

<http://road.issn.org/issn/2518-1726>

ISSN 1991-346X

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ  
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ

# Х А Б А Р Л А Р Ы

---

---

## ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК  
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES  
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА  
СЕРИЯСЫ**



**СЕРИЯ**

**ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ**



**PHYSICO-MATHEMATICAL  
SERIES**

**5 (309)**

**ҚЫРКҮЙЕК – ҚАЗАН 2016 ж.  
СЕНТЯБРЬ – ОКТЯБРЬ 2016 г.  
SEPTEMBER – OCTOBER 2016**

1963 ЖЫЛДЫҢ ҚАҢТАР АЙЫНАН ШЫҒА БАСТАҒАН  
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1963 ГОДА  
PUBLISHED SINCE JANUARY 1963

ЖЫЛЫНА 6 РЕТ ШЫҒАДЫ  
ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД  
PUBLISHED 6 TIMES A YEAR

АЛМАТЫ, ҚР ҰҒА  
АЛМАТЫ, НАН РК  
ALMATY, NAS RK

## ҚР ҰҒА ХАБАРЛАРЫ. ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА СЕРИЯСЫ

Бас редакторы  
ф.-м.ғ.д., проф., ҚР ҰҒА академигі **Ғ.М. Мұтанов**

Р е д а к ц и я а л қ а с ы:

**Жұмаділдаев А.С.** проф., академик (Қазақстан)  
**Кальменов Т.Ш.** проф., академик (Қазақстан)  
**Жантаев Ж.Ш.** проф., корр.-мүшесі (Қазақстан)  
**Өмірбаев У.У.** проф. корр.-мүшесі (Қазақстан)  
**Жүсіпов М.А.** проф. (Қазақстан)  
**Жұмабаев Д.С.** проф. (Қазақстан)  
**Асанова А.Т.** проф. (Қазақстан)  
**Бошкаев К.А.** PhD докторы (Қазақстан)  
**Сұраған Д.** PhD докторы (Қазақстан)  
**Quevedo Hernando** проф. (Мексика),  
**Джунушалиев В.Д.** проф. (Қырғыстан)  
**Вишневский И.Н.** проф., академик (Украина)  
**Ковалев А.М.** проф., академик (Украина)  
**Михалевич А.А.** проф., академик (Белорус)  
**Пашаев А.** проф., академик (Әзірбайжан)  
**Такибаев Н.Ж.** проф., академик (Қазақстан), бас ред. орынбасары  
**Тигиняну И.** проф., академик (Молдова)

## ИЗВЕСТИЯ НАН РК. СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

Главный редактор  
д.ф.-м.н., проф. академик НАН РК **Г.М. Мутанов**

Редакционная коллегия:

**Джумадильдаев А.С.** проф., академик (Казахстан)  
**Кальменов Т.Ш.** проф., академик (Казахстан)  
**Жантаев Ж.Ш.** проф., чл.-корр. (Казахстан)  
**Умирбаев У.У.** проф. чл.-корр. (Казахстан)  
**Жусупов М.А.** проф. (Казахстан)  
**Джумабаев Д.С.** проф. (Казахстан)  
**Асанова А.Т.** проф. (Казахстан)  
**Бошкаев К.А.** доктор PhD (Казахстан)  
**Сураган Д.** доктор PhD (Казахстан)  
**Quevedo Hernando** проф. (Мексика),  
**Джунушалиев В.Д.** проф. (Кыргызстан)  
**Вишневский И.Н.** проф., академик (Украина)  
**Ковалев А.М.** проф., академик (Украина)  
**Михалевич А.А.** проф., академик (Беларусь)  
**Пашаев А.** проф., академик (Азербайджан)  
**Такибаев Н.Ж.** проф., академик (Казахстан), зам. гл. ред.  
**Тигиняну И.** проф., академик (Молдова)

«Известия НАН РК. Серия физико-математическая». ISSN 1991-346X

<http://road.issn.org/issn/2518-1726>

Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы)

Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации и архивов  
Министерства культуры и информации Республики Казахстан №5543-Ж, выданное 01.06.2006 г.

Периодичность: 6 раз в год.

Тираж: 300 экземпляров.

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, ком. 219, 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,  
[www.nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz](http://www.nauka-nanrk.kz/physics-mathematics.kz)

---

© Национальная академия наук Республики Казахстан, 2016

Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75.

**NEWS OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC  
OF KAZAKHSTAN. SERIES OF PHYSICS AND MATHEMATICS**

E d i t o r i n c h i e f

doctor of physics and mathematics, professor, academician of NAS RK **G.M. Mutanov**

E d i t o r i a l b o a r d :

**Dzhumadildayev A.S.** prof., academician (Kazakhstan)  
**Kalmenov T.Sh.** prof., academician (Kazakhstan)  
**Zhantayev Zh.Sh.** prof., corr. member. (Kazakhstan)  
**Umirbayev U.U.** prof. corr. member. (Kazakhstan)  
**Zhusupov M.A.** prof. (Kazakhstan)  
**Dzhumabayev D.S.** prof. (Kazakhstan)  
**Asanova A.T.** prof. (Kazakhstan)  
**Boshkayev K.A.** PhD (Kazakhstan)  
**Suragan D.** PhD (Kazakhstan)  
**Quevedo Hernando** prof. (Mexico),  
**Dzhunushaliyev V.D.** prof. (Kyrgyzstan)  
**Vishnevskiy I.N.** prof., academician (Ukraine)  
**Kovalev A.M.** prof., academician (Ukraine)  
**Mikhalevich A.A.** prof., academician (Belarus)  
**Pashayev A.** prof., academician (Azerbaijan)  
**Takibayev N.Zh.** prof., academician (Kazakhstan), deputy editor in chief.  
**Tiginyanu I.** prof., academician (Moldova)

**News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physical-mathematical series.**  
**ISSN 1991-346X**

<http://road.issn.org/issn/2518-1726>

Owner: RPA "National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan" (Almaty)

The certificate of registration of a periodic printed publication in the Committee of information and archives of the Ministry of culture and information of the Republic of Kazakhstan N 5543-Ж, issued 01.06.2006

Periodicity: 6 times a year

Circulation: 300 copies

Editorial address: 28, Shevchenko str., of. 219, 220, Almaty, 050010, tel. 272-13-19, 272-13-18,  
[www.nauka-nanrk.kz](http://www.nauka-nanrk.kz) / [physics-mathematics.kz](http://physics-mathematics.kz)

---

© National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, 2016

Address of printing house: ST "Aruna", 75, Muratbayev str, Almaty

**NEWS**

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES**

ISSN 1991-346X

Volume 5, Number 309 (2016), 188 – 194

UDC 517.958:531.72

**A.S. Zhumali, G.V. Reshetova**

Kazakh-British Technical University, Almaty, Kazakhstan  
[ainura\\_.89@mail.ru](mailto:ainura_.89@mail.ru)

**NUMERICAL MODELLING OF MICROSCOPIC DYNAMICS  
OF IN-SITU LEACHING**

**Abstract.** Dissolution of the solid ground by an acid is one of sub-processes of in-situ leaching. The purpose of this work is a numerical simulation of these processes at the porous level. The case of two spatial variables is considered. We admit the fluid dynamics is described by stationary Stokes equations, while acid concentration is described by convection-diffusion equation. The problem is completed with boundary and initial conditions.

For numerical simulation of the process the method of finite differences on staggered grids is used. At each time step, the fluid velocity components are computed iteratively by successive over-relaxation method. The fluid pressure, the concentration of acid and the position of the free boundary are found using an explicit scheme. To define boundary condition for the acid concentration at the free boundary, the system of nonlinear equations is solved by iterative Newton method.

Results of numerical experiments are presented and discussed. In particular, one can see the motion of the free interface solid-liquid and mechanism of physical and chemical processes there.

**Keywords:** leaching, free boundary, microscopic model, numerical solution.

УДК 517.958:531.72

**А.С. Жумали, Г.В. Решетова**

Казахстанско-Британский технический университет, Алматы, Казахстан

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МИКРОСКОПИЧЕСКОЙ  
ДИНАМИКИ ПОДЗЕМНОГО ВЫЩЕЛАЧИВАНИЯ**

**Аннотация.** Растворение твердого грунта кислотой является одним из подпроцессов подземного выщелачивания. Целью данной работы является численное моделирование таких процессов на микроуровне (на уровне пор). Математическая модель описывает динамику жидкости стационарными уравнениями Стокса. Динамика кислоты описывается уравнением диффузии-конвекции. Задача замыкается граничными и начальными условиями.

Для численного моделирования задачи применяется метод конечных разностей для случая двух пространственных переменных. Конечно-разностная аппроксимация уравнений строится методом баланса на сдвинутых сетках. На каждом шаге по времени компоненты скорости жидкости вычисляются методом верхней релаксации. Давление жидкости, концентрация кислоты и положение свободной границы находятся с использованием явной конечно - разностной схемы. Граничное условие для концентрации кислоты на свободной границе описывается системой нелинейных уравнений и решается итерационным методом Ньютона.

**Ключевые слова:** выщелачивание, свободная граница, микроскопическая модель, численное моделирование.

В статье приведены результаты численных экспериментов для различных значений начальной концентрации. Результаты расчетов позволяют проанализировать движение свободной границы и механизмы протекания физических и химических процессов выщелачивания на микроуровне.

**Введение.** Процесс подземного выщелачивания является экологически чистым методом добычи минералов, таких как уран, медь, никель, золото и т.д. Проводится он подачей активного раствора в пористый грунт, где раствор вступает в химическую реакцию с материалом твердого грунта. В результате в жидкость попадает продукт химического взаимодействия, а часть грунта подвергается растворению.

Данный физический процесс рассматривается в ограниченном объеме, который состоит из области, моделирующей поровое пространство, области, моделирующей твердый скелет и границы  $X(y,t)$  между поровым пространством и твердым скелетом (Рис. 1). Граница  $X(y,t)$  является неизвестной, поскольку в процессе выщелачивания часть грунта растворяется, и сам грунт деформируется во времени. Такие задачи называются задачами со свободными границами.

Различные частные случаи точных моделей фильтрации жидкости в горных породах исследовались многими авторами. Детальное рассмотрение можно найти в работе [1]. Наиболее систематически точные модели физических процессов в поровых средах исследованы в [2]. Эти модели на микроуровне исходят из известных уравнений механики сплошных сред [3] и химических законов [4].

Целью настоящей работы является численная реализация алгоритмов для описания процесса подземного выщелачивания в двумерном случае. С помощью численного моделирования исследуются положения границ выщелачивания грунта при различных значениях параметров, входящих в систему дифференциальных уравнений, а также концентрации кислоты в разные моменты времени.

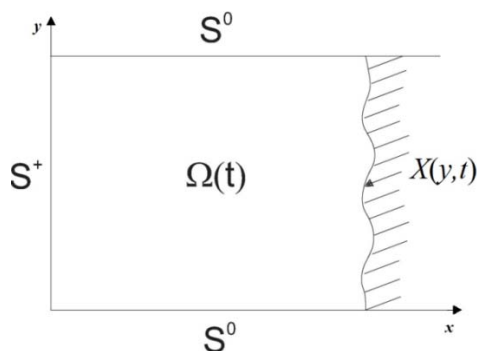


Рисунок 1 – Рассматриваемая область

**Постановка задачи.** Дифференциальные уравнения для компонент скорости жидкости  $\vec{v}$ , её давления  $p$  и концентрации кислоты  $c$ , в двумерной постановке имеют следующий вид:

$$\alpha_\mu \Delta \vec{v} - \nabla p = 0, \quad (1)$$

$$\varepsilon \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla c = \alpha_c \Delta c, \quad (3)$$

Краевые условия на свободной границе  $X(y,t)$ :

$$(V_n + \beta - v_n)c + \alpha_c \nabla c \cdot \vec{n} = 0, \quad (4)$$

$$v_n = -V_n \frac{(\rho_s - \rho_f)}{\rho_f}, \quad (5)$$

$$\vec{v} - v_n \vec{n} = 0, \quad (6)$$

$$V_n = \beta \gamma c, \quad (7)$$

где  $V_n$  - скорость движения свободной границы по направлению внешней нормали  $\vec{n}$ ,  $v_n$  - скорость жидкости по направлению вектора единичной нормали  $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2}} \left(1, -\frac{\partial X}{\partial y}\right)$ . На

границе  $S^+$ , которая моделирует нагнетательную скважину, нормальное напряжение в жидкости пропорционально известному давлению

$$(\alpha_\mu D(\vec{v}) - pl) \cdot \vec{n} = -p^+ \vec{n}, \quad (8)$$

$$c = c^+, \quad (9)$$

здесь  $l$  - единичная матрица и  $D(\vec{v}) = \frac{1}{2}(\nabla \vec{v} + \nabla \vec{v}^*)$ .

На непроницаемых для жидкости границах  $S^0$

$$\vec{v} = 0, \text{ и } \nabla c \cdot \vec{n} = 0. \quad (10)$$

Начальные условия:  $X(y,0) = X_0$ ,  $c(x,y,0) = c_0(x,y)$ ,  $(x,y) \in \Omega_0$ .

Уравнения написаны в безразмерном виде. Здесь  $\alpha_\mu = \frac{\mu}{TLg\rho_0}$ ,  $\varepsilon = \frac{gL}{c_s^2}$ ,  $\alpha_c = \frac{DT}{L^2}$ ,  $\mu$  -

коэффициент вязкости,  $g$  - ускорение свободного падения,  $\rho_0$  - плотность воды,  $c_s$  - скорость звука в жидкости,  $D$  - диффузионный коэффициент,  $T$  - характерное время,  $L$  - характерный размер области,  $\beta, \gamma$  - заданные константы, характеризующие химический процесс взаимодействия кислоты с породой,  $\rho_s, \rho_f$  - безразмерные плотности твердого скелета и жидкости, соответственно.

**Численный метод.** Численное моделирование выполняется методом конечных разностей. Конечно-разностная аппроксимация дифференциальных уравнений строится методом баланса на прямоугольных сдвинутых сетках. Для решения уравнения (1) на каждом шаге по времени используется метод верхней релаксации (SOR), а для уравнения (4) метод Ньютона.

Конечно-разностная аппроксимация уравнения (1), после применения метода SOR, покомпонентно запишется в виде:

$$v_x^{\alpha+1}_{i+\frac{1}{2},j} = (1-\omega)v_x^\alpha_{i+\frac{1}{2},j} + \frac{\omega}{2(\Delta x^2 + \Delta y^2)} \times \left[ \left( v_x^\alpha_{i+\frac{3}{2},j} + v_x^{\alpha+1}_{i-\frac{1}{2},j} \right) \Delta y^2 + \left( v_x^\alpha_{i+\frac{1}{2},j+1} + v_x^{\alpha+1}_{i+\frac{1}{2},j-1} \right) \Delta x^2 - \Delta x \Delta y^2 \frac{P_{i+1,j} - P_{i,j}}{\alpha_\mu} \right]. \quad (11)$$

$$v_{y,i,j+\frac{1}{2}}^{\alpha+1} = (1-\omega)v_{y,i,j+\frac{1}{2}}^{\alpha} + \frac{\omega}{2(\Delta x^2 + \Delta y^2)} \times \left[ \left( v_{y,i+1,j+\frac{1}{2}}^{\alpha} + v_{y,i-1,j+\frac{1}{2}}^{\alpha+1} \right) \Delta y^2 + \left( v_{y,i,j+\frac{3}{2}}^{\alpha} + v_{y,i,j-\frac{1}{2}}^{\alpha+1} \right) \Delta x^2 - \Delta x^2 \Delta y \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j}}{\alpha_{\mu}} \right]. \quad (12)$$

где  $\omega$  - параметр релаксации ( $1 < \omega < 2$ ).

Конечно-разностный аналог уравнения (2):

$$p_{i,j}^{n+1} = p_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\varepsilon} \left[ \left( v_{x,i+\frac{3}{2},j}^{n+1} - v_{x,i-\frac{1}{2},j}^{n+1} \right) / (2\Delta x) + \left( v_{y,i,j+\frac{3}{2}}^{n+1} - v_{y,i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} \right) / (2\Delta y) \right]. \quad (13)$$

Конечно-разностный аналог уравнения (3):

$$c_{i,j}^{n+1} = c_{i,j}^n + \Delta t \alpha_c \left[ \frac{c_{i+1,j}^n - 2c_{i,j}^n + c_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{c_{i,j+1}^n - 2c_{i,j}^n + c_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right] - \Delta t \left[ v_{x,i+\frac{1}{2},j}^{n+1} \frac{c_{i+1,j}^n - c_{i,j}^n}{\Delta x} + v_{y,i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} \frac{c_{i,j+1}^n - c_{i,j}^n}{\Delta y} \right] \quad (14)$$

Конечно-разностный аналог уравнения (4):

$$\frac{\rho_s}{\rho_f} \beta \gamma c_{N,0}^2 + \beta c_{N,0} + \alpha_c \frac{c_{N,0} - c_{N-1,0}}{\Delta x \sqrt{1 + [(X_1 - X_0)/\Delta y]^2}} = 0, \quad \text{при } y = 0, \quad (15)$$

$$\frac{\rho_s}{\rho_f} \beta \gamma c_{N,M}^2 + \beta c_{N,M} + \alpha_c \frac{c_{N,M} - c_{N-1,M}}{\Delta x \sqrt{1 + [(X_M - X_{M-1})/\Delta y]^2}} = 0, \quad \text{при } y = y_M, \quad (16)$$

$$c_{N,j+1} = c_{N,j} + \beta \Delta y^2 \frac{\sqrt{1 + [(X_{j+1} - X_j)/\Delta y]^2}}{\alpha_c (X_{j+1} - X_j)} \left( \frac{\rho_s}{\rho_f} \gamma c_{N,j}^2 + c_{N,j} \right) + \frac{\Delta y^2}{\Delta x (X_{j+1} - X_j)} (c_{N,j} - c_{N-1,j}), \quad \text{при } y = \overline{y_1, y_{M-1}}. \quad (17)$$

Уравнения (16), (17) решаются методом Ньютона:

$$c_{N,0}^{k+1} = c_{N,0}^k - \left\{ \frac{\rho_s}{\rho_f} \beta \gamma c_{N,0}^2 + \beta c_{N,0} + \alpha_c \frac{c_{N,0} - c_{N-1,0}}{\Delta x \sqrt{1 + [(X_1 - X_0)/\Delta y]^2}} \right\} / \left\{ 2\beta \gamma \frac{\rho_s}{\rho_f} c_{N,0} + \beta + \frac{\alpha_c}{\Delta x \sqrt{1 + [(X_1 - X_0)/\Delta y]^2}} \right\}, \quad (18)$$



$$c_{N,M}^{k+1} = c_{N,M}^k - \left\{ \frac{\rho_s}{\rho_f} \beta \gamma c_{N,M}^2 + \beta c_{N,M} + \alpha_c \frac{c_{N,M} - c_{N-1,M}}{\Delta x \sqrt{1 + [(X_M - X_{M-1})/\Delta y]^2}} \right\} / \left\{ 2\beta \gamma \frac{\rho_s}{\rho_f} c_{N,M} + \beta + \frac{\alpha_c}{\Delta x \sqrt{1 + [(X_M - X_{M-1})/\Delta y]^2}} \right\}. \quad (19)$$

С помощью простой явной схемы находим новое местоположение свободной границы выщелачивания:

$$X_j^{n+1} = \beta \gamma \Delta t c_{N,j}^{n+1} \sqrt{1 + [(X_{j+1} - X_j)/\Delta y]^2} + X_j^n \quad (20)$$

**Результаты численных экспериментов.** Было получено численное решение для микроскопической математической модели, описывающей взаимодействие активной примеси с твердым скелетом.

Ниже представлены расчеты по моделированию положения свободной границы, а также концентрации примеси для разных моментов времени для следующих параметров модели  $\gamma = 1$ ,

$$D = 2822 \frac{\text{мк}^2}{\text{с}}, \quad L = 56 \text{ мк}, \quad H = 42 \text{ мк}, \quad T = 0.01 \text{ с}.$$

Результаты расчетов приведены на Рис. 2-5

для разных значений  $\beta$ ,  $c^+$  и разных моментов времени. На Рисунке 2 черной линией изображено начальное положение свободной границы, а остальными линиями изображены положения свободной границы в момент времени  $T = 0.01 \text{ с}$  для разных значения коэффициента скорости химической реакции  $\beta$ . На Рисунке 3 черной линией изображено начальное положение свободной границы, а остальными линиями изображены положения свободной границы в момент времени  $T = 0.01 \text{ с}$  для разных значения концентрации кислоты на входе  $c^+$ . Свободная граница для большего значения постоянной  $\beta$  движется быстрее границы для меньшего  $\beta$  (Рис. 2). При подаче большей концентрации на входе  $c^+$  грунт растворяется быстрее, чем при меньших значениях  $c^+$  (Рис. 3). На Рисунке 4 изображена диффузия кислоты для разных моментов времени при постоянном значении концентрации кислоты на входе  $c^+$  (в расчетах  $\beta = 100$ ). На Рисунке 5 изображена диффузия кислоты для разных моментов времени при зависимости  $c^+$  от вертикальной координаты  $y$  (в расчетах  $\beta = 100$ ).

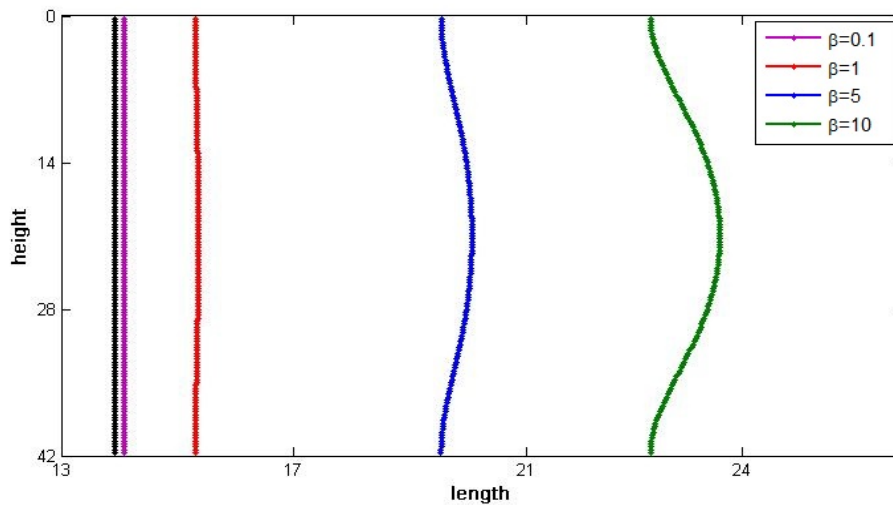


Рисунок 2 – Положения свободной границы при разных  $\beta$

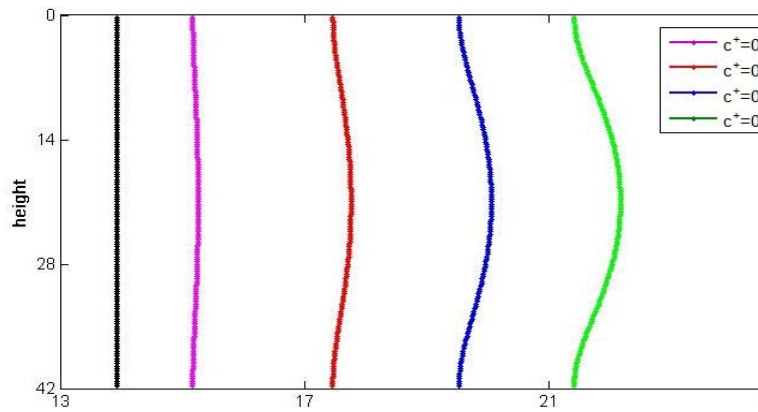


Рисунок 3 – Положения свободной границы при разных  $c^+$

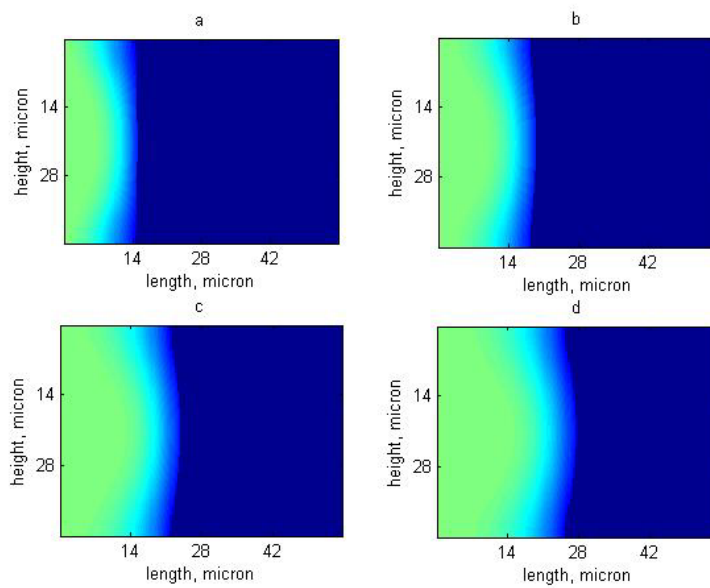


Рисунок 4 – Концентрация примеси в различные моменты времени:  
 a - 0.0028 с., b - 0.0036 с., c - 0.0044 с., d - 0.0052 с.

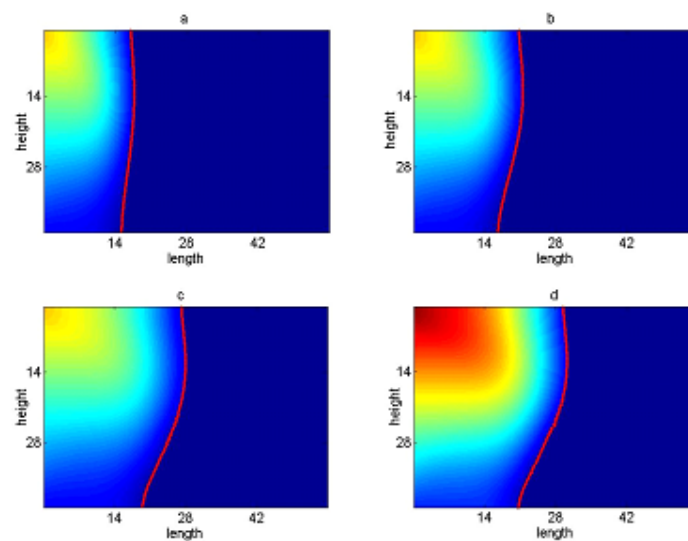


Рисунок 5 – Концентрация примеси при  $c^+ = 0.7 - y_j / dy$  в различные моменты времени:  
 a - 0.0028 с., b - 0.0036 с., c - 0.0052 с., d - 0.0064 с.

**Заклучение.** В работе рассматривается численное решение микроскопической математической модели, описывающей взаимодействие активной примеси с твердым скелетом. На основе метода баланса выводятся конечно - разностные уравнения, предлагается алгоритм численного решения на основе комбинации методов SOR, Ньютона и явных разностных уравнений. Приводятся результаты численных расчетов и их анализ.

Работа выполнена при частичной поддержке Казахского Фонда Фундаментальных Исследований, грант № 1771/ГФ4.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Burridge R., Keller G.B. Poroelasticity equations derived from microstructure // *Journal of Acoustic Society of America*. - 1981. - No. 4. - P. 1140–1146.
- [2] Meirmanov A. *Mathematical models for poroelastic flows*. - Paris: Atlantis Press, 2013.
- [3] Овсянников Л.В. Введение в механику сплошных сред. - Новосибирск: Новосибирский Государственный университет, 1977.
- [4] Ершов Ю.А., Попков В.А., Берлянд А.С., Книжник А.З. *Общая химия*. - М: Высшая школа, 2003. - 556 с.

#### REFERENCES

- [1] Burridge R., Keller G.B. *Journal of Acoustic Society of America*, **1981**, 1140–1146 (in eng.).
- [2] Meirmanov A. *Mathematical models for poroelastic flows*. Paris: Atlantis Press, **2013** (in eng.).
- [3] Ovsyannikov L.V. *Introduction to continuum mechanics*. Novosibirsk: Novosibirsk State University, **1977** (in rus.).
- [4] Ershov Y.A., Popkov V.A., Berlyand A.S., Knizhnik A.Z. *General Chemistry*. M: Vysshaya shkola, **2003**, 556 p. (in rus.).

**А.С. Жұмәлі, Г.В. Решетова**

Қазақ-Британ техникалық университеті, Алматы, Қазақстан

#### **ЖЕРАСТЫ ЕРІТІНДІЛЕУДІҢ МИКРОСКОПИЯЛЫҚ ДИНАМИКАСЫН САНДЫҚ МОДЕЛДЕУ**

**Аннотация.** Қышқылдың қатты денені ерітуі - жерасты ерітінділеудегі ішкі үрдістердің бірі болып табылады. Бұл жұмыстың мақсаты - сол үрдісті кеуектер деңгейінде сандық моделдеу. Кеңістік бойынша екі айнымалысы бар жағдайы қарастырылады. Есептің қойылымы бойынша сұйық динамикасы стационар Стокс теңдеулерімен сипатталады. Ал қышқыл динамикасы диффузия-конвекция теңдеуімен сипатталады. Есеп шекаралық және бастапқы шарттармен тұйықталады.

Есепті сандық моделдеу ақырлы айырымдар әдісімен жүзеге асырылады. Теңдеулердің ақырлы-айырымдық аппроксимациясы стандартты жылжытылған торлардың көмегімен құрылады. Уақыттың әр қадамында сұйық жылдамдығының компоненттері жоғарғы релаксация әдісімен есептеледі. Сұйық қысымы, қышқыл концентрациясы мен еркін шекараның орналасуы айқын сұлба қолдану арқылы табылады. Ал сызықсыз теңдеулер жүйесімен сипатталатын еркін шекарадағы қышқыл концентрациясына арналған шекаралық шарт итерациялық Ньютон әдісімен шешіледі.

Мақалада сандық моделдеу нәтижелері келтірілген. Нәтижелер арқылы еркін шекараның қозғалысы мен ондағы физикалық және химиялық үрдістердің өту механизмін көруге болады.

**Түйін сөздер:** ерітінділеу, еркін шекара, микроскопиялық пішін, сандық шешім.

## МАЗМҰНЫ

### Жұлдыздардың және тұмандықтардың зерттеулері

|   |    |
|---|----|
| <i>Серебрянский А.В., Гайнуллина Е.Р., Халикова А.В.</i> , ТУС3215-906-1 айнымалы жұлдыз: бүгілген жаркылдың талдауы және жіктеуі.....              | 5  |
| <i>Кондратьева Л.Н., Рспаев Ф.К., Аймуратов Е.К., Отебай А.Б.</i> , V725 Тау объектісінің спектрлік және фотометрлік бақылауларының нәтижелері..... | 12 |
| <i>Кондратьева Л.Н., Рспаев Ф.К., Аймуратов Е.К.</i> , M1-65 планеталық тұмандықтың айнымалылығы.....   | 22 |
| <i>Павлова Л.А.</i> , Жұлдыз маңындағы құрылымдардың қалыптасуына магниттік өрістердің әсері.....   | 29 |
| <i>Кокумбаева Р.И., Хруслов А.В., Кусакин А.В.</i> , GSC 3601-01531 және GSC 3601-01504 екі жаңа айнымалы жұлдыздар .....                           | 35 |

### Аспан механикасының және жұлдыздар жүйесінің мәселелері

|  |    |
|--|----|
| <i>Дубовиченко С.Б., Джазаиров-Кахраманов А.В., Буркова Н.А., Ткаченко А.С.</i> , Астрофизикалық энергия кезінде радиациялық ${}^2\text{H}^3\text{He}$ басып алу ..... | 41 |
| <i>Зулыхаров А.Т., Коньсбаев Т.К., Чечин Л.М.</i> , Қараңғы материя есебімен ғаламдар релаксацияларының уақытын бағалау.....   | 50 |

### Күннің және күн жүйесі денелерінің физикасы

|   |     |
|---|-----|
| <i>Шестакова Л.И., Демченко Б.И.</i> , А тобы жұлдыздары дискілерінде атомдар мен иондар динамикасына бүгілген жарық қысымының әсері.....   | 55  |
| <i>Демченко Б.И., Шестакова Л.И.</i> , Күн маңындағы сублимация процессінде оливин тозақ бөлшектерінің орбиталық дамуы .....  | 64  |
| <i>Шестакова Л.И., Демченко Б.И.</i> , А тобы жұлдыздары маңындағы сублимация процессінде силикатты тозақ бөлшектерінің орбиталық дамуы.....  | 73  |
| <i>Минасянц Г.С., Минасянц Т.М., Томозов В.М.</i> Күннің минимум белсенді кезіндегі иондық энергиямен Fe/O қатынасының өзгеруі. I. күнде дақтар жоқ болғанда Fe және O иондарының энергетикалық спектрлері..... | 81  |
| <i>Минасянц Г.С., Минасянц Т.М., Томозов В.М.</i> Күн белсенділігі минимумында иондар қуатымен Fe/O мәнінің өзгеруі. II. Циклдің минимумында ғарыш сәулелерінің аномалды компоненттерінің ролі.....             | 86  |
| <i>Тейфель В.Г., Каримов А.М., Харитонов Г.А.</i> , Сатурндағы аммиактың жұтылуы – 2009 жылы күн мен түннің теңелуі кезеңінде ендік вариациялар асимметриясы .....  | 91  |
| <i>Каримов А.М., Лысенко П.Г., Тейфель В.Г.</i> , Сатурнның солтүстік жартышары - 2015 жылы метан және аммиактың жұтылуы .....  | 97  |
| <i>Вдовиченко В.Д., Кириенко Г.А., Лысенко П.Г.</i> 2016 жылдың көріну маусымында юпитер дискісі бойынша метанның-аммиактың жұтылуын зерттеу I. Экватор аймағы .....  | 104 |
| <i>Вдовиченко В.Д., Кириенко Г.А., Лысенко П.Г.</i> жылдың көріну маусымында юпитер дискісі бойынша метанның-аммиактың жұтылуын зерттеу. II. Ендік вариациялар .....  | 110 |
| <i>Вдовиченко В.Д., Кириенко Г.А., Лысенко П.Г.</i> 2016 жылдың көріну маусымында Юпитерде метан-аммиак жұтылуын зерттеу III. Үлкен Қызыл Дақ (ҮҚД).....  | 118 |
| <i>Демченко Б.И., Воропаев В.А., Комаров А.А., Молотов И.Е., Серебрянский А.В., Усольцева Л.А.</i> , Көптеген геотұрақты серіктердің кейбір сипаттамалары.....  | 124 |
| <i>Демченко Б.И., Комаров А.А., Нифонтова М.В., Усольцева Л.А.</i> , Көру шегі аз CCD-матрицада ГТС бақылауларының астрометриялық өңдеулерінің әртүрлі әдістерінің салыстырмалы талдауы.....                    | 129 |
| <i>Демченко Б.И., Комаров А.А., Кругов М.А., Рева И.В., Серебрянский А.В., Усольцева Л.А.</i> , Тянь-Шань Астрономиялық Обсерваториясы бекетінде геотұрақты серіктерді бақылау жағдайы.....                     | 135 |
| <i>Шомищева С.А., Рева И.В., Кондратьева Л.Н., Отебай А.Б.</i> , Тянь-Шань Астрономиялық Обсерваториясының 1-метрлік телескобында фотометрлік жүйесін стандарттау.....  | 140 |
| <i>Терещенко В.М.</i> , SSP-5A фотоэлектрлік фотометрі жұмысының сипаттамасы және ерекшеліктері.....  | 146 |
| <i>Терещенко В.М., Шамро А.В.</i> , Абсолютті өлшемдер үшін спектрограф. Оптика-механикалық блоктың сызбасы және құрылымы.....  | 155 |

### Теориялық зерттеулер

|   |     |
|---|-----|
| <i>Қалдыбекова Б.Қ., Решетова Г.В.</i> Арнайы ішектен жасалған тордың сандық нәтижелері.....  | 160 |
| <i>Бакирова Э.А., Қадырбаева Ж.М.</i> Жүктелген дифференциалдық теңдеулер үшін сызықты көпнүктелі шеттік есептің шешілімділігі туралы.....  | 168 |
| <i>Бесбаев Г.А., Көпжасарова А.А., Сапрыгина М.Б., Шалданбаев А.Ш.</i> Гурса операторының Крейн кеңістігіндегі жалқылығы туралы.....  | 176 |
| <i>Жұмәлі А.С., Решетова Г.В.</i> Жерасты ерітінділеудің микроскопиялық динамикасын сандық моделдеу.....  | 188 |
| <i>Бақтыбаев Қ., Дәлелханқызы А., Қиқымова І., Мырзагулов А.</i> Әсерлесуші бозондар моделін уран ядросының деформацияланған изотоптарына қолдану.....                            | 195 |
| <i>Көпжасарова А.А., Бесбаев Г.А., Абылкасымова Э. А., Шалданбаев А.Ш.</i> Толқын теңдеуінің шартарапты волтерлі есептерінің Крейннің кеңістігіндегі спектралдік таралымдары..... | 203 |
| <i>Шоманбаева М.Т., Көпжасарова А.А., Бесбаев Г.А., Шалданбаев А.Ш.</i> Толқындық теңдеуінің шартарапты шекаралық есебінің спектрлік қасиеттері.....                              | 213 |
| <b>Қазақстанның астрономиялық ғылым 75 жыл.</b> .....   | 224 |

СОДЕРЖАНИЕ

Исследование звезд и туманностей

|  |    |
|--|----|
| <i>Серебрянский А.В., Гайнуллина Е.Р., Халикова А.В.</i> , Переменная звезда TYC3215-906-1: анализ кривой блеска классификация.....            | 5  |
| <i>Кондратьева Л.Н., Рспаев Ф.К., Аймуратов Е.К., Отебай А.Б.</i> , Результаты спектральных и фотометрических наблюдений объекта V725 Тау..... | 12 |
| <i>Кондратьева Л.Н., Рспаев Ф.К., Аймуратов Е.К.</i> , Переменность планетарной туманности M1-65 .....   | 22 |
| <i>Павлова Л.А.</i> , Влияние магнитных полей на формирование околосветных структур .....  | 29 |
| <i>Кокумбаева Р.И., Хруслов А.В., Кусакин А.В.</i> , Две новые переменные звезды GSC 3601-01531 и GSC 3601-01504... ..                         | 35 |

Проблемы небесной механики и динамики звездных систем

|  |    |
|--|----|
| <i>Дубовиченко С.Б., Джазаиров-Кахраманов А.В., Буркова Н.А., Ткаченко А.С.</i> , Радиационный $^2\text{H}^3\text{He}$ захват при астрофизических энергиях ..... | 41 |
| <i>Зулыхаров А.Т., Коньсбаев Т.К., Чечин Л.М.</i> , Оценка времени релаксации галактик с учетом темной материи.....  | 50 |

Физика Солнца и тел солнечной системы

|   |     |
|---|-----|
| <i>Шестакова Л.И., Демченко Б.И.</i> , Действие светового давления на динамику атомов и ионов в осколочных дисках звезд класса А.....   | 55  |
| <i>Демченко Б.И., Шестакова Л.И.</i> , Орбитальная эволюция пылевых частиц оливина в процессе сублимации около Солнца .....   | 64  |
| <i>Шестакова Л.И., Демченко Б.И.</i> , Орбитальная эволюция силикатных пылевых частиц в процессе сублимации около звезд класса А .....  | 73  |
| <i>Минасянц Г.С., Минасянц Т.М., Томозов В.М.</i> Изменение отношения Fe/O с энергией ионов в минимуме солнечной активности. I. Энергетические спектры ионов Fe и O при отсутствии пятен на Солнце..... | 81  |
| <i>Минасянц Г.С., Минасянц Т.М., Томозов В.М.</i> Изменение отношения Fe/O с энергией ионов в минимуме солнечной активности. II. Роль аномальной компоненты космических лучей в минимуме цикла.....     | 86  |
| <i>Тейфель В.Г., Каримов А.М., Харитонов Г.А.</i> , Аммиачное поглощение на Сатурне - асимметрия широтных вариаций в период равноденствия 2009 года.....  | 91  |
| <i>Каримов А.М., Лысенко П.Г., Тейфель В.Г.</i> , Северное полушарие Сатурна - поглощение метана и аммиака в 2015 году .....  | 97  |
| <i>Вдовиченко В.Д., Кириенко Г.А., Лысенко П.Г.</i> Исследование молекулярного поглощения по диску Юпитера в сезон видимости 2016 года I. экваториальная область.....                                   | 104 |
| <i>Вдовиченко В.Д., Кириенко Г.А., Лысенко П.Г.</i> , Исследование молекулярного поглощения на Юпитере в сезон видимости 2016 года II. Широтные вариации.....   | 110 |
| <i>Вдовиченко В.Д., Кириенко Г.А., Лысенко П.Г.</i> Исследование молекулярного поглощения на Юпитере в сезон видимости 2016 года. III. Большое Красное Пятно (БКП) .....                                | 118 |
| <i>Демченко Б.И., Воропаев В.А., Комаров А.А., Молотов И.Е., Серебрянский А.В., Усольцева Л.А.</i> , Некоторые характеристики множества геостационарных спутников.....                                  | 124 |
| <i>Демченко Б.И., Комаров А.А., Нифонтова М.В., Усольцева Л.А.</i> , Сравнительный анализ различных методов астрометрической обработки наблюдений ГСС на CCD-матрице с малым полем зрения.....          | 129 |
| <i>Демченко Б.И., Комаров А.А., Кругов М.А., Рева И.В., Серебрянский А.В., Усольцева Л.А.</i> , Условия наблюдений геостационарных спутников на пункте Тянь-Шанская Астрономическая Обсерватория.....   | 135 |
| <i>Шомищева С.А., Рева И.В., Кондратьева Л.Н., Отебай А.Б.</i> , Стандартизация фотометрической системы 1-метрового телескопа Тянь-Шанской Астрономической Обсерватории.....                            | 140 |
| <i>Терещенко В.М.</i> , Характеристики и особенности работы фотоэлектрического фотометра SSP-5A .....   | 146 |
| <i>Терещенко В.М., Шамро А.В.</i> , Спектрограф для абсолютных измерений. Схема и конструкция оптико-механического блока.....   | 152 |

Теоретические исследования

|  |            |
|--|------------|
| <i>Калдыбекова Б. К., Решетова Г. В.</i> Численные результаты специальной сетки из струн.....  | 160        |
| <i>Бакирова Э.А., Кадирбаева Ж.М.</i> О разрешимости линейной многоточечной краевой задачи для нагруженных дифференциальных уравнений.....                                 | 168        |
| <i>Бесбаев Г.А., Көпжасарова А.А., Сапрыгина М.Б., Шалданбаев А.Ш.</i> О самосорядженности оператора Гурса в пространстве Крейна.....                                      | 176        |
| <i>Жумали А.С., Решетова Г.В.</i> Численное моделирование микроскопической динамики подземного выщелачивания.....  | 188        |
| <i>Бактыбаев К., Далелханкызы А., Кикымова I., Мырзабаев А.</i> Применение модели взаимодействующих бозонов в деформированных изотопах ядра урана.....                     | 195        |
| <i>Көпжасарова А.А., Бесбаев Г.А., Абылкасымова Э. А., Шалданбаев А.Ш.</i> Спектральные разложения решения вольтерровых нелокальных краевых задач волнового уравнения..... | 203        |
| <i>Шомамбаева М.Т., Көпжасарова А.А., Бесбаев Г.А., Шалданбаев А.Ш.</i> Спектральные свойства нелокальной краевой задачи волнового уравнения .....                         | 213        |
| <b>75 лет казахстанской астрономической науке.....</b>   | <b>224</b> |

## CONTENTS

## Investigation of stars and nebulae

|  |    |
|--|----|
| <i>Serebryanskiy A.V., Gaynullina E.R., Khalikova A.V.</i> Variable star TYC3215-906-1: light curve analyses and classification .....        | 5  |
| <i>Kondratyeva L., Rspaev F., Aimuratov Ye., Otebay A.</i> Results of the spectral and photometric observations of the object V725 Tau ..... | 12 |
| <i>Kondratyeva L., Rspaev F., Aimuratov Ye.</i> , Variability of the planetary nebula M1-65.....   | 22 |
| <i>Pavlova L.A.</i> , The influents magnetic field on the forming circumstellar structure.....   | 29 |
| <i>Kokumbaeva R.I., Khruslov A.V., Kusakin A.V.</i> , GSC 3601-01531 and GSC 3601-01504, two new variable stars.....                         | 35 |

## Problems of celestial mechanics and dynamics of stellar systems

|   |    |
|---|----|
| <i>Dubovichenko S.B., Dzhazairov-Kakhramanov A.V., Burkova N.A., Tkachenko A.S.</i> , Radiative ${}^2\text{H}^3\text{He}$ capture at astrophysical energies ..... | 41 |
| <i>Zulpykharov A. T., Konysbayev T.K., Chechin L.M.</i> The relaxation time estimation for galaxies with account of Dark matter.....                              | 50 |

## Physics of sun and bodies of the Solar system

|   |     |
|---|-----|
| <i>Shestakova L.I., Demchenko B.I.</i> , The action of radiation pressure on the dynamics of atoms and ions in debris disks of A-type stars.....  | 55  |
| <i>Demchenko B.I., Shestakova L.I.</i> , Orbital evolution of olivine dust grain during sublimation process near the Sun.....   | 64  |
| <i>Shestakova L.I., Demchenko B.I.</i> , Orbital evolution of silicate dust particles during sublimation near A-type stars.....   | 73  |
| <i>Minasyants G.S., Minasyants T.M., Tomozov V.M.</i> Variations of Fe/O Ratio with Ion's Energies in the Solar Activity Minimum. I. Energy Spectra of Fe and O Ions on the Spotless Sun .....                      | 81  |
| <i>Minasyants G.S., Minasyants T.M., Tomozov V.M.</i> Variations of Fe/O Ratio with Ion's Energies in the Solar Activity Minimum. II. Role of anomalous component of the cosmic rays in a cycle minimum.....        | 86  |
| <i>Tejfe V.G.I., Karimov A.M., Kharitonova G.A.</i> The ammonia absorption in Saturn – an asymmetry of latitudinal variations at the 2009 equinox.....  | 91  |
| <i>Karimov A.M., Lysenko P.G., Tejfe V.G.I., Kharitonova G.A.</i> , Northern hemisphere of SATURN – the methane and ammonia absorption in 2015.....   | 97  |
| <i>Vdovichenko V.D., Kirienko G.A., Lysenko P.G.</i> , The study of molecular absorption over Jovian disk in season of 2016 visibility. I. Equatorial area.....   | 104 |
| <i>Vdovichenko V.D., Kirienko G.A., Lysenko P.G.</i> The study of molecular absorption on Jupiter in visibility season of 2016. II. Latitudinal variations.....   | 110 |
| <i>Vdovichenko V.D., Kirienko G.A., Lysenko P.G.</i> The study of molecular absorption on Jupiter in visibility season of 2016. III. Great Red Spot (GRS).....  | 118 |
| <i>Demchenko B. I., Komarov A. A., Molotov I. E., Serebryansky A. V., Usoltseva L. I., Voropaev V.A.</i> Some features of geostationary satellites ensemble.....  | 124 |
| <i>Demchenko B. I., Komarov A. A., Nifontova M.V., Usoltseva L. I.</i> , Comparative analysis of several methods of astrometric processing of the GSS observations using CCD-cameras with narrow field of view..... | 129 |
| <i>Demchenko B. I., Komarov A. A., Krugov M.A., Reva I.V., Serebryansky A. V., Usoltseva L. I.</i> , Condition of observations of geostationary satellites at Tien Shan astronomical observatory.....               | 135 |
| <i>Shomshenkova S. A., Reva I.V., Kondratyeva L.N., Otebay A.B.</i> , Standardization of the photometric system of the 1-meter telescope of Tien-Shan Astronomical Observatory.....                                 | 140 |
| <i>Tereschenko V. M.</i> , The characteristics and peculiarities of the photoelectrical photometer SSP-5A operation.....  | 146 |
| <i>Tereschenko V. M., Shamro A. V.</i> , Spectrograph for absolute measurements. Scheme and construction of the optic-mechanic block.....   | 152 |

## Theoretical studies

|  |     |
|--|-----|
| <i>Kaldybekova B.K., Reshetova G. V.</i> Numerical results of special grid of strings.....   | 160 |
| <i>Bakirova E.A., Kadirbayeva Zh.M.</i> On a solvability of linear multipoint boundary value problem for the loaded differential equations.....  | 168 |
| <i>Besbayev G. A., Kopzhasarova A.A., Saprygina M.B., Shaldanbayev A.Sh.</i> On self-conjugation of the operator of goursat in crane space .....                                       | 176 |
| <i>Zhumali A.S., Reshetova G.V.</i> Numerical modelling of microscopic dynamics of in-situ leaching.....   | 188 |
| <i>Baktybaev K., Dalelkhankyzy A., Kyqymova I., Myrzabaev A.</i> Applying the model of interacting bosons in a deformed nucleus of uranium isotopes.....                               | 195 |
| <i>Kopzhasarova A.A., Besbayev G. A., Abylkassymova E.A., Shaldanbayev A.SH.</i> Spectral resolutions of solution of voltaire nonlocal boundary value problems of a wave equation..... | 203 |
| <i>Shomanbayeva M. T., Kopzhasarova A.A., Besbayev G. A., Shaldanbayev A.Sh.</i> Spectral properties of a nonlocal boundary value problem of a wave equation.....                      | 213 |
| <b>75 years of Kazakhstan's astronomical science</b> .....   | 224 |

**Publication Ethics and Publication Malpractice  
in the journals of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan**

For information on Ethics in publishing and Ethical guidelines for journal publication see <http://www.elsevier.com/publishingethics> and <http://www.elsevier.com/journal-authors/ethics>.

Submission of an article to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan implies that the described work has not been published previously (except in the form of an abstract or as part of a published lecture or academic thesis or as an electronic preprint, see <http://www.elsevier.com/postingpolicy>), that it is not under consideration for publication elsewhere, that its publication is approved by all authors and tacitly or explicitly by the responsible authorities where the work was carried out, and that, if accepted, it will not be published elsewhere in the same form, in English or in any other language, including electronically without the written consent of the copyright-holder. In particular, translations into English of papers already published in another language are not accepted.

No other forms of scientific misconduct are allowed, such as plagiarism, falsification, fraudulent data, incorrect interpretation of other works, incorrect citations, etc. The National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan follows the Code of Conduct of the Committee on Publication Ethics (COPE), and follows the COPE Flowcharts for Resolving Cases of Suspected Misconduct ([http://publicationethics.org/files/u2/New\\_Code.pdf](http://publicationethics.org/files/u2/New_Code.pdf)). To verify originality, your article may be checked by the Cross Check originality detection service <http://www.elsevier.com/editors/plagdetect>.

The authors are obliged to participate in peer review process and be ready to provide corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. All authors of a paper should have significantly contributed to the research.

The reviewers should provide objective judgments and should point out relevant published works which are not yet cited. Reviewed articles should be treated confidentially. The reviewers will be chosen in such a way that there is no conflict of interests with respect to the research, the authors and/or the research funders.

The editors have complete responsibility and authority to reject or accept a paper, and they will only accept a paper when reasonably certain. They will preserve anonymity of reviewers and promote publication of corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. The acceptance of a paper automatically implies the copyright transfer to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.

The Editorial Board of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan will monitor and safeguard publishing ethics.

Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайтах:

[www.nauka-nanrk.kz](http://www.nauka-nanrk.kz)

<http://www.physics-mathematics.kz>

<http://road.issn.org/issn/2518-1726>

Редактор *М. С. Ахметова, Д.С. Аленов, Т.А. Апендиев*  
Верстка на компьютере *А.М. Кульгинбаевой*

Подписано в печать 25.09.2016.  
Формат 60x881/8. Бумага офсетная. Печать – ризограф.  
14 п.л. Тираж 300. Заказ 5.