

<http://road.issn.org/issn/2518-1726>

ISSN 1991-346X

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ  
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ

# Х А Б А Р Л А Р Ы

---

---

## ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК  
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES  
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА  
СЕРИЯСЫ**



**СЕРИЯ**

**ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ**



**PHYSICO-MATHEMATICAL  
SERIES**

**5 (309)**

**ҚЫРКҮЙЕК – ҚАЗАН 2016 ж.  
СЕНТЯБРЬ – ОКТЯБРЬ 2016 г.  
SEPTEMBER – OCTOBER 2016**

1963 ЖЫЛДЫҢ ҚАҢТАР АЙЫНАН ШЫҒА БАСТАҒАН  
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1963 ГОДА  
PUBLISHED SINCE JANUARY 1963

ЖЫЛЫНА 6 РЕТ ШЫҒАДЫ  
ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД  
PUBLISHED 6 TIMES A YEAR

АЛМАТЫ, ҚР ҰҒА  
АЛМАТЫ, НАН РК  
ALMATY, NAS RK

Б а с р е д а к т о р ы  
ф.-м.ғ.д., проф., ҚР ҰҒА академигі **Ғ.М. Мұтанов**

Р е д а к ц и я а л қ а с ы:

**Жұмаділдаев А.С.** проф., академик (Қазақстан)  
**Кальменов Т.Ш.** проф., академик (Қазақстан)  
**Жантаев Ж.Ш.** проф., корр.-мүшесі (Қазақстан)  
**Өмірбаев У.У.** проф. корр.-мүшесі (Қазақстан)  
**Жүсіпов М.А.** проф. (Қазақстан)  
**Жұмабаев Д.С.** проф. (Қазақстан)  
**Асанова А.Т.** проф. (Қазақстан)  
**Бошкаев К.А.** PhD докторы (Қазақстан)  
**Сұраған Д.** PhD докторы (Қазақстан)  
**Quevedo Hernando** проф. (Мексика),  
**Джунушалиев В.Д.** проф. (Қырғыстан)  
**Вишневский И.Н.** проф., академик (Украина)  
**Ковалев А.М.** проф., академик (Украина)  
**Михалевич А.А.** проф., академик (Белорус)  
**Пашаев А.** проф., академик (Әзірбайжан)  
**Такибаев Н.Ж.** проф., академик (Қазақстан), бас ред. орынбасары  
**Тигиняну И.** проф., академик (Молдова)

Главный редактор  
д.ф.-м.н., проф. академик НАН РК **Г.М. Мутанов**

Редакционная коллегия:

**Джумадильдаев А.С.** проф., академик (Казахстан)  
**Кальменов Т.Ш.** проф., академик (Казахстан)  
**Жантаев Ж.Ш.** проф., чл.-корр. (Казахстан)  
**Умирбаев У.У.** проф. чл.-корр. (Казахстан)  
**Жусупов М.А.** проф. (Казахстан)  
**Джумабаев Д.С.** проф. (Казахстан)  
**Асанова А.Т.** проф. (Казахстан)  
**Бошкаев К.А.** доктор PhD (Казахстан)  
**Сураган Д.** доктор PhD (Казахстан)  
**Quevedo Hernando** проф. (Мексика),  
**Джунушалиев В.Д.** проф. (Кыргызстан)  
**Вишневский И.Н.** проф., академик (Украина)  
**Ковалев А.М.** проф., академик (Украина)  
**Михалевич А.А.** проф., академик (Беларусь)  
**Пашаев А.** проф., академик (Азербайджан)  
**Такибаев Н.Ж.** проф., академик (Казахстан), зам. гл. ред.  
**Тигиняну И.** проф., академик (Молдова)

**Известия НАН РК. Серия физико-математическая». ISSN 1991-346X**

<http://road.issn.org/issn/2518-1726>

Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы)

Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации и архивов Министерства культуры и информации Республики Казахстан №5543-Ж, выданное 01.06.2006 г.

Периодичность: 6 раз в год.

Тираж: 300 экземпляров.

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, ком. 219, 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,  
[www.nauka-nanrk.kz](http://www.nauka-nanrk.kz) / [physics-mathematics.kz](http://physics-mathematics.kz)

---

© Национальная академия наук Республики Казахстан, 2016

Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75.

E d i t o r i n c h i e f  
doctor of physics and mathematics, professor, academician of NAS RK **G.M. Mutanov**

E d i t o r i a l b o a r d:

**Dzhumadildayev A.S.** prof., academician (Kazakhstan)  
**Kalmenov T.Sh.** prof., academician (Kazakhstan)  
**Zhantayev Zh.Sh.** prof., corr. member. (Kazakhstan)  
**Umirbayev U.U.** prof. corr. member. (Kazakhstan)  
**Zhusupov M.A.** prof. (Kazakhstan)  
**Dzhumabayev D.S.** prof. (Kazakhstan)  
**Asanova A.T.** prof. (Kazakhstan)  
**Boshkayev K.A.** PhD (Kazakhstan)  
**Suragan D.** PhD (Kazakhstan)  
**Quevedo Hernando** prof. (Mexico),  
**Dzhunushaliyev V.D.** prof. (Kyrgyzstan)  
**Vishnevskiy I.N.** prof., academician (Ukraine)  
**Kovalev A.M.** prof., academician (Ukraine)  
**Mikhalevich A.A.** prof., academician (Belarus)  
**Pashayev A.** prof., academician (Azerbaijan)  
**Takibayev N.Zh.** prof., academician (Kazakhstan), deputy editor in chief.  
**Tiginyanu I.** prof., academician (Moldova)

**News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physical-mathematical series.**  
**ISSN 1991-346X**

<http://road.issn.org/issn/2518-1726>

Owner: RPA "National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan" (Almaty)

The certificate of registration of a periodic printed publication in the Committee of information and archives of the Ministry of culture and information of the Republic of Kazakhstan N 5543-Ж, issued 01.06.2006

Periodicity: 6 times a year

Circulation: 300 copies

Editorial address: 28, Shevchenko str., of. 219, 220, Almaty, 050010, tel. 272-13-19, 272-13-18,  
[www.nauka-nanrk.kz](http://www.nauka-nanrk.kz) / [physics-mathematics.kz](http://physics-mathematics.kz)

---

© National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, 2016

Address of printing house: ST "Aruna", 75, Muratbayev str, Almaty

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

## PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 5, Number 309 (2016), 213 – 223

UDC 517.956.32

**M. T. Shomanbayeva, A.A. Kopzhasarova, G. A. Besbayev, A.Sh. Shaldanbayev**M. Auezov South Kazakhstan State University  
shaldanbaev51@mail.ru**SPECTRAL PROPERTIES OF A NONLOCAL BOUNDARY VALUE  
PROBLEM OF A WAVE EQUATION**

**Abstract.** The wave equations are used in various branches of science and techniques, such as hydrologies, seismology and when studying the dynamics of an advance of waves in liquid and gas. Nevertheless, boundary value problems of this equation are little studied. In this work an attempt of studying of spectral properties of a nonlocal problem is made by methods of the functional analysis.

**Keywords:** wave equation, nonlocal boundary conditions, regular solubility, range, basis of Riesz.

ӘОЖ 517.956.32

**М.Т. Шоманбаева, А.А. Көпжасарова, Г.А. Бесбаев, А.Ш. Шалданбаев**

Оңтүстік-Қазақстан мемлекеттік университеті

**ТОЛҚЫНДЫҚ ТЕНДЕУІНІҢ ШАРТАРАПТЫ ШЕКАРАЛЫҚ  
ЕСЕБІНІҢ СПЕКТРЛІК ҚАСИЕТТЕРІ**

**Аннотация.** Толқындық теңдеулер гидрология, сейсмология сияқты ғылым мен техниканың әр түрлі салаларында кездеседі, алайда, сұйық және газ толқындардың таралу динамикасын зерттегенде теңдеудің осы шеттік мәселесі аз зерттелген. Шартарапты мәселелеріне арналған жұмыстар өте аз. Бұл мақалада функционалдық талдау әдістерімен шартарапты есептің спектрлік қасиеттерін зерттеуге әрекет жасалынды.

**Түйін сөздер:** толқындық теңдеулер, шартарапты шекаралық шарттар, тұрақты шешілуі, спектр, Рисс базисі.

**1.Кіріспе.** Гиперболалық теңдеулердің шекаралық есептері аз зерттелген. Мұның бір себебі, оның характеристикалық формасының бір таңбалы болмауында болса керек, дәл осы себепті, вариациялық әдістер-де жарамайды. Тағы да, бір себебі [1], ертеректе француз ғалымы Ж-Адамар өз еңбектерінде гиперболалық теңдеулерге бастапқы есептер қолайлы, екеніне, назар аударған.

Өткен ғасырдың 60-жылдарынан бастап, математикалық физика саласына сызықтық операторлар теориясы қолданыла бастады, оған мұрындық болған К. Фридрихс [2], Дж.Ф. Нейман [3] және С.Л.Соболевтің [4] еңбектері болса керек. Нейманның еңбектерінен бастау алған, М.И.Вишик [5] өзінің әйгілі операторларды ширату теориясын жасады, бұл еңбек Қазақстанда М.Өтелбаев [6] пен Калменовтың [7] еңбектерінде жалғасын тапты. Өкінішке орай, бұл теориялар-да гиперболалық теңдеулерде сәтсіздікке ұшырады, оның себебі мынада. Сызықтық операторлар теориясын шекаралық есептерге қолданған сәтте кішік (минимальный) оператор мен ұлық (максимальный) операторларды тұрғызу қажет болады,

сонда  $L_0$  кішік оператор болса оның сыңары (сопряженный)  $L_0^*$  ұлық оператор, болады, яғни көп жағдайда (әркез емес)  $L_0 \subset L_0^*$  шарты орындалады. Сонда біздің шекаралық есебіміз осы екі оператордың арасында жатуы керек, яғни

$$L_0 \subset L \subset L_0^*$$

Әлгі, операторларды шыйрату (кеңіту) теориясында  $L_0$  операторының қайтымды болуы талап етіледі [7,57 б], яғни шектеулі  $L_0^{-1}$  - кері операторы бар болуы қажет, бұл шарт әркез орындала бермейді, мысалы,

$$L_0 u = u_{xx} - u_{yy}, \quad D(L_0) = C_0^\infty(\Omega),$$

$\Omega = [0,1] \times [0,1]$ , болса, онда

$$u_{xx}(x, y) = \sin m\pi x \cdot \sin n\pi y, \quad n, m = 1, 2, \dots$$

функциялары үшін

$$L_0 u_{mn} = \pi^2(m^2 - n^2)u_{mn}, \quad m, n = 1, 2, \dots$$

теңдіктері орындалары, айдан анық, мұнан, біз  $\lambda = 0$  шамасының  $L_0$  операторының шексіз еселі меншікті мәні екенін көреміз, яғни  $L_0^{-1}$  операторы жоқ.

Десек-те, интегралдық кейіп пен Риман – Адамар, және алғы бағалау әдістері бойынша, гиперболалық теңдеулердің біраз шекаралық есептері Т.Ш. Калменовтың еңбектерінде зерттеледі, және оның монографиясында [7] көрініс тапты. Сондай-ақ, [8-15] еңбектер-де осы мәселенің төңірегінде, біздің зерттеуіміз барысында [16-19] еңбектер басшылыққа алынды, зерттеу нысанының кейбір мәселелері [20] еңбекте қарастырылды.

Толқын теңдеуінің бір ерекше қасиеті, оның нақты характеристикаларының болуында, алғы шартты, параллел жатқан екі характеристиканың тек біреуінде ғана беруге болады, екіншісі бос болуы керек, міне осы жай толқын теңдеуіне шартарапты (нелокальный) есепті қоюға негіз болды.

Бұрынырақ [14], [21], [22] біз толқын теңдеуінің шартарапты есебінің тұрлаулы (регулярный) шешілетінін көрсеткенбіз, яғни шешімнің бар екенін, және оның бастапқы шарттарға үзіксіз тәуелді екенін дәлелдегенбіз.

Бұл еңбекте, оның спектралдік қасиеттерін зерттемекпіз.

### 1. Есептің қойылуы.

Мына,

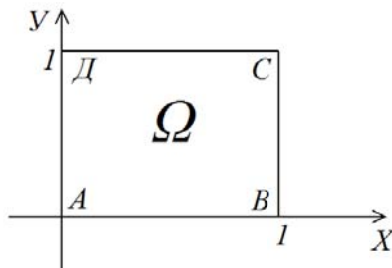
$$Lu = u_{xy} = f(x, y)$$

толқын теңдеуінің, қабырғалары  $AB: u = 0; BC: x = 1; CD: y = 1; DA: x = 0$  болатын характеристикалық  $\Omega$  төртбұрышында, мынадай,

$$Lu = u_{xy} = f(x, y), (x, y) \in \Omega \tag{1}$$

$$u|_{AB} = \alpha u|_{CD}, u|_{AD} = \beta u|_{BC} \tag{2}$$

шартарапты шекаралық есепті қарастырайық, мұндағы  $\alpha, \beta \neq 1$  комплекс сандар  $f(x, y) \in L^2(\Omega)$  (1-суретке қара).



1-сурет

Егер  $|\alpha|=1, |\beta|=1$  болса, онда бұл шекаралық есепке сәйкес оператордың жалқы екені белгілі [7]. Онан бұрынырақ [14],[21]  $\alpha \neq 1, \beta \neq 1$  сәтінде, әсіре үзіксіз кері  $L^{-1}$  операторы бар екенін көрсеткенбіз. Мақсатымыз, осы есептің шешімінің спектралдік таралымын алу.

### 2. Зерттеу әдістері

Зерттеу барысында, сызықтық жалқы операторлар теориясы мен Гилберт-Шмидтің теоремасы қолданылды, сондай ақ, Фүренің айнымалыларды бөліктеу әдісі де өз кезегінде кәдеге жарады.

### 3. Алынған нәтижелер.

**Теорема 1.** Егер

$$\begin{aligned} 1) & (1-\alpha)(1-\beta) \neq 0 \\ 2) & |\alpha|=1, |\beta|=1 \end{aligned}$$

болса, онда (1)-(2) шартарапты шекаралық есебінің меншікті векторлары  $L^2(\Omega)$  кеңістігінде ортонормаланған базис құрайды.

**Теорема 2.** Егер

$$\begin{aligned} 1) & (1-\alpha)(1-\beta) \neq 0 \\ 2) & |\alpha|=1, |\beta|=1 \end{aligned}$$

болса, онда толқын теңдеуінің (1)-(2) шартарапты шекаралық есебі әлді шешіледі, және ол шешім, мынадай,

$$u(x, y) = \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(f, u_{nm})}{\lambda_{nm}} u_{nm}(x, y) \quad (7)$$

болады, мұндағы

$$\begin{aligned} \lambda_{nm} &= -(2n\pi + \varphi_0)(2m\pi + \psi_0), J_m \varphi_0 = 0, J_m \psi_0 = 0, \\ m, n &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad \varphi_0 = \arg \frac{1}{\beta}, \psi_0 = \arg \frac{1}{\alpha}; \\ u_{nm}(x, y) &= \exp \{i(2n\pi x + 2m\pi y + \varphi_0 x + \psi_0 y)\}. \end{aligned}$$

**Теорема 3.** Егер

$$\alpha \cdot \beta(1-\alpha)(1-\beta) \neq 0$$

болса, онда (1)-(2) шартарапты шекаралық есептің меншікті векторлары  $L^2(\Omega)$  кеңістігінде Рисстің базисін құрайды. Есептің өзі әлді шешіледі, және шешім, мынадай,

$$u(x, y) = \sum_{m, n} \frac{(f, v_{mn})}{\lambda_{mn}} u_{mn}(x, y)$$

болады, мұндағы,

$$\begin{aligned} Lu_{mn} &= \lambda_{mn} u_{mn}, L^+ v_{mn} = \bar{\lambda}_{mn} v_{mn}, \\ u_{mn}(x, y) &= |\beta|^{-x} |\alpha|^{-y} e^{i\varphi_0 x + i\psi_0 y} e_{mn}(x, y), \end{aligned}$$

$$v_{mn}(x, y) = |\beta|^x |\alpha|^y e^{i\varphi_0 x + i\psi_0 y} e_{mn}(x, y)$$

$$\varphi_0 = \arg \frac{1}{\beta}, \psi_0 = \arg \frac{1}{\alpha},$$

$$e_{mn}(x, y) = \exp\{2m\pi i x + 2n\pi i y\}.$$

#### 4.Талқысы.

Келесі, теорема көпке белгілі [7].

**Теорема** Егер гилберттік  $H$  кеңістігінде тығыз анықталған тұйық  $A$  операторы қайтымды болса, онда оның сынары  $A^*$  операторы да қайтымды және бұл сәтте, мына,  $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$  теңдік орынды.

**Салдар 1.** Егер  $A^* = A$  болса, онда  $(A^{-1})^* = A^{-1}$ , яғни егер  $A$  жалқы болса, онда  $A^{-1}$  операторы да жалқы.

Егер  $L^{-1}u = 0$  болса, онда  $u = LL^{-1}u = 0$ , демек  $\ker(L^{-1}) = \{0\}$ . Сонымен, кері  $L^{-1}$  оператор жалқы және әсіре үзіксіз, және оның ядросы тек нөлден тұрады. Онда Гилберт-Шмидтің теоремасы бойынша [23], мына, (кезкелген  $u \in L^2(\Omega)$  үшін)

$$L^{-1}u = \sum_{k=1}^{\infty} (u, u_k) \lambda_k u_k \quad (3)$$

теңдік орындалады, мұндағы  $\lambda_k$  –дегеніміз  $L^{-1}$  операторының меншікті мәндері, ал  $u_k$  –соларға сәйкес меншікті векторлары.

Кері оператордың үзіксіздігі мен, мына,  $L^{-1}u_k = \lambda_k u_k, k = 1, 2, \dots$  теңдіктерге назар аударсақ, онда (3) формуладан, мынадай

$$L^{-1}u = \sum_{k=1}^{\infty} (u, u_k) \lambda_k u_k = \sum_{k=1}^{\infty} (u, u_k) L^{-1}u_k = L^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} (u, u_k) u_k$$

қорытынды жасаймыз. Осы теңдікке  $L$  операторы арқылы әсер етсек, онда, мынаны,

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} (u, u_k) u_k$$

көреміз, яғни  $L^{-1}$  операторының меншікті векторлары  $\{u_k\}, k = 1, 2, \dots, H = L^2(\Omega)$  кеңістігінде ортонормаланған базис құрайды.

**Теорема 1.** Егер

$$1) (1 - \alpha)(1 - \beta) \neq 0$$

$$2) |\alpha| = 1, |\beta| = 1$$

болса, онда (1)-(2) шартарапты шекаралық есебінің меншікті векторлары  $L^2(\Omega)$  кеңістігінде ортонормаланған базис құрайды.

Енді  $\lambda_k$  меншікті мәндері мен  $u_k$  –меншікті векторларын табу үшін, мынадай,



$$\begin{cases} u_{xy} = \lambda u(x, y) & (3.6.4) \\ u|_{AB} = \alpha u|_{CD}, u|_{AD} = \beta u|_{BC} & (3.6.5) \end{cases}$$

спектралді есепті қарастырайық. Есепті шешу үшін айнымалыларын бөліктеу әдісін қолданайық, бұл үшін  $u(x, y) = v(x) \cdot \omega(y)$  болсын деп жорыйық.

Шекаралық шарттардан:

$$u|_{AB} = \alpha u|_{CD}, \Rightarrow v(x)\omega(0) = \alpha v(x) \cdot \omega(1), v(x)[\omega(0) - \alpha \cdot \omega(1)] = 0,$$

демек,  $\omega(0) = \alpha\omega(1)$ .

Екінші шекаралық шарттан:

$$u|_{AD} = \beta u|_{BC}, \Rightarrow u|_{x=0} = \beta u|_{x=1}, v(0)\omega(y) = \beta v(1) \cdot \omega(y),$$

мұнан,  $v(0) = \beta v(1)$ .

Әрі қарай,  $u(x, y) = v(x) \cdot \omega(y)$  функциясын (4) теңдеуге апарып қойсақ, мынадай,

$$\frac{v'(x)}{v(x)} \cdot \frac{\omega'(y)}{\omega(y)} = \lambda$$

болады. Демек,  $v(x)$  пен  $\omega(y)$  функцияларына екі спектралдік есеп аламыз.

$$a) v'(x) = \mu v(x), v(0) - \beta v(1) = 0;$$

$$b) \omega'(y) = \lambda \omega(y), \omega(0) - \alpha \omega(1) = 0.$$

Бұл екі есеп ұқсас, сондықтан тек біріншісін шешейік.

$$v(x) = C \cdot e^{\mu x}, C = const.$$

Осы өрнекті шекаралық шартқа апарып қойсақ, мынадай,

$$C = \beta C \cdot e^{\mu}$$

теңдеуге келеміз, мұнан

$$\beta e^{\mu} - 1 = 0, e^{\mu} = \frac{1}{\beta},$$

$$\Rightarrow \mu_n = \ln \left| \frac{1}{\beta} \right| + i\varphi_0 + 2n\pi i = i\varphi_0 + 2n\pi i, \varphi_0 = \arg \frac{1}{\beta},$$

$$v_n(x) = A_n e^{(2n\pi + \varphi_0)ix}, \operatorname{Im} \varphi_0 = 0.$$

Сол сыйақты жолменен

$$\omega_m(y) = B_m e^{(2m\pi + \psi_0)iy}, \operatorname{Im} \psi_0 = 0,$$

мұндағы  $A_n, B_m$  – тұрақты шамалар. Демек, (4)–(5) есептің меншікті мәндері, мыналар,

$$\lambda_{nm} = -(2n\pi + \varphi_0)(2m\pi + \psi_0), m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

ал меншікті функциялары, мыналар

$$u_{nm}(x, y) = A_n B_m e^{(2n\pi x + 2m\pi y + \varphi_0 x + \psi_0 y)i}, n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

болады. Нормалаушы  $A_n B_m$  коэффициенттерін табайық

$$\|u_{nm}\|_{L^2}^2 = |A_n B_m|^2 \int_0^1 \int_0^1 1 dx dy = 1.$$

Демек, ортонормаланған функциялар, мыналар,

$$u_{nm}(x, y) = \exp \{i(2n\pi x + 2m\pi y + \varphi_0 x + \psi_0 y)\} \quad (6)$$

болады.

**Лемма 1.** Мына,  $\exp \{i(2n\pi + \varphi_0)x\}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  функциялар системасы  $L^2(0,1)$  кеңістігінде толымды.

**Дәлелі.** Мына,

$$\int_0^1 f(x) e^{i(2n\pi + \varphi_0)x} dx = 0, \int_0^1 f(x) e^{i\varphi_0 x} e^{2n\pi i x} dx = 0, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

теңдіктер орындалсын делік. Онда  $t = 2\pi x$  деп соңғы интегралды алмастыру жасасақ, мына,

$$\int_0^{2\pi} f\left(\frac{t}{2\pi}\right) e^{\frac{i\varphi_0 t}{2\pi}} e^{nit} dt = 0, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

теңдіктерді аламыз. Мына,  $\{e^{int}\}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  функциялар системасы  $L^2(0, 2\pi)$  кеңістігінде толымды болғандықтан,  $(0, 2\pi)$  интервалының барлық нүктелерінде дерлік, мына,

$$f\left(\frac{t}{2\pi}\right) e^{\frac{i\varphi_0 t}{2\pi}} = 0$$

теңдік орындалады. Демек,  $(0, 1)$  интервалының барлық нүктелерінде дерлік,  $f(x) = 0$  болады. Лемма дәлелденді.

**Лемма 2.** Мына,  $u_{nm}(x, y), n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  меншікті функциялар системасы  $L^2(\Omega)$  кеңістігінде толымды.

**Дәлелі.**  $L^2(\Omega)$  кеңістігінің белгілі бір  $f(x, y)$  функциясы үшін, мына

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) \bar{u}_{nm}(x, y) dx dy = 0, n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

теңдіктер орындалсын делік. Фубинидің теоремасы бойынша екі еселі интегралды қайталау интегралымен ауыстыруға болады, яғни

$$\int_0^1 e^{i(2n\pi x + \varphi_0 x)} dx \int_0^1 f(x, y) e^{i(2m\pi y + \psi_0 y)} dy = 0.$$

Жоғарыдағы, 1 лемма бойынша, мұнан, барлық  $x$  нүктелерде дерлік, мына

$$\int_0^1 f(x, y) e^{i(2m\pi y + \psi_0 y)} dy = 0$$

теңдік орындалатынын көреміз. Мұнан, барлық  $(x, y) \in L$  нүктелерде дерлік  $f(x, y) = 0$ .

Жоғарыдағы (6) система ортонормаланғандықтан, ол  $L^2(\Omega)$  кеңістігінде ортонормаланған базис құрайды.

**Теорема 2.** Егер

$$1) (1 - \alpha)(1 - \beta) \neq 0$$

$$2) |\alpha| = 1, |\beta| = 1$$

болса, онда толқын теңдеуінің (1)–(2) шартарапты шекаралық есебі әлді шешіледі, және ол шешім, мынадай,

$$u(x, y) = \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(f, u_{nm})}{\lambda_{nm}} u_{nm}(x, y) \quad (7)$$

болады, мұндағы

$$\lambda_{nm} = -(2n\pi + \varphi_0)(2m\pi + \psi_0), J_m \varphi_0 = 0, J_m \psi_0 = 0,$$

$$m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad \varphi_0 = \arg \frac{1}{\beta}, \psi_0 = \arg \frac{1}{\alpha};$$

$$u_{nm}(x, y) = \exp\{i(2n\pi x + 2m\pi y + \varphi_0 x + \psi_0 y)\}.$$

Жоғарыдағы, (7) Фуренің қатары абсолютті және бірқалыпты жыйнақталады, сондықтан  $u(x, y) \in C(\bar{\Omega})$ .

Ілгерірек біз, мына,

$$\alpha\beta(1 - \alpha)(1 - \beta) \neq 0$$

шарт орындалған сәтте кері  $L^{-1}$  операторының бар екенін және оның әсіре үзіксіз екенін көрсеткенбіз [14],[21].

Сондай ақ,  $\alpha\beta \neq 0$  болғандықтан бұл  $L^{-1}$  операторы волтерлі емес [22], яғни меншікті мәндері бар, бірақ аз-ба көп-пе белгісіз. Мұны білуге жалпы теоремалардың күші жетпейді. Жалқы жағдайда, яғни  $|\alpha| = 1, |\beta| = 1$  сәтінде меншікті мәндердің нақты екенін және шексіз көп екенін Гилберт-Шмидтің теоремасы арқылы білдік, ал егер  $|\alpha| \neq 1$  немесе  $|\beta| \neq 1$  болса, бұл теорема өтпейді, сондықтан тікелей есептеуді қажет етеді.

Жоғарыдағы, (1)–(2) есепке сәйкес, мына,

$$u_{xy} = \lambda u(x, y), (x, y) \in \Omega \quad (4)$$

$$u|_{AB} = \alpha u|_{CD}, u|_{AD} = \beta u|_{BC} \quad (5)$$

спектралді есепті қарастырайық, мұндағы  $\alpha, \beta$  мына,

$$\alpha\beta(1 - \alpha)(1 - \beta) \neq 0 \quad (8)$$

шартқа сай комплекс сандар. Былай,  $u(x, y) = v(x) \cdot \omega(y)$  деп жорысақ, мынадай,

$$v'(x) \cdot \omega'(y) = \lambda v(x) \cdot \omega(y)$$

теңдеу аламыз. Шекаралық шарттардан

$$u|_{AB} = \alpha u|_{CD}, \Rightarrow u|_{y=0} = \alpha u|_{y=1}, \Rightarrow$$

$$u(x,0) = v(x)\omega(0) = \alpha u(x,1) = \alpha v(x)\omega(1), \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v(x)[\omega(0) - \alpha\omega(1)] = 0, \Rightarrow \omega(0) - \alpha\omega(1) = 0, \alpha \neq 1$$

Онан соң, былай,  $v'(x) = \mu v(x), \omega'(y) = \nu\omega(y)$  болсын деп жорысак, онда, мынадай,  $\mu \cdot \nu \cdot v(x) \cdot \omega(y) = \lambda v(x) \cdot \omega(y), \rightarrow \lambda = \mu \cdot \nu$  болады.

Демек, (4)–(5) спектралді есебі екі спектралдік есепке бөлінеді.

а)  $v'(x) = \mu v(x), v(0) - \beta v(1) = 0;$

Мұнан  $v(x) = C \cdot e^{\mu x}, C = const$ . Осы өрнекті шекаралық шартқа апарып қойсақ, мына,

$$C - \beta e^{\mu} \cdot C = 0, C(1 - e^{\mu} \cdot \beta) = 0, e^{\mu} = \frac{1}{\beta}, \beta \neq 0$$

тендеуді аламыз. Демек,

$$\mu_m = \ln \frac{1}{\beta} = \ln \left| \frac{1}{\beta} \right| + i \arg \frac{1}{\beta} + 2m\pi i, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Олай болса,

$$v_m(x) = C_m \cdot e^{\mu_m x} = C_m \cdot \left( \frac{1}{|\beta|} \right)^x e^{i \arg \frac{1}{\beta} x} \cdot e^{2m\pi i x} =$$

$$= C_m \cdot |\beta|^{-x} \cdot e^{i \arg \frac{1}{\beta} x} \cdot e^{2m\pi i x}, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

мұндағы  $C_m$  –ерікті тұрақтылар.

Екінші спектралдік есеп, мынадай,

б)  $\omega'(x) = \nu \cdot \omega(y),$   
 $\omega(0) - \alpha\omega(1) = 0$

және, олда, дәл жоғарыдағыдай шешіледі.

$$\omega_n(y) = D_n \cdot |\alpha|^{-y} \cdot e^{i \arg \frac{1}{\alpha} y} \cdot e^{2n\pi i y}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Демек, (4)–(5) спектралдік есептің меншікті функциялары, мынадай,

$$u_{mn}(x, y) = v_m(x)\omega_n(y) = C_m \cdot D_n \cdot |\beta|^{-x} \cdot e^{i\varphi_0 x} \cdot e^{2m\pi i x} \cdot |\alpha|^{-y} \cdot e^{i\psi_0 y} \cdot e^{2n\pi i y} =$$

$$= C_m \cdot D_n \cdot |\beta|^{-x} \cdot |\alpha|^{-y} \cdot e^{i\varphi_0 x + i\psi_0 y} \cdot e^{2m\pi i x + 2n\pi i y}$$

болады. Енді  $C_m = D_n = 1$

$$e_{mn}(x, y) = \exp\{2m\pi i x + 2n\pi i y\}, m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\varphi_0 = \arg \frac{1}{\beta}, \psi_0 = \arg \frac{1}{\alpha}$$

деп белгілеулер енгізсек, онда

$$u_{mn}(x, y) = |\beta|^{-x} \cdot |\alpha|^{-y} \cdot e^{i\varphi_0 x + i\psi_0 y} \cdot e_{mn}(x, y)$$

болады. Жоғарыда,  $\{e_{mn}(x, y)\}, m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  системасының кеңістігінде ортонормаланған базис екенін көргенбіз. Енді, былай,

$$u_{mn}(x, y) = T e_{mn}(x, y) = |\beta|^{-x} \cdot |\alpha|^{-y} \cdot e^{i\varphi_0 x + i\psi_0 y} \cdot e_{mn}(x, y)$$

деп жорып,  $T$  операторын енгізсек, онда оның шектеулі және үзіксіз қайтымды екенін байқаймыз. Демек,  $\{u_{mn}(x, y)\}, m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  системасы  $L^2(\Omega)$  –кеңістігінде Рисстің базисін құрайды [1]. Енді (1)–(2) есептің шешімін осы базисте таратып жазайық.

$$\begin{aligned} u(x, y) &= L^{-1} f(x, y) = \sum_{m, n=-\infty}^{\infty} (L^{-1} f, v_{mn}) u_{mn}(x, y) = \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} (f, (L^{-1})^* v_{mn}) u_{mn}(x, y) = \sum_{m, n} \left( f, \frac{v_{mn}}{\lambda_{mn}} \right) u_{mn}(x, y) = \\ &= \sum_{m, n} \frac{(f, v_{mn})}{\lambda_{mn}} u_{mn}(x, y) \end{aligned}$$

Мұндағы  $\{v_{mn}(x, y)\}$  –дегеніміз сыңарлас есептің шешімі, яғни  $L^* v_{mn} = \lambda_{mn} v_{mn}, m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

**Ескерім 1.** Егер  $\{u_n\}, n = 1, 2, \dots$  ортонормаланған система болса, онда, мына,

$$\varphi_n = T u_n, \psi_m = (T^{-1})^* u_m$$

өзара биортогонал система құрайды.

Шынында да,

$$(\varphi_n, \psi_m) = (T u_n, (T^{-1})^* u_m) = (T^{-1} T u_n, u_m) = (u_n, u_m) = \delta_{nm}$$

Біздің жағдайда

$$T f(x, y) = |\beta|^{-x} |\alpha|^{-y} e^{i\varphi_0 x + i\psi_0 y} f(x, y),$$

демек,

$$T^{-1} g(x, y) = |\beta|^x |\alpha|^y e^{-i\varphi_0 x - i\psi_0 y} g(x, y),$$

мұнан,

$$(T^{-1})^* g(x, y) = |\beta|^x |\alpha|^y e^{i\varphi_0 x + i\psi_0 y} g(x, y)$$

Демек,

$$u_{mn}(x, y) = (T^{-1})^* e_{mn} = |\beta|^x |\alpha|^y e^{i\varphi_0 x + i\psi_0 y} e_{mn}(x, y)$$

деп күтуге болады.

Шынында да, сыңарлас есептің шекаралық шарты, мынадай,

$$v|_{AB} = \frac{1}{\alpha} v|_{CD}, v|_{AD} = \frac{1}{\beta} v|_{BC},$$

демек,

$$\begin{aligned}
 v_{mn}(x, y) &= \left| \frac{1}{\beta} \right|^{-x} \left| \frac{1}{\alpha} \right|^{-y} e^{i \arg \beta x + i \arg \alpha y} e_{mn}(x, y) = \left| \frac{1}{\alpha} = \frac{\bar{\alpha}}{|x|^2} \right| = \\
 &= |\beta|^x |\alpha|^y e^{i \arg \frac{1}{\beta} x + i \arg \frac{1}{\alpha} y} = \\
 &= |\beta|^x |\alpha|^y e^{i \varphi_0 x + i \psi_0 y} e_{mn}(x, y)
 \end{aligned}$$

Сонымен **3- теоремада** дәлелденді.

### 5.Қорытынды.

Толқын теңдеуінің шартарапты шекаралық есебі екі топқа бөлінеді, біріншісінің меншікті функциялары Рисстің базисін құрайды, ал екінші топтағылар вөлтерлі, сондықтан олардың спектрі жоқ деседе болады.

### ӘДЕБИЕТ

- [1] Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений частными производным. М.: Наука, 1978. 352с.
- [2] Friedrichs K. O Symmetric. hyperbolic of Liner differential equations. Comm. Pure Apple 7 Mash., 7(1954), 345-392.
- [3] I. Von Neumann. Allgemeine Eigenwerttheorie Hermit -esher funktional Operatoren, Math, 102, 1929, p.49-131.
- [4] Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М., Наука, 1988.
- [5] Вишик М.И. Об общих краевых задачах для эллиптических уравнений, дифференциальных уравнений, Труды ММО, 1989, 1952, т.1, 152с.
- [6] Отелбаев М. Кальменов Т.Ш. О регулярных краевых задачах для уравнения Лаврентьева - Бицадзе, Дифф. уравнения, 1981, Т.А., №5, с. 873-886.
- [7] Кальменов Т.Ш. Краевые задачи для линейных уравнений в частных производных гиперболического типа, Шымкент: Гылым, 1993, 327 с.
- [8] Кальменов Т.Ш. О спектре одной сопряженной задачи для волнового уравнения. Вестник АН Каз. 1982, №2, с. 63-66.
- [9] Кальменов Т.Ш. Спектр краевых задачи со смещением для волнового уравнения. Диффенц. уравнения. 1983, т19, №1, с.75-78.
- [10] Бияров Б.Н., Кальменов Т.Ш. О нелокальной вольтерровой задаче для гиперболического уравнения, Известия АН Каз ССР, сер. физ-математ, 1988. №5, с.13-16.
- [11] Кальменов Т.Ш. О регулярных краевых задачах для волнового уравнения. Диффенц. уравнения. 1981, т. 17, №6, с.1105-1121.
- [12] Садыбеков М.И, О задаче Дирихле для для волнового уравнения, Диффенц. уравнения . Функцион . анализ и по приложения. Алма-Ата: КазГУ, 1988, т. 17, №6, с.61-70.
- [13] Садыбеков М.И, Кальменов Т.Ш. О задаче Дирихле и нелокальных краевых задачах для волнового уравнения, Диффенц. уравнения. 1990. т. 26, №1. с. 60-65.
- [14] Мелдебекова С., Шалданбаев А.Ш. О регулярной разрешимости одной нелокальной краевой задачи волнового уравнения, Наука и образования ЮК, 2005. №6(46), с.105-109.
- [15] Нахушев А.М. Об одном классе линейных уравненных задач для гиперболического и смешного типов уравнении второго порядка. Нальчих, Эльбурс. 1992, 155 с.
- [16] Мизохата С. Теория уравнений с частным производными, М. Мир, 1977, с. 504.
- [17] Brislown C. Kernels of trace class operators, Proc. Amer. Math. Soc., 1988, v.104, №4, P.1181-1190.
- [18] Лидский В.Б. Несамосопряженные операторы имеющие след. Доклады АН СССР, 1959, т. 105, №3, P.485-488.
- [19] Нерсисян А.Б. К теории интегральных уравнений типа Вольтера. Доклады АН СССР, 1964, т. 155, №5. P.1049-1051.
- [20] Шалданбаев А.Ш. Спектральные разложения корректных- некорректныхначально краевых задач для некоторых классов дифференциальных уравнений, Germanu, Saarbruchen: LAP LAMRET Academic Publishing. http ;dob . d-nb. Dl. Emailinf@lappublishing com, 2011, 193с.
- [21] Сапрыгина М.Б., Байсейтова У.С., Шалданбаев А.Ш., Оразов И.О. О регулярной разрешимости нелокальной краевой задачи волнового уравнения., Известия Национальной академии наук РК, ISSN 1991-346X Серия физико-математическая. № 2. 2016, с. 48.
- [22] Сапрыгина М.Б., Шалданбаев А.Ш., Оразов И.О., Байсейтова У.С. Критерии вольтерровости нелокальной краевой задачи волнового уравнения ., Известия Национальной академии наук РК, ISSN 1991-346X Серия физико-математическая. № 2. 2016, с.147.
- [23] Треногин В.А. Функциональный анализ. –Москва:Наука, 1980. -494 с.

## REFERENCES

- [1] Hadamard Zh. An initial value problem for the simple equations quotients a derivant. - M, Science, 1978, - 352 pages.
- [2] Friedrichs K. O Symmetric. hyperbolic of Liner differential equations, Comm. Pure Apple 7 Mash., 7(1954), 345-392.
- [3] I. Von Neumahn. Allgemaine Eigenwertltheorie Hermit - esher funktional Operatoren, Math, 102, 1929, p.49-131.
- [4] Sobolev S. L. Some applications of the functional analysis in mathematical physics, M, Science, 1988.
- [5] Vishik M. I. About the common boundary value problems for elliptical equations, differential equations, Works MMO, 1989, 1952, t.1, 152 pages.
- [6] Otelbayev M. Kalmenov T. Sh. About the regular boundary value problems for Lavrentyev's equation - Bitsadze, Diff. equations, 1981, T.A., No. 5, page 873-886.
- [7] Kalmenov T.Sh. Boundary value problems for the simple equations in partial derivatives of hyperbolic type, Shymkent:gylym, 1993,327s.
- [8] Kalmenov T.Sh. About a range of one conjugate task for a wave equation, Vesnik A.N Kaz.1982, No. 2, page 63-66.
- [9] Kalmenov T.Sh. A boundary value problem range with smeshchenny for a wave equation, Diffents. equations.1983, t19, No. 1, page 75-78
- [10] Biyarov B. N., Kalmenov T.Sh. About a nonlocal volnerrovy task for the hyperbolic equation, AN News Kaz SSR, is gray. physical-matemat, 1988, No. 5, page 13-16.
- [11] Kalmenov T.Sh. About the regular boundary value problems for a wave equation, Diffents. equations.1981, t 17, No. 6, page 1105-1121.
- [12] Sadybekov M. And, About a Dirichlet problem for for a wave equation, Diffents. equations. Funktsion. the analysis and on applications Alma-Ata Kaz. GU, 1988, t 17, No. 6, page 61-70.
- [13] Sadybekov M. And, Kalmenov T.Sh. About a Dirichlet problem and nonlocal boundary value problems for a wave equation, Diffents. equations, 1990, t.26, No. 1, page 60-65.
- [14] Meldebekova S., Shaldanbayev A.Sh. About a reulyarny solubility of one nonlocal boundary value problem of a wave equation, Science and formations of YuK, 2005 No. 6(46), page 105-109.
- [15] Nakhushhev A.M. About one class of the linear balanced problems for hyperbolic and ridiculous types a second-kind equation. Nalchikh, Эльбурс.1992, 155 pages.
- [16] Mizokhata S. The theory of the equations with a quotient derivants, M. Mir, 1977, page 504.
- [17] Brislow C. Kernels of trace class operators, Proc. Amer 7 Nath. Soc, 1988, v.104, No. 4, P.1181-1190.
- [18] Lidsky V. B. Self-conjugate operators the having trace, A.N'S Reports of the Soviet Socialist Republic, 1959, t. 105, No. 3, P.485-488.
- [19] Nersesyan A.B. To the theory of integral equations like Voltaire, A.N'S Reports of the Soviet Socialist Republic, 1964, t. 155, No. 5, P.1049-1051.
- [20] Shaldanbayev A.Sh. Spectral resolutions of correct - nekorrektnykhnachalno boundary value problems for some classes of differential equations, Germanu, Saarbruchen: LAP LAMRET Acfdemic Pyblishing. http; dob. d-nb. DI. Emailinfa@lappyblishing com, 2011, 193 pages.
- [21] Saprygina M. B., Bayseytova U.S., Shaldanbayev A.Sh., I.O's Orazums. About the regular solubility of a nonlocal boundary value problem of a wave equation., News of National academy of Sciences of PK, ISSN 1991-346X Series physical and mathematical. No. 2. 2016, c.48.
- [22] Saprygina M. B., Shaldanbayev A.Sh., I.O., Bayseytov U.S. Orazums. Criteria of a volterrovost of a nonlocal boundary value problem of a wave equation., News of National academy of Sciences of PK, ISSN 1991-346X Series physical and mathematical. No. 2. 2016, c.147.
- [23] Trenogin V.A. The functional analysis. – Moskva:nauka, 1980.-494 pages.

УДК 517.956.32

**М.Т. Шоманбаева, А.А. Көпжасарова, Г.А. Бесбаев, А.Ш. Шалданбаев**

Южно-казахстанский государственный университет

**СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА НЕЛОКАЛЬНОЙ  
КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ**

**Аннотация.** Волновые уравнения встречаются в различных отраслях науки и техники, например, гидрологии, сейсмологии, и при изучении динамики распространения волн в жидкости и газе, тем не менее, краевые задачи этого уравнения мало изучены. Работы посвященные нелокальным задачам очень мало. В данной работе предпринята попытка изучения спектральных свойств нелокальной задачи методами функционального анализа.

**Ключевые слова:** волновое уравнение, нелокальные краевые условия, регулярная разрешимость, спектр, базис Рисса.

## МАЗМУНЫ

### Жұлдыздардың және тұмандықтардың зерттеулері

<i>Серебрянский А.В., Гайнуллина Е.Р., Халикова А.В.</i> , ТУС3215-906-1 айнымалы жұлдыз: бүгілген жарқылдың талдауы және жіктеуі.....	5
<i>Кондратьева Л.Н., Рспаев Ф.К., Аймуратов Е.К., Отебай А.Б.</i> , V725 Тау объектісінің спектрлік және фотометрлік бақылауларының нәтижелері.....	12
<i>Кондратьева Л.Н., Рспаев Ф.К., Аймуратов Е.К.</i> , M1-65 планеталық тұмандықтың айнымалылығы.....	22
<i>Павлова Л.А.</i> , Жұлдыз маңындағы құрылымдардың қалыптасуына магниттік өрістердің әсері.....	29
<i>Коқумбаева Р.И., Хруслев А.В., Кусакин А.В.</i> , GSC 3601-01531 және GSC 3601-01504 екі жаңа айнымалы жұлдыздар .....	35

### Аспан механикасының және жұлдыздар жүйесінің мәселелері

<i>Дубовиченко С.Б., Джазаиров-Кахраманов А.В., Буркова Н.А., Ткаченко А.С.</i> , Астрофизикалық энергия кезінде радиациялық ${}^2\text{H}^3\text{He}$ басып алу .....	41
<i>Зултыхаров А.Т., Конысбаев Т.К., Чечин Л.М.</i> , Қараңғы материя есебімен ғаламдар релаксацияларының уақытын бағалау.....	50

### Күннің және күн жүйесі денелерінің физикасы

<i>Шестакова Л.И., Демченко Б.И.</i> , А тобы жұлдыздары дискілерінде атомдар мен иондар динамикасына бүгілген жарық қысымының әсері.....	55
<i>Демченко Б.И., Шестакова Л.И.</i> , Күн маңындағы сублимация процессінде оливин тозақ бөлшектерінің орбиталық дамуы .....	64
<i>Шестакова Л.И., Демченко Б.И.</i> , А тобы жұлдыздары маңындағы сублимация процессінде силикатты тозақ бөлшектерінің орбиталық дамуы.....	73
<i>Минасянц Г.С., Минасянц Т.М., Томозов В.М.</i> Күннің минимум белсенді кезіндегі иондық энергиямен Fe/O қатынасының өзгеруі. I. күнде дақтар жоқ болғанда Fe және O иондарының энергетикалық спектрлері.....	81
<i>Минасянц Г.С., Минасянц Т.М., Томозов В.М.</i> Күн белсенділігі минимумында иондар қуатымен Fe/O мәнінің өзгеруі. II. Циклдің минимумында ғарыш сәулелерінің аномалды компоненттерінің ролі.....	86
<i>Тейфель В.Г., Каримов А.М., Харитонова Г.А.</i> , Сатурндағы аммиактың жұтылуы – 2009 жылы күн мен түннің теңелуі кезеңінде ендік вариациялар асимметриясы .....	91
<i>Каримов А.М., Лысенко П.Г., Тейфель В.Г.</i> , Сатурнның солтүстік жартышары - 2015 жылы метан және аммиактың жұтылуы .....	97
<i>Вдовиченко В.Д., Кириенко Г.А., Лысенко П.Г.</i> 2016 жылдың көріну маусымында юпитер дискісі бойынша метанның-аммиактың жұтылуын зерттеу I. Экватор аймағы .....	104
<i>Вдовиченко В.Д., Кириенко Г.А., Лысенко П.Г.</i> жылдың көріну маусымында юпитер дискісі бойынша метанның-аммиактың жұтылуын зерттеу. II. Ендік вариациялар .....	110
<i>Вдовиченко В.Д., Кириенко Г.А., Лысенко П.Г.</i> 2016 жылдың көріну маусымында Юпитерде метан-аммиак жұтылуын зерттеу III. Үлкен Қызыл Дақ (ҮҚД).....	118
<i>Демченко Б.И., Воропаев В.А., Комаров А.А., Молотов И.Е., Серебрянский А.В., Усольцева Л.А.</i> , Көптеген геотұрақты серіктердің кейбір сипаттамалары.....	124
<i>Демченко Б.И., Комаров А.А., Нифонтова М.В., Усольцева Л.А.</i> , Көру шегі аз CCD-матрицада ГТС бақылауларының астрометриялық өңдеулерінің әртүрлі әдістерінің салыстырмалы талдауы.....	129
<i>Демченко Б.И., Комаров А.А., Кругов М.А., Рева И.В., Серебрянский А.В., Усольцева Л.А., Тянь-Шань</i> Астрономиялық Обсерваториясы бекетінде геотұрақты серіктерді бақылау жағдайы.....	135
<i>Шомшиева С.А., Рева И.В., Кондратьева Л.Н., Отебай А.Б.</i> , Тянь-Шань Астрономиялық Обсерваториясының 1-метрлік телескобында фотометрлік жүйесін стандарттау.....	140
<i>Терещенко В.М.</i> , SSP-5A фотоэлектрлік фотометрі жұмысының сипаттамасы және ерекшеліктері.....	146
<i>Терещенко В.М., Шамро А.В.</i> , Абсолютті өлшемдер үшін спектрограф. Оптика-механикалық блоктың сызбасы және құрылымы.....	155

### Теориялық зерттеулер

<i>Қалдыбекова Б.Қ., Решетова Г.В.</i> Арнайы ішектен жасалған тордың сандық нәтижелері.....	160
<i>Бакирова Э.А., Қадырбаева Ж.М.</i> Жүктелген дифференциалдық теңдеулер үшін сызықты көпнүктелі шеттік есептің шешімділігі туралы.....	168
<i>Бесбаев Г.А., Көпжасарова А.А., Сапрыгина М.Б., Шалданбаев А.Ш.</i> Гурса операторының Крейн кеңістігіндегі жалқылығы туралы.....	176
<i>Жұмәлі А.С., Решетова Г.В.</i> Жерасты ерітінділеудің микроскопиялық динамикасын сандық моделдеу.....	188
<i>Бақтыбаев Қ., Дәлелханқызы А., Қиқымова І., Мырзагулов А.</i> Әсерлесуші бозондар моделін уран ядросының деформацияланған изотоптарына қолдану.....	195
<i>Көпжасарова А.А., Бесбаев Г.А., Абылкасымова Э. А., Шалданбаев А.Ш.</i> Толқын теңдеуінің шартарапты волтерлі есептерінің Крейн кеңістігіндегі спектралдік таралымдары.....	203
<i>Шоманбаева М.Т., Көпжасарова А.А., Бесбаев Г.А., Шалданбаев А.Ш.</i> Толқындық теңдеуінің шартарапты шекаралық есебінің спектрлік қасиеттері.....	213
<b>Қазақстанның астрономиялық ғылым 75 жыл.</b> .....	224



СОДЕРЖАНИЕ

Исследование звезд и туманностей

<i>Серебрянский А.В., Гайнуллина Е.Р., Халикова А.В.</i> , Переменная звезда ГУС3215-906-1: анализ кривой блеска классификация.....	5
<i>Кондратьева Л.Н., Рспаев Ф.К., Аймуратов Е.К., Отебай А.Б.</i> , Результаты спектральных и фотометрических наблюдений объекта V725 Тау.....	12
<i>Кондратьева Л.Н., Рспаев Ф.К., Аймуратов Е.К.</i> , Переменность планетарной туманности М1-65 .....	22
<i>Павлова Л.А.</i> , Влияние магнитных полей на формирование околосозвездных структур .....	29
<i>Кокумбаева Р.И., Хрусов А.В., Кусакин А.В.</i> , Две новые переменные звезды GSC 3601-01531 и GSC 3601-01504... ..	35

Проблемы небесной механики и динамики звездных систем

<i>Дубовиченко С.Б., Джазаиров-Кахраманов А.В., Буркова Н.А., Ткаченко А.С.</i> , Радиационный $^2\text{H}^3\text{He}$ захват при астрофизических энергиях .....	41
<i>Зулъяхаров А.Т., Конысбаев Т.К., Чечин Л.М.</i> , Оценка времени релаксации галактик с учетом темной материи.....	50

Физика Солнца и тел солнечной системы

<i>Шестакова Л.И., Демченко Б.И.</i> , Действие светового давления на динамику атомов и ионов в осколочных дисках звезд класса А.....	55
<i>Демченко Б.И., Шестакова Л.И.</i> , Орбитальная эволюция пылевых частиц оливина в процессе сублимации около Солнца .....	64
<i>Шестакова Л.И., Демченко Б.И.</i> , Орбитальная эволюция силикатных пылевых частиц в процессе сублимации около звезд класса А .....	73
<i>Минасянц Г.С., Минасянц Т.М., Томозов В.М.</i> Изменение отношения Fe/O с энергией ионов в минимуме солнечной активности. I. Энергетические спектры ионов Fe и O при отсутствии пятен на Солнце.....	81
<i>Минасянц Г.С., Минасянц Т.М., Томозов В.М.</i> Изменение отношения Fe/O с энергией ионов в минимуме солнечной активности. II. Роль аномальной компоненты космических лучей в минимуме цикла.....	86
<i>Тейфель В.Г., Каримов А.М., Харитонова Г.А.</i> , Аммиачное поглощение на Сатурне - асимметрия широтных вариаций в период равноденствия 2009 года.....	91
<i>Каримов А.М., Лысенко П.Г., Тейфель В.Г.</i> , Северное полушарие Сатурна - поглощение метана и аммиака в 2015 году .....	97
<i>Вдовиченко В.Д., Кириенко Г.А., Лысенко П.Г.</i> Исследование молекулярного поглощения по диску Юпитера в сезон видимости 2016 года I. экваториальная область.....	104
<i>Вдовиченко В.Д., Кириенко Г.А., Лысенко П.Г.</i> Исследование молекулярного поглощения на Юпитере в сезон видимости 2016 года II. Широтные вариации.....	110
<i>Вдовиченко В.Д., Кириенко Г.А., Лысенко П.Г.</i> Исследование молекулярного поглощения на Юпитере в сезон видимости 2016 года. III. Большое Красное Пятно (БКП) .....	118
<i>Демченко Б.И., Воропаев В.А., Комаров А.А., Молотов И.Е., Серебрянский А.В., Усольцева Л.А.</i> , Некоторые характеристики множества геостационарных спутников.....	124
<i>Демченко Б.И., Комаров А.А., Нифонтова М.В., Усольцева Л.А.</i> , Сравнительный анализ различных методов астрометрической обработки наблюдений ГСС на CCD-матрице с малым полем зрения.....	129
<i>Демченко Б.И., Комаров А.А., Кругов М.А., Рева И.В., Серебрянский А.В., Усольцева Л.А.</i> , Условия наблюдений геостационарных спутников на пункте Тянь-Шанская Астрономическая Обсерватория.....	135
<i>Шомиекова С.А., Рева И.В., Кондратьева Л.Н., Отебай А.Б.</i> , Стандартизация фотометрической системы 1-метрового телескопа Тянь-Шанской Астрономической Обсерватории.....	140
<i>Терещенко В.М.</i> , Характеристики и особенности работы фотоэлектрического фотометра SSP-5A .....	146
<i>Терещенко В.М., Шамро А.В.</i> , Спектрограф для абсолютных измерений. Схема и конструкция оптико-механического блока.....	152

Теоретические исследования

<i>Калдыбекова Б. К., Решетова Г. В.</i> Численные результаты специальной сетки из струн.....	160
<i>Бакирова Э.А., Кадирбаева Ж.М.</i> О разрешимости линейной многоточечной краевой задачи для нагруженных дифференциальных уравнений.....	168
<i>Бесбаев Г.А., Көпжасарова А.А., Сапрыгина М.Б., Шалданбаев А.Ш.</i> О самосоряженности оператора Гурса в пространстве Крейна.....	176
<i>Жумали А.С., Решетова Г.В.</i> Численное моделирование микроскопической динамики подземного выщелачивания.....	188
<i>Бактыбаев К., Далелханкызы А., Кикымова I., Мырзабаев А.</i> Применение модели взаимодействующих бозонов в деформированных изотопах ядра урана.....	195
<i>Көпжасарова А.А., Бесбаев Г.А., Абылкасымова Э. А., Шалданбаев А.Ш.</i> Спектральные разложения решения вольтерровых нелокальных краевых задач волнового уравнения.....	203
<i>Шоманбаева М.Т., Көпжасарова А.А., Бесбаев Г.А., Шалданбаев А.Ш.</i> Спектральные свойства нелокальной краевой задачи волнового уравнения .....	213
<b>75 лет казахстанской астрономической науке.....</b>	<b>224</b>

## CONTENTS

## Investigation of stars and nebulae

<i>Serebryanskiy A.V., Gaynullina E.R., Khalikova A.V.</i> Variable star TYC3215-906-1: light curve analyses and classification .....	5
<i>Kondratyeva L., Rspaev F., Aimuratov Ye., Otebay A.</i> Results of the spectral and photometric observations of the object V725 Tau .....	12
<i>Kondratyeva L., Rspaev F., Aimuratov Ye.</i> , Variability of the planetary nebula M1-65.....	22
<i>Pavlova L.A.</i> , The influents magnetic field on the forming circumstellar structure.....	29
<i>Kokumbaeva R.I., Khruslov A.V., Kusakin A.V.</i> , GSC 3601-01531 and GSC 3601-01504, two new variable stars.....	35

## Problems of celestial mechanics and dynamics of stellar systems

<i>Dubovichenko S.B., Dzhazairov-Kakhramanov A.V., Burkova N.A., Tkachenko A.S.</i> , Radiative $^2\text{H}^3\text{He}$ capture at astrophysical energies .....	41
<i>Zulpykharov A. T., Konyshbayev T.K., Chechin L.M.</i> The relaxation time estimation for galaxies with account of Dark matter.....	50

## Physics of sun and bodies of the Solar system

<i>Shestakova L.I., Demchenko B.I.</i> , The action of radiation pressure on the dynamics of atoms and ions in debris disks of A-type stars.....	55
<i>Demchenko B.I., Shestakova L.I.</i> , Orbital evolution of olivine dust grain during sublimation process near the Sun.....	64
<i>Shestakova L.I., Demchenko B.I.</i> , Orbital evolution of silicate dust particles during sublimation near A-type stars.....	73
<i>Minasyants G.S., Minasyants T.M., Tomozov V.M.</i> Variations of Fe/O Ratio with Ion's Energies in the Solar Activity Minimum. I. Energy Spectra of Fe and O Ions on the Spotless Sun .....	81
<i>Minasyants G.S., Minasyants T.M., Tomozov V.M.</i> Variations of Fe/O Ratio with Ion's Energies in the Solar Activity Minimum. II. Role of anomalous component of the cosmic rays in a cycle minimum.....	86
<i>Tejfe V.G.I., Karimov A.M., Kharitonova G.A.</i> The ammonia absorption in Saturn – an asymmetry of latitudinal variations at the 2009 equinox.....	91
<i>Karimov A.M., Lysenko P.G., Tejfe V.G.I., Kharitonova G.A.</i> , Northern hemisphere of SATURN – the methane and ammonia absorption in 2015.....	97
<i>Vdovichenko V.D., Kirienco G.A., Lysenko P.G.</i> , The study of molecular absorption over Jovian disk in season of 2016 visibility. I. Equatorial area.....	104
<i>Vdovichenko V.D., Kirienco G.A., Lysenko P.G.</i> The study of molecular absorption on Jupiter in visibility season of 2016. II. Latitudinal variations.....	110
<i>Vdovichenko V.D., Kirienco G.A., Lysenko P.G.</i> The study of molecular absorption on Jupiter in visibility season of 2016. III. Great Red Spot (GRS).....	118
<i>Demchenko B. I., Komarov A. A., Molotov I. E., Serebryansky A. V., Usoltseva L. I., Voropaev V.A.</i> Some features of geostationary satellites essemblage.....	124
<i>Demchenko B. I., Komarov A. A., Nifontova M.V., Usoltseva L. I.</i> , Comparative analysis of several methods of astrometric processing of the GSS observations using CCD-cameras with narrow field of view.....	129
<i>Demchenko B. I., Komarov A. A., Krugov M.A., Reva I.V., Serebryansky A. V., Usoltseva L. I.</i> , Condition of observations of geostationary satellites at tien shan astronomical observatory.....	135
<i>Shomshekova S. A., Reva I.V., Kondratyeva L.N., Otebay A.B.</i> , Standardization of the photometric system of the 1-meter telescope of Tien-Shan Astronomical Observatory.....	140
<i>Tereschenko V. M.</i> , The characteristics and peculiarities of the photoelectrical photometer SSP-5A operation.....	146
<i>Tereschenko V. M., Shamro A. V.</i> , Spectrograph for absolute measurements. Scheme and construction of the optic-mechanic block.....	152

## Theoretical studies

<i>Kaldybekova B.K., Reshetova G. V.</i> Numerical results of special grid of strings.....	160
<i>Bakirova E.A., Kadirbayeva Zh.M.</i> On a solvability of linear multipoint boundary value problem for the loaded differential equations.....	168
<i>Besbayev G. A., Kopzhasarova A.A., Saprygina M.B, Shaldanbayev A.Sh.</i> On self-conjugation of the operator of goursat in crane space .....	176
<i>Zhumali A.S., Reshetova G.V.</i> Numerical modelling of microscopic dynamics of in-situ leaching.....	188
<i>Baktybaev K., Dalelkhankyzy A., Kyqymova I., Myrzabaev A.</i> Applying the model of interacting bosons in a deformed nucleus of uranium isotopes.....	195
<i>Kopzhasarova A.A., Besbayev G. A., Abylkassymova E.A., Shaldanbayev A.Sh.</i> Spectral resolutions of solution of voltaire nonlocal boundary value problems of a wave equation.....	203
<i>Shomanbayeva M. T., Kopzhasarova A.A., Besbayev G. A., Shaldanbayev A.Sh.</i> Spectral properties of a nonlocal boundary value problem of a wave equation.....	213
<b>75 years of Kazakhstan's astronomical science</b> .....	224

**Publication Ethics and Publication Malpractice  
in the journals of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan**

For information on Ethics in publishing and Ethical guidelines for journal publication see <http://www.elsevier.com/publishingethics> and <http://www.elsevier.com/journal-authors/ethics>.

Submission of an article to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan implies that the described work has not been published previously (except in the form of an abstract or as part of a published lecture or academic thesis or as an electronic preprint, see <http://www.elsevier.com/postingpolicy>), that it is not under consideration for publication elsewhere, that its publication is approved by all authors and tacitly or explicitly by the responsible authorities where the work was carried out, and that, if accepted, it will not be published elsewhere in the same form, in English or in any other language, including electronically without the written consent of the copyright-holder. In particular, translations into English of papers already published in another language are not accepted.

No other forms of scientific misconduct are allowed, such as plagiarism, falsification, fraudulent data, incorrect interpretation of other works, incorrect citations, etc. The National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan follows the Code of Conduct of the Committee on Publication Ethics (COPE), and follows the COPE Flowcharts for Resolving Cases of Suspected Misconduct ([http://publicationethics.org/files/u2/New\\_Code.pdf](http://publicationethics.org/files/u2/New_Code.pdf)). To verify originality, your article may be checked by the Cross Check originality detection service <http://www.elsevier.com/editors/plagdetect>.

The authors are obliged to participate in peer review process and be ready to provide corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. All authors of a paper should have significantly contributed to the research.

The reviewers should provide objective judgments and should point out relevant published works which are not yet cited. Reviewed articles should be treated confidentially. The reviewers will be chosen in such a way that there is no conflict of interests with respect to the research, the authors and/or the research funders.

The editors have complete responsibility and authority to reject or accept a paper, and they will only accept a paper when reasonably certain. They will preserve anonymity of reviewers and promote publication of corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. The acceptance of a paper automatically implies the copyright transfer to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.

The Editorial Board of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan will monitor and safeguard publishing ethics.

Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайтах:

[www:nauka-nanrk.kz](http://www.nauka-nanrk.kz)

<http://www.physics-mathematics.kz>

<http://road.issn.org/issn/2518-1726>

Редактор *М. С. Ахметова, Д.С. Аленов, Т.А. Апендиев*  
Верстка на компьютере *А.М. Кульгинбаевой*

Подписано в печать 25.09.2016.  
Формат 60x881/8. Бумага офсетная. Печать – ризограф.  
14 п.л. Тираж 300. Заказ 5.