbolic type and some of their applications to the forecast of soil moisture. *Differential equations*, **1979**, 15, 1, 96-105 (in Russ.).
- [6] Abdullaev V.M., Aida-zade K.R. On a numerical solution of loaded differential equations. *Journal of Computational Mathematics and mathematical physics*, **2004**, 44, 9, 1585-1595 (in Russ.).
- [7] Abdullaev V.M., Aida-zade K.R. Numerical solution of optimal control problems with unseparated multipoint and integral conditions. *Journal of Computational Mathematics and mathematical physics*, **2012**, 52, 12, 2163-2177 (in Russ.).
- [8] Abdullaev V.M., Aida-zade K.R. Numerical method of solution to loaded nonlocal boundary value problems for ordinary differential equations. *Journal of Computational Mathematics and mathematical physics*, **2014**, 54, 7, 1096-1109 (in Russ.).
- [9] Aida-zade K.R., Abdullaev V.M. On Numerical Solution to Loaded Systems of Ordinary Differential Equations with Non-separated Multipoint and Integral Conditions. *Numerical Analysis and Applications*, **2014**, 17, 1, 1-16 (in Eng.).
- [10] Dzhumabaev D.S. Criteria of the unique solvability of a linear boundary value problem for ordinary differential equation. *Journal of Computational Mathematics and mathematical physics*, **1989**, 29, 1, 50-66 (in Russ.).
- [11] Dzhumabaev D.S. Approximation of problem of finding a bounded solution by two-point boundary value problems. *Differential equations*, **1987**, 23, 12, 2188-2189 (in Russ.).
- [12] Dzhumabaev D.S., Imanchiev A.E. Correct solvability of linear multipoint boundary value problem. *Mathematical Journal*, **2005**, 5, 1, 30-38 (in Russ.).
- [13] Imanchiev A.E. Necessary and sufficient conditions of the unique solvability of linear multi-point boundary value problem. *Izvestia NAS RK. Seria phys.-math.*, **2002**, 3, 79-84 (in Russ.).
- [14] Imanchiev A.E. On an existence of isolated solution of the nonlinear multi-point boundary value problem for systems of ordinary differential equations. *Proceedings of the V-international scientific conference "Problems of differential equations, analysis and algebra"*, **2009**, 64-66 (in Russ.).
- [15] Bakirova E.A. On a criterion of the unique solvability of a two-point boundary value problem for loaded differential equations. *Izvestia NAS RK. Seria phys.-math.*, **2005**, 1, 95-102 (in Russ.).
- [16] Bakirova E.A. On necessary and sufficient conditions of the unique solvability of a two-point boundary value problem for loaded differential equations. *Mathematical Journal*, **2005**, 5, 3, 25-34 (in Russ.).
- [17] Kadirbayeva Zh.M. On one algorithm of finding solution of linear two-point boundary value problem for loaded differential equations. *Mathematical Journal*, **2009**, 9, 2, 64-70 (in Russ.).
- [18] Kadirbayeva Zh.M. On the unique and correct solvability of a linear two-point boundary value problem for loaded differential equations. *Mathematical Journal*, **2009**, 9, 4, 63-71 (in Russ.).
- [19] Akzhigitov E.A., Kadirbayeva Zh.M. On a solvability of two-point boundary value problem for loaded differential equations. *Science review. S.Seifullin Kazakh Agro Technical University*, **2012**, 2(10), 35-40 (in Eng.).
- [20] Dzhumabaev D.S., Iliyassova G.B. On one numerical implementation of the parameterization method for solving of linear boundary value problem for loaded differential equations. *Izvestia NAS RK. Seria phys.-math.*, **2014**, 2, 275-280 (in Russ.).

Э.А. Бакирова, Ж.М. Қадырбаева

Математика және математикалық моделдеу институты, Алматы, Қазақстан

### ЖҮКТЕЛГЕН ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕНДЕУЛЕР ҮШІН СЫЗЫҚТЫ КӨПНҮКТЕЛІ ШЕТТІК ЕСЕПТІҢ ШЕШІМДІЛІГІ ТУРАЛЫ

**Аннотация.** Параметрлеу әдісі негізінде жүктелген дифференциалдық теңдеулер үшін сызықты көпнүктелі шеттік есеп зерттеледі. Параметрлеу әдісінің маңызы жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйесі қарастырылып отырған кесінді жүктеу нүктелерімен бөліктерге бөлінеді және бастапқы есеп параметрі бар пара пар шеттік есепке келтіріледі. Параметрі бар шеттік есептің шешімі параметр және функция жұптар жүйесі тізбегінің шегі ретінде анықталады. Параметрлер шеттік шарттар матрицалары және жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйесі арқылы анықталатын сызықты алгебралық теңдеулер жүйесінен табылады, ал функциялар табылған параметрлер мәндері үшін Коши есебінің шешімдері болады. Жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сызықты көпнүктелі шеттік есептің шешімін табудың алгоритмі ұсынылады. Зерттеліп отырған есептің шешімі бар болуы мен жалғыздығын қамтамасыз ететін ұсынылған алгоритмнің жинақтылығының шарттары тағайындалған. Есептің бірімәнді шешілімділігінің жеткілікті шарттары бастапқы берілімдер терминінде алынған.

**Түйін сөздер:** шеттік есеп, параметрлеу әдісі, жүктелген дифференциалдық теңдеу, алгоритм.

## МАЗМҰНЫ

### Жұлдыздардың және тұмандықтардың зерттеулері

<i>Серебрянский А.В., Гайнуллина Е.Р., Халикова А.В.</i> , ТУС3215-906-1 айнымалы жұлдыз: бүгілген жаркылдың талдауы және жіктеуі.....	5
<i>Кондратьева Л.Н., Рспаев Ф.К., Аймуратов Е.К., Отебай А.Б.</i> , V725 Тау объектісінің спектрлік және фотометрлік бақылауларының нәтижелері.....	12
<i>Кондратьева Л.Н., Рспаев Ф.К., Аймуратов Е.К.</i> , M1-65 планеталық тұмандықтың айнымалылығы.....	22
<i>Павлова Л.А.</i> , Жұлдыз маңындағы құрылымдардың қалыптасуына магниттік өрістердің әсері.....	29
<i>Кокумбаева Р.И., Хруслов А.В., Кусакин А.В.</i> , GSC 3601-01531 және GSC 3601-01504 екі жаңа айнымалы жұлдыздар .....	35

### Аспан механикасының және жұлдыздар жүйесінің мәселелері

<i>Дубовиченко С.Б., Джазаиров-Кахраманов А.В., Буркова Н.А., Ткаченко А.С.</i> , Астрофизикалық энергия кезінде радиациялық ${}^2\text{H}^3\text{He}$ басып алу .....	41
<i>Зулыхаров А.Т., Коньсбаев Т.К., Чечин Л.М.</i> , Қараңғы материя есебімен ғаламдар релаксацияларының уақытын бағалау.....	50

### Күннің және күн жүйесі денелерінің физикасы

<i>Шестакова Л.И., Демченко Б.И.</i> , А тобы жұлдыздары дискілерінде атомдар мен иондар динамикасына бүгілген жарық қысымының әсері.....	55
<i>Демченко Б.И., Шестакова Л.И.</i> , Күн маңындағы сублимация процессінде оливин тозақ бөлшектерінің орбиталық дамуы .....	64
<i>Шестакова Л.И., Демченко Б.И.</i> , А тобы жұлдыздары маңындағы сублимация процессінде силикатты тозақ бөлшектерінің орбиталық дамуы.....	73
<i>Минасянц Г.С., Минасянц Т.М., Томозов В.М.</i> Күннің минимум белсенді кезіндегі иондық энергиямен Fe/O қатынасының өзгеруі. I. күнде дақтар жоқ болғанда Fe және O иондарының энергетикалық спектрлері.....	81
<i>Минасянц Г.С., Минасянц Т.М., Томозов В.М.</i> Күн белсенділігі минимумында иондар қуатымен Fe/O мәнінің өзгеруі. II. Циклдің минимумында ғарыш сәулелерінің аномалды компоненттерінің ролі.....	86
<i>Тейфель В.Г., Каримов А.М., Харитонова Г.А.</i> , Сатурндағы аммиактың жұтылуы – 2009 жылы күн мен түннің теңелуі кезеңінде ендік вариациялар асимметриясы .....	91
<i>Каримов А.М., Лысенко П.Г., Тейфель В.Г.</i> , Сатурнның солтүстік жартышары - 2015 жылы метан және аммиактың жұтылуы .....	97
<i>Вдовиченко В.Д., Кириенко Г.А., Лысенко П.Г.</i> 2016 жылдың көріну маусымында юпитер дискісі бойынша метанның-аммиактың жұтылуын зерттеу I. Экватор аймағы .....	104
<i>Вдовиченко В.Д., Кириенко Г.А., Лысенко П.Г.</i> жылдың көріну маусымында юпитер дискісі бойынша метанның-аммиактың жұтылуын зерттеу. II. Ендік вариациялар .....	110
<i>Вдовиченко В.Д., Кириенко Г.А., Лысенко П.Г.</i> 2016 жылдың көріну маусымында Юпитерде метан-аммиак жұтылуын зерттеу III. Үлкен Қызыл Дақ (ҮҚД).....	118
<i>Демченко Б.И., Воропаев В.А., Комаров А.А., Молотов И.Е., Серебрянский А.В., Усольцева Л.А.</i> , Көптеген геотұрақты серіктердің кейбір сипаттамалары.....	124
<i>Демченко Б.И., Комаров А.А., Нифонтова М.В., Усольцева Л.А.</i> , Көру шегі аз CCD-матрицада ГТС бақылауларының астрометриялық өңдеулерінің әртүрлі әдістерінің салыстырмалы талдауы.....	129
<i>Демченко Б.И., Комаров А.А., Кругов М.А., Рева И.В., Серебрянский А.В., Усольцева Л.А.</i> , Тянь-Шань Астрономиялық Обсерваториясы бекетінде геотұрақты серіктерді бақылау жағдайы.....	135
<i>Шомищева С.А., Рева И.В., Кондратьева Л.Н., Отебай А.Б.</i> , Тянь-Шань Астрономиялық Обсерваториясының 1-метрлік телескобында фотометрлік жүйесін стандарттау.....	140
<i>Терещенко В.М.</i> , SSP-5A фотоэлектрлік фотометрі жұмысының сипаттамасы және ерекшеліктері.....	146
<i>Терещенко В.М., Шамро А.В.</i> , Абсолютті өлшемдер үшін спектрограф. Оптика-механикалық блоктың сызбасы және құрылымы.....	155

### Теориялық зерттеулер

<i>Қалдыбекова Б.Қ., Решетова Г.В.</i> Арнайы ішектен жасалған тордың сандық нәтижелері.....	160
<i>Бакирова Э.А., Қадырбаева Ж.М.</i> Жүктелген дифференциалдық теңдеулер үшін сызықты көпнүктелі шеттік есептің шешілімділігі туралы.....	168
<i>Бесбаев Г.А., Көпжасарова А.А., Сапрыгина М.Б., Шалданбаев А.Ш.</i> Гурса операторының Крейн кеңістігіндегі жалқылығы туралы.....	176
<i>Жұмәлі А.С., Решетова Г.В.</i> Жерасты ерітінділеудің микроскопиялық динамикасын сандық моделдеу.....	188
<i>Бақтыбаев Қ., Дәлелханқызы А., Қиқымова І., Мырзагулов А.</i> Әсерлесуші бозондар моделін уран ядросының деформацияланған изотоптарына қолдану.....	195
<i>Көпжасарова А.А., Бесбаев Г.А., Абылкасымова Э. А., Шалданбаев А.Ш.</i> Толқын теңдеуінің шартарапты волтерлі есептерінің Крейннің кеңістігіндегі спектралдік таралымдары.....	203
<i>Шоманбаева М.Т., Көпжасарова А.А., Бесбаев Г.А., Шалданбаев А.Ш.</i> Толқындық теңдеуінің шартарапты шекаралық есебінің спектрлік қасиеттері.....	213
<b>Қазақстанның астрономиялық ғылым 75 жыл.</b> .....	224

СОДЕРЖАНИЕ

Исследование звезд и туманностей

<i>Серебрянский А.В., Гайнуллина Е.Р., Халикова А.В.</i> , Переменная звезда TYC3215-906-1: анализ кривой блеска классификация.....	5
<i>Кондратьева Л.Н., Рспаев Ф.К., Аймуратов Е.К., Отебай А.Б.</i> , Результаты спектральных и фотометрических наблюдений объекта V725 Тау.....	12
<i>Кондратьева Л.Н., Рспаев Ф.К., Аймуратов Е.К.</i> , Переменность планетарной туманности M1-65 .....	22
<i>Павлова Л.А.</i> , Влияние магнитных полей на формирование околосветных структур .....	29
<i>Кокумбаева Р.И., Хруслов А.В., Кусакин А.В.</i> , Две новые переменные звезды GSC 3601-01531 и GSC 3601-01504... ..	35

Проблемы небесной механики и динамики звездных систем

<i>Дубовиченко С.Б., Джазаиров-Кахраманов А.В., Буркова Н.А., Ткаченко А.С.</i> , Радиационный $^2\text{H}^3\text{He}$ захват при астрофизических энергиях .....	41
<i>Зулыхаров А.Т., Коньсбаев Т.К., Чечин Л.М.</i> , Оценка времени релаксации галактик с учетом темной материи.....	50

Физика Солнца и тел солнечной системы

<i>Шестакова Л.И., Демченко Б.И.</i> , Действие светового давления на динамику атомов и ионов в осколочных дисках звезд класса А.....	55
<i>Демченко Б.И., Шестакова Л.И.</i> , Орбитальная эволюция пылевых частиц оливина в процессе сублимации около Солнца .....	64
<i>Шестакова Л.И., Демченко Б.И.</i> , Орбитальная эволюция силикатных пылевых частиц в процессе сублимации около звезд класса А .....	73
<i>Минасянц Г.С., Минасянц Т.М., Томозов В.М.</i> Изменение отношения Fe/O с энергией ионов в минимуме солнечной активности. I. Энергетические спектры ионов Fe и O при отсутствии пятен на Солнце.....	81
<i>Минасянц Г.С., Минасянц Т.М., Томозов В.М.</i> Изменение отношения Fe/O с энергией ионов в минимуме солнечной активности. II. Роль аномальной компоненты космических лучей в минимуме цикла.....	86
<i>Тейфель В.Г., Каримов А.М., Харитонова Г.А.</i> , Аммиачное поглощение на Сатурне - асимметрия широтных вариаций в период равноденствия 2009 года.....	91
<i>Каримов А.М., Лысенко П.Г., Тейфель В.Г.</i> , Северное полушарие Сатурна - поглощение метана и аммиака в 2015 году .....	97
<i>Вдовиченко В.Д., Кириенко Г.А., Лысенко П.Г.</i> Исследование молекулярного поглощения по диску Юпитера в сезон видимости 2016 года I. экваториальная область.....	104
<i>Вдовиченко В.Д., Кириенко Г.А., Лысенко П.Г.</i> , Исследование молекулярного поглощения на Юпитере в сезон видимости 2016 года II. Широтные вариации.....	110
<i>Вдовиченко В.Д., Кириенко Г.А., Лысенко П.Г.</i> Исследование молекулярного поглощения на Юпитере в сезон видимости 2016 года. III. Большое Красное Пятно (БКП) .....	118
<i>Демченко Б.И., Воропаев В.А., Комаров А.А., Молотов И.Е., Серебрянский А.В., Усольцева Л.А.</i> , Некоторые характеристики множества геостационарных спутников.....	124
<i>Демченко Б.И., Комаров А.А., Нифонтова М.В., Усольцева Л.А.</i> , Сравнительный анализ различных методов астрометрической обработки наблюдений ГСС на CCD-матрице с малым полем зрения.....	129
<i>Демченко Б.И., Комаров А.А., Кругов М.А., Рева И.В., Серебрянский А.В., Усольцева Л.А.</i> , Условия наблюдений геостационарных спутников на пункте Тянь-Шанская Астрономическая Обсерватория.....	135
<i>Шомищева С.А., Рева И.В., Кондратьева Л.Н., Отебай А.Б.</i> , Стандартизация фотометрической системы 1-метрового телескопа Тянь-Шанской Астрономической Обсерватории.....	140
<i>Терещенко В.М.</i> , Характеристики и особенности работы фотоэлектрического фотометра SSP-5A .....	146
<i>Терещенко В.М., Шамро А.В.</i> , Спектрограф для абсолютных измерений. Схема и конструкция оптико-механического блока.....	152

Теоретические исследования

<i>Калдыбекова Б. К., Решетова Г. В.</i> Численные результаты специальной сетки из струн.....	160
<i>Бакирова Э.А., Кадирбаева Ж.М.</i> О разрешимости линейной многоточечной краевой задачи для нагруженных дифференциальных уравнений.....	168
<i>Бесбаев Г.А., Көпжасарова А.А., Сапрыгина М.Б., Шалданбаев А.Ш.</i> О самосорядженности оператора Гурса в пространстве Крейна.....	176
<i>Жумали А.С., Решетова Г.В.</i> Численное моделирование микроскопической динамики подземного выщелачивания.....	188
<i>Бактыбаев К., Далелханкызы А., Кикымова I., Мырзабаев А.</i> Применение модели взаимодействующих бозонов в деформированных изотопах ядра урана.....	195
<i>Көпжасарова А.А., Бесбаев Г.А., Абылкасымова Э. А., Шалданбаев А.Ш.</i> Спектральные разложения решения вольтерровых нелокальных краевых задач волнового уравнения.....	203
<i>Шомамбаева М.Т., Көпжасарова А.А., Бесбаев Г.А., Шалданбаев А.Ш.</i> Спектральные свойства нелокальной краевой задачи волнового уравнения .....	213
<b>75 лет казахстанской астрономической науке.....</b>	<b>224</b>

## CONTENTS

## Investigation of stars and nebulae

<i>Serebryanskiy A.V., Gaynullina E.R., Khalikova A.V.</i> Variable star TYC3215-906-1: light curve analyses and classification .....	5
<i>Kondratyeva L., Rspaev F., Aimuratov Ye., Otebay A.</i> Results of the spectral and photometric observations of the object V725 Tau .....	12
<i>Kondratyeva L., Rspaev F., Aimuratov Ye.</i> , Variability of the planetary nebula M1-65.....	22
<i>Pavlova L.A.</i> , The influents magnetic field on the forming circumstellar structure.....	29
<i>Kokumbaeva R.I., Khruslov A.V., Kusakin A.V.</i> , GSC 3601-01531 and GSC 3601-01504, two new variable stars.....	35

## Problems of celestial mechanics and dynamics of stellar systems

<i>Dubovichenko S.B., Dzhazairov-Kakhramanov A.V., Burkova N.A., Tkachenko A.S.</i> , Radiative ${}^2\text{H}^3\text{He}$ capture at astrophysical energies .....	41
<i>Zulpykharov A. T., Konysbayev T.K., Chechin L.M.</i> The relaxation time estimation for galaxies with account of Dark matter.....	50

## Physics of sun and bodies of the Solar system

<i>Shestakova L.I., Demchenko B.I.</i> , The action of radiation pressure on the dynamics of atoms and ions in debris disks of A-type stars.....	55
<i>Demchenko B.I., Shestakova L.I.</i> , Orbital evolution of olivine dust grain during sublimation process near the Sun.....	64
<i>Shestakova L.I., Demchenko B.I.</i> , Orbital evolution of silicate dust particles during sublimation near A-type stars.....	73
<i>Minasyants G.S., Minasyants T.M., Tomozov V.M.</i> Variations of Fe/O Ratio with Ion's Energies in the Solar Activity Minimum. I. Energy Spectra of Fe and O Ions on the Spotless Sun .....	81
<i>Minasyants G.S., Minasyants T.M., Tomozov V.M.</i> Variations of Fe/O Ratio with Ion's Energies in the Solar Activity Minimum. II. Role of anomalous component of the cosmic rays in a cycle minimum.....	86
<i>Tejfe V.G.I., Karimov A.M., Kharitonova G.A.</i> The ammonia absorption in Saturn – an asymmetry of latitudinal variations at the 2009 equinox.....	91
<i>Karimov A.M., Lysenko P.G., Tejfe V.G.I., Kharitonova G.A.</i> , Northern hemisphere of SATURN – the methane and ammonia absorption in 2015.....	97
<i>Vdovichenko V.D., Kirienko G.A., Lysenko P.G.</i> , The study of molecular absorption over Jovian disk in season of 2016 visibility. I. Equatorial area.....	104
<i>Vdovichenko V.D., Kirienko G.A., Lysenko P.G.</i> The study of molecular absorption on Jupiter in visibility season of 2016. II. Latitudinal variations.....	110
<i>Vdovichenko V.D., Kirienko G.A., Lysenko P.G.</i> The study of molecular absorption on Jupiter in visibility season of 2016. III. Great Red Spot (GRS).....	118
<i>Demchenko B. I., Komarov A. A., Molotov I. E., Serebryansky A. V., Usoltseva L. I., Voropaev V.A.</i> Some features of geostationary satellites assemblage.....	124
<i>Demchenko B. I., Komarov A. A., Nifontova M.V., Usoltseva L. I.</i> , Comparative analysis of several methods of astrometric processing of the GSS observations using CCD-cameras with narrow field of view.....	129
<i>Demchenko B. I., Komarov A. A., Krugov M.A., Reva I.V., Serebryansky A. V., Usoltseva L. I.</i> , Condition of observations of geostationary satellites at Tien Shan astronomical observatory.....	135
<i>Shomshenkova S. A., Reva I.V., Kondratyeva L.N., Otebay A.B.</i> , Standardization of the photometric system of the 1-meter telescope of Tien-Shan Astronomical Observatory.....	140
<i>Tereschenko V. M.</i> , The characteristics and peculiarities of the photoelectrical photometer SSP-5A operation.....	146
<i>Tereschenko V. M., Shamro A. V.</i> , Spectrograph for absolute measurements. Scheme and construction of the optic-mechanic block.....	152

## Theoretical studies

<i>Kaldybekova B.K., Reshetova G. V.</i> Numerical results of special grid of strings.....	160
<i>Bakirova E.A., Kadirbayeva Zh.M.</i> On a solvability of linear multipoint boundary value problem for the loaded differential equations.....	168
<i>Besbayev G. A., Kopzhasarova A.A., Saprygina M.B., Shaldanbayev A.Sh.</i> On self-conjugation of the operator of goursat in crane space .....	176
<i>Zhumali A.S., Reshetova G.V.</i> Numerical modelling of microscopic dynamics of in-situ leaching.....	188
<i>Baktybaev K., Dalelkhankyzy A., Kyqymova I., Myrzabaev A.</i> Applying the model of interacting bosons in a deformed nucleus of uranium isotopes.....	195
<i>Kopzhasarova A.A., Besbayev G. A., Abylkassymova E.A., Shaldanbayev A.SH.</i> Spectral resolutions of solution of voltaire nonlocal boundary value problems of a wave equation.....	203
<i>Shomanbayeva M. T., Kopzhasarova A.A., Besbayev G. A., Shaldanbayev A.Sh.</i> Spectral properties of a nonlocal boundary value problem of a wave equation.....	213
<b>75 years of Kazakhstan's astronomical science</b> .....	224

**Publication Ethics and Publication Malpractice  
in the journals of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan**

For information on Ethics in publishing and Ethical guidelines for journal publication see <http://www.elsevier.com/publishingethics> and <http://www.elsevier.com/journal-authors/ethics>.

Submission of an article to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan implies that the described work has not been published previously (except in the form of an abstract or as part of a published lecture or academic thesis or as an electronic preprint, see <http://www.elsevier.com/postingpolicy>), that it is not under consideration for publication elsewhere, that its publication is approved by all authors and tacitly or explicitly by the responsible authorities where the work was carried out, and that, if accepted, it will not be published elsewhere in the same form, in English or in any other language, including electronically without the written consent of the copyright-holder. In particular, translations into English of papers already published in another language are not accepted.

No other forms of scientific misconduct are allowed, such as plagiarism, falsification, fraudulent data, incorrect interpretation of other works, incorrect citations, etc. The National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan follows the Code of Conduct of the Committee on Publication Ethics (COPE), and follows the COPE Flowcharts for Resolving Cases of Suspected Misconduct ([http://publicationethics.org/files/u2/New\\_Code.pdf](http://publicationethics.org/files/u2/New_Code.pdf)). To verify originality, your article may be checked by the Cross Check originality detection service <http://www.elsevier.com/editors/plagdetect>.

The authors are obliged to participate in peer review process and be ready to provide corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. All authors of a paper should have significantly contributed to the research.

The reviewers should provide objective judgments and should point out relevant published works which are not yet cited. Reviewed articles should be treated confidentially. The reviewers will be chosen in such a way that there is no conflict of interests with respect to the research, the authors and/or the research funders.

The editors have complete responsibility and authority to reject or accept a paper, and they will only accept a paper when reasonably certain. They will preserve anonymity of reviewers and promote publication of corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. The acceptance of a paper automatically implies the copyright transfer to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.

The Editorial Board of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan will monitor and safeguard publishing ethics.

Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайтах:

[www.nauka-nanrk.kz](http://www.nauka-nanrk.kz)

<http://www.physics-mathematics.kz>

<http://road.issn.org/issn/2518-1726>

Редактор *М. С. Ахметова, Д.С. Аленов, Т.А. Апендиев*  
Верстка на компьютере *А.М. Кульгинбаевой*

Подписано в печать 25.09.2016.  
Формат 60x881/8. Бумага офсетная. Печать – ризограф.  
14 п.л. Тираж 300. Заказ 5.