

ISSN 2518-1726 (Online),
ISSN 1991-346X (Print)

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ

Х А Б А Р Л А Р Ы

ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА
СЕРИЯСЫ**



СЕРИЯ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ



**PHYSICO-MATHEMATICAL
SERIES**

1 (311)

**ҚАҢТАР – АҚПАН 2017 ж.
ЯНВАРЬ – ФЕВРАЛЬ 2017 г.
JANUARY – FEBRUARY 2017**

1963 ЖЫЛДЫҢ ҚАҢТАР АЙЫНАН ШЫҒА БАСТАҒАН
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1963 ГОДА
PUBLISHED SINCE JANUARY 1963

ЖЫЛЫНА 6 РЕТ ШЫҒАДЫ
ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД
PUBLISHED 6 TIMES A YEAR

АЛМАТЫ, ҚР ҰҒА
АЛМАТЫ, НАН РК
ALMATY, NAS RK

Б а с р е д а к т о р ы
ф.-м.ғ.д., проф., ҚР ҰҒА академигі **Ғ.М. Мұтанов**

Р е д а к ц и я а л қ а с ы:

Жұмаділдаев А.С. проф., академик (Қазақстан)
Кальменов Т.Ш. проф., академик (Қазақстан)
Жантаев Ж.Ш. проф., корр.-мүшесі (Қазақстан)
Өмірбаев У.У. проф. корр.-мүшесі (Қазақстан)
Жүсіпов М.А. проф. (Қазақстан)
Жұмабаев Д.С. проф. (Қазақстан)
Асанова А.Т. проф. (Қазақстан)
Бошқаев К.А. PhD докторы (Қазақстан)
Сұраған Д. PhD докторы (Қазақстан)
Quevedo Hernando проф. (Мексика),
Джунушалиев В.Д. проф. (Қырғыстан)
Вишневский И.Н. проф., академик (Украина)
Ковалев А.М. проф., академик (Украина)
Михалевич А.А. проф., академик (Белорус)
Пашаев А. проф., академик (Әзірбайжан)
Такибаев Н.Ж. проф., академик (Қазақстан), бас ред. орынбасары
Тигиняну И. проф., академик (Молдова)

«ҚР ҰҒА Хабарлары. Физика-математикалық сериясы».

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Меншіктенуші: «Қазақстан Республикасының Ұлттық ғылым академиясы» РҚБ (Алматы қ.)
Қазақстан республикасының Мәдениет пен ақпарат министрлігінің Ақпарат және мұрағат комитетінде
01.06.2006 ж. берілген №5543-Ж мерзімдік басылым тіркеуіне қойылу туралы куәлік

Мерзімділігі: жылына 6 рет.
Тиражы: 300 дана.

Редакцияның мекенжайы: 050010, Алматы қ., Шевченко көш., 28, 219 бөл., 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,
www.nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

© Қазақстан Республикасының Ұлттық ғылым академиясы, 2017

Типографияның мекенжайы: «Аруна» ЖК, Алматы қ., Муратбаева көш., 75.

Главный редактор
д.ф.-м.н., проф. академик НАН РК **Г.М. Мутанов**

Редакционная коллегия:

Джумадильдаев А.С. проф., академик (Казахстан)
Кальменов Т.Ш. проф., академик (Казахстан)
Жантаев Ж.Ш. проф., чл.-корр. (Казахстан)
Умирбаев У.У. проф. чл.-корр. (Казахстан)
Жусупов М.А. проф. (Казахстан)
Джумабаев Д.С. проф. (Казахстан)
Асанова А.Т. проф. (Казахстан)
Бошкаев К.А. доктор PhD (Казахстан)
Сураган Д. доктор PhD (Казахстан)
Quevedo Hernando проф. (Мексика),
Джунушалиев В.Д. проф. (Кыргызстан)
Вишневский И.Н. проф., академик (Украина)
Ковалев А.М. проф., академик (Украина)
Михалевич А.А. проф., академик (Беларусь)
Пашаев А. проф., академик (Азербайджан)
Такибаев Н.Ж. проф., академик (Казахстан), зам. гл. ред.
Тигиняну И. проф., академик (Молдова)

«Известия НАН РК. Серия физико-математическая».

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы)

Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации и архивов
Министерства культуры и информации Республики Казахстан №5543-Ж, выданное 01.06.2006 г.

Периодичность: 6 раз в год.

Тираж: 300 экземпляров.

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, ком. 219, 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,
www.nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

© Национальная академия наук Республики Казахстан, 2017

Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75.

E d i t o r i n c h i e f
doctor of physics and mathematics, professor, academician of NAS RK **G.M. Mutanov**

E d i t o r i a l b o a r d:

Dzhumadildayev A.S. prof., academician (Kazakhstan)
Kalmenov T.Sh. prof., academician (Kazakhstan)
Zhantayev Zh.Sh. prof., corr. member. (Kazakhstan)
Umirbayev U.U. prof. corr. member. (Kazakhstan)
Zhusupov M.A. prof. (Kazakhstan)
Dzhumabayev D.S. prof. (Kazakhstan)
Asanova A.T. prof. (Kazakhstan)
Boshkayev K.A. PhD (Kazakhstan)
Suragan D. PhD (Kazakhstan)
Quevedo Hernando prof. (Mexico),
Dzhunushaliyev V.D. prof. (Kyrgyzstan)
Vishnevskiy I.N. prof., academician (Ukraine)
Kovalev A.M. prof., academician (Ukraine)
Mikhalevich A.A. prof., academician (Belarus)
Pashayev A. prof., academician (Azerbaijan)
Takibayev N.Zh. prof., academician (Kazakhstan), deputy editor in chief.
Tiginyanu I. prof., academician (Moldova)

News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physical-mathematical series.

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Owner: RPA "National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan" (Almaty)

The certificate of registration of a periodic printed publication in the Committee of information and archives of the Ministry of culture and information of the Republic of Kazakhstan N 5543-Ж, issued 01.06.2006

Periodicity: 6 times a year

Circulation: 300 copies

Editorial address: 28, Shevchenko str., of. 219, 220, Almaty, 050010, tel. 272-13-19, 272-13-18,
www.nauka-nanrk.kz/physics-mathematics.kz

© National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, 2017

Address of printing house: ST "Aruna", 75, Muratbayev str, Almaty

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 1, Number 311 (2017), 83 – 90

B.S. KalmurzayevAl-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan
birzhan.kalmurzayev@gmail.com**ON ASSESSMENTS OF EMBEDDABILITY L_m^0
IN ROGERS SEMILATTICE OF TWO-ELEMENT FAMILIES
OF SETS IN THE HIERARCHY OF ERSHOV**

Abstract. It is well known that the structure of computable enumerable m -degrees with respect to m -reducibility is very complicated. It forms an upper semilattice which has a universal degree, an infinite chain and anti-chain. And we know that cardinality of this semilattice is infinite. This paper presents the assessments of embeddability the semilattice of computable enumerable m -degrees into Rogers semilattice of two-element families of sets of finite levels in the hierarchy of Ershov. Also, using the examples of families with one-element Rogers semilattice, whose evaluation at any level lower than our assessments, it is proved that these assessments are not improvable.

Key words. Semilattice of computably enumerable m degrees, Rogers semilattice, hierarchy of Ershov, computably enumerable sets, decidable numbering.

УДК 510.54

Б.С. КалмурзаевКазахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан
birzhan.kalmurzayev@gmail.com**ОБ ОЦЕНКАХ ВЛОЖИМОСТИ L_m^0 В ПОЛУРЕШЕТКУ
РОДЖЕРСА ДВУХЭЛЕМЕНТНЫХ СЕМЕЙСТВ МНОЖЕСТВ
ИЕРАРХИИ ЕРШОВА**

Аннотация. Хорошо известно, что структура вычислимо перечислимых m -степеней относительно m -сводимости очень сложная. Она образует верхнюю полурешетку, которая имеет универсальную степень, бесконечную цепь и анти-цепь. И известно, что мощность этой полурешетки бесконечна. В данной работе приведены оценки вложимости полурешетки вычислимо перечислимых m -степеней в полурешетку Роджерса двухэлементных семейств множеств конечных уровней иерархии Ершова. Также с помощью примеров семейств с одноэлементной полурешеткой Роджерса, оценки которых на любом уровне ниже, чем наши оценки, доказано, что эти оценки являются неулучшаемыми.

Ключевые слова. Полурешетка, полурешетка Роджерса, иерархия Ершова, вычислимо перечислимые множества, разрешимая нумерация.

Исследование вычисляемых семейств множеств иерархии Ершова было инициировано работами [1], [2], в которых был предложен общий подход к введению понятия вычислимой нумерации для широкого класса семейств конструктивных объектов и сформулирована программа их изучения в терминах свойств так называемых полурешеток Роджерса.

Полученные к настоящему времени результаты о полурешетках вычисляемых нумераций семейств множеств иерархии Ершова выявили новые феномены, не присущие классическим

вычислимым нумерациям семейств вычислимо перечислимых (в.п.) множеств. В частности, было доказано существование семейств, состоящих из двух вложенных множеств, у которых полурешетка Роджерса является одноэлементной [3].

Приведем некоторые понятия из теории вычислимости, используемые в работе. Понятие n -вычислимо перечислимого (n -в.п.) множества было предложено С.А. Ash, J.F. Knight в индуктивной форме [4]:

Определение 1. 1-в.п. множества – это в точности в.п. множества, а каждое $(n + 1)$ -в.п. множество – это разность некоторого вычислимо перечислимого и некоторого n -в.п. множеств.

Таким образом, 2-в.п. множества имеют вид $R_1 \setminus R_2$, где R_1, R_2 – в.п. множества, поэтому их еще называют разностями в.п. множеств (кроме того, можно утверждать, что $R_1 \subseteq R_2$), 3-в.п. множества имеют вид $R_1 \setminus (R_2 \setminus R_3) = (R_1 \setminus R_2) \cup R_3$, где $R_1 \subseteq R_2 \subseteq R_3$ и R_1, R_2, R_3 – в.п. множества, и т.д. n -в.п. множества образуют уровень Σ_n^{-1} иерархии Ершова [5], о них также говорят как о Σ_n^{-1} -множествах.

Для определения бесконечных уровней иерархии Ершова, введенных в статье [6], мы используем подход, предложенный позже в монографии [4]. Пусть \mathcal{O} – система ординальных обозначений Клини (подробности см. в [4], [7]). Для $a \in \mathcal{O}$ через $|a|_{\mathcal{O}}$ обозначается ординал, чьим обозначением является a . Ординальные обозначения используются для определения бесконечных уровней иерархии Ершова.

Определение 2. Пусть a является обозначением ненулевого вычислимого ординала. Говорят, что множество A принадлежит классу Σ_a^{-1} иерархии Ершова, если существуют вычислимые функции $f(z, t)$ и $h(z, t)$ такие, что для всех $z, t \in \omega$ выполняются следующие условия:

- 1) $A(z) = \lim_t f(z, t)$, причем $f(z, 0) = 0$;
- 2) $h(z, 0) = a$ & $h(z, t + 1) \leq_{\mathcal{O}} h(z, t)$;
- 3) $f(z, t + 1) \neq f(z, t) \Rightarrow h(z, t + 1) \neq h(z, t)$.

Функцию g назовем функцией перемен для A относительно f . Σ_a^{-1} -аппроксимацией Σ_a^{-1} -множества A называется пара функций $\langle f, h \rangle$, удовлетворяющих условиям 1)-3) выше.

Хорошо известно, что для конечных ординалов их Клиневские обозначения однозначно определены, в частности, для ординала n

$$\left| \underbrace{2^{2^{2^{\dots^2}}}}_{n\text{-раз}} \right|_{\mathcal{O}} = n.$$

Для множеств конечного уровня иерархии Ершова будем использовать аналог определения 2, заменив значения функции h на ординалы.

Приведем некоторые понятия из теории нумераций. Сюръективное отображение α множества натуральных чисел ω на непустое множество \mathcal{A} называется нумерацией множества \mathcal{A} . Пусть \mathcal{A} – семейство множеств из класса Σ_n^{-1} , $n \geq 1$, иерархии Ершова. Нумерация $\alpha: \omega \rightarrow \mathcal{A}$ называется Σ_n^{-1} -вычислимой, если

$$\{\langle x, n \rangle \mid x \in \alpha(n)\} \in \Sigma_n^{-1}.$$

Следовательно, α является Σ_n^{-1} -вычислимой нумерацией семейства \mathcal{A} , если существует Σ_n^{-1} -аппроксимация множества $\{\langle n, x \rangle : x \in \alpha(n)\}$, т.е. вычислимые функции $f(n, x, t)$ и $h(n, x, t)$ такие, что

$$\alpha(n)(x) = \lim_t f(n, x, t), f(n, x, 0) = 0$$

для всех $n, x \in \omega$, а $h(n, x, t)$ является функцией перемен для универсального множества $\{\langle x, n \rangle \mid x \in \alpha(n)\}$ нумерации α относительно f .

Понятие Σ_1^{-1} -вычислимой нумерации совпадает с классическим понятием вычислимой нумерации семейства рекурсивно перечислимых множеств [4]. Множество всех Σ_n^{-1} -вычислимых нумераций семейства \mathcal{A} обозначим через $\text{Com}_n^{-1}(\mathcal{A})$. Нумерация α семейства \mathcal{A} сводится к нумерации β этого семейства ($\alpha \leq \beta$), если существует рекурсивная функция f , для которой $\alpha(x) = \beta(f(x))$ для всех $x \in \omega$. Если $\alpha \leq \beta$ и $\beta \leq \alpha$, то нумерации α и β называются

эквивалентными ($\alpha \equiv \beta$). Обозначим через $\text{deg}(\alpha)$ степень нумерации α , т.е. совокупность нумерации $\{\beta | \beta \equiv \alpha\}$. Отношение сводимости нумерации является предпорядком на $\text{Com}_n^{-1}(\mathcal{A})$ и индуцирует отношение частичного порядка на множестве степеней нумерации из $\text{Com}_n^{-1}(\mathcal{A})$, которое также будем обозначать через \leq . Частично упорядоченное множество

$$\mathcal{R}_n^{-1}(\mathcal{A}) \equiv \langle \{\text{deg}(\alpha) | \alpha \in \text{Com}_n^{-1}(\mathcal{A})\}, \leq \rangle$$

является верхней полурешеткой, которая называется полурешеткой Роджерса семейства \mathcal{A} .

Пусть A, B – произвольные множества, а R – собственное подмножество множества ω . Определим нумерацию v_R семейства $S = \{A, B\}$, полагая

$$v_R(x) = \begin{cases} A, & \text{если } x \in R; \\ B, & \text{если } x \notin R, \end{cases}$$

для каждого $x \in \omega$. $v_R \leq v_Q$ для любых множеств R, Q тогда и только тогда, когда $R \leq_m Q$. Кроме того, $v_R \oplus v_Q \equiv v_{R \oplus Q}$. Таким образом, отображение $R \mapsto v_R$ индуцирует изоморфизм верхней полурешетки m -степеней L_m и полурешетки всех нумераций семейства S . В случае, когда множества A, B, R являются в.п. множествами, причем $B \subset A$, нумерация v_R является Σ_1^{-1} -вычислимой и отображение $R \mapsto v_R$ индуцирует изоморфизм верхней полурешетки вычислимо перечислимых m -степеней L_m^0 и полурешетки Роджерса $\mathcal{R}_1^{-1}(S)$ семейства S [8].

Предложение. Для любого $n \geq 1$ и для любых Σ_n^{-1} -множеств A, B нумерация v_R является Σ_{2n}^{-1} -вычислимой, если число n – четное и Σ_{2n+1}^{-1} -вычислимой, если число n – нечетное.

Доказательство. Пусть число n – четное. Пусть R – произвольное несобственное в.п. множество и пусть $\langle f_A, h_A \rangle, \langle f_B, h_B \rangle$ – аппроксимационные функции для множеств A, B соответственно. Строим аппроксимационные функции $\langle f_{v_R}, h_{v_R} \rangle$ для нумерации v_R следующим образом: для любых $x, z, t \in \omega$ если $x \notin R^t$, то пусть

$$\begin{aligned} f_{v_R}(x, z, t) &= f_B(z, t), \\ h_{v_R}(x, z, t) &= n + h_B(z, t). \end{aligned}$$

и, если $x \in R^t$, то пусть

$$\begin{aligned} f_{v_R}(x, z, t) &= f_A(z, t), \\ h_{v_R}(x, z, t) &= h_A(z, t). \end{aligned}$$

Покажем, что пара функций $\langle f_{v_R}, h_{v_R} \rangle$ удовлетворяет условиям 1)-3) в определении. Для любых $x, z \in \omega$:

$$1) f_{v_R}(x, z, 0) = f_B(z, 0) = 0.$$

$$2) h_{v_R}(x, z, 0) = n + h_B(z, 0) = n + n = 2n.$$

$$\text{Если } x \notin R^{t+1}, \text{ то } h_{v_R}(x, z, t+1) = n + h_B(z, t+1) \leq n + h_B(z, t) = h_{v_R}(x, z, t).$$

$$\text{Если } x \in R^{t+1} \text{ и } x \notin R^t, \text{ то } h_{v_R}(x, z, t+1) = h_A(z, t+1) \leq n \leq n + h_B(z, t) = h_{v_R}(x, z, t).$$

$$\text{Если } x \in R^t, \text{ то } h_{v_R}(x, z, t+1) = h_A(z, t+1) \leq h_A(z, t) = h_{v_R}(x, z, t).$$

$$3) \text{ Пусть } f_{v_R}(x, z, t+1) \neq f_{v_R}(x, z, t). \text{ Покажем, что } h_{v_R}(x, z, t+1) \neq h_{v_R}(x, z, t).$$

Если $x \notin R^{t+1}$, то $f_{v_R}(x, z, t+1) = f_B(z, t+1)$ & $f_{v_R}(x, z, t) = f_B(z, t) \Rightarrow f_B(z, t+1) \neq f_B(z, t) \Rightarrow h_B(z, t+1) \neq h_B(z, t) \Rightarrow h_{v_R}(x, z, t+1) \neq h_{v_R}(x, z, t)$.

Если $x \in R^{t+1}$ и $x \notin R^t$, то $f_{v_R}(x, z, t+1) = f_A(z, t+1)$ & $f_{v_R}(x, z, t) = f_B(z, t)$ & $h_{v_R}(x, z, t+1) = h_A(z, t+1)$ & $h_{v_R}(x, z, t) = h_B(z, t) \Rightarrow f_A(z, t+1) \neq f_B(z, t)$. Рассмотрим 2 случая: первый случай $h_B(z, t) > 0$. В этом случае $h_{v_R}(x, z, t) = n + h_B(z, t) > n$ и $h_{v_R}(x, z, t+1) = h_A(z, t+1) \leq n$ и отсюда следует, что $h_{v_R}(x, z, t+1) \neq h_{v_R}(x, z, t)$.

Второй случай $h_B(z, t) = 0$. В этом случае n – четное число, следовательно, $f_B(z, t) = 0$. Это означает, что $f_B(z, t) \neq f_A(z, t+1) = 1$. Следовательно, $h_A(z, t+1) < n$. Значит, $h_{v_R}(x, z, t+1) = h_A(z, t+1) < n$ и $h_{v_R}(x, z, t) = n + h_B(z, t) = n$. Следовательно, $h_{v_R}(x, z, t+1) \neq h_{v_R}(x, z, t)$.

Если $x \in R^t$, то $f_{v_R}(x, z, t + 1) = f_A(z, t + 1) \& f_{v_R}(x, z, t) = f_A(z, t + 1) \Rightarrow f_A(z, t + 1) \neq f_A(z, t) \Rightarrow h_A(z, t + 1) \neq h_A(z, t) \Rightarrow h_{v_R}(x, z, t + 1) \neq h_{v_R}(x, z, t)$.

Пусть теперь n – четное число. Также пусть R – произвольное несобственное в.п. множество и пусть $\langle f_A, h_A \rangle, \langle f_B, h_B \rangle$ – аппроксимационные функции для множеств A, B соответственно. Строим аппроксимационные функции $\langle f_{v_R}, h_{v_R} \rangle$ для нумерации v_R следующим образом: для любых $x, z, t \in \omega$ если $x \notin R^t$, то пусть

$$\begin{aligned} f_{v_R}(x, z, t) &= f_B(z, t), \\ h_{v_R}(x, z, t) &= n + 1 + h_B(z, t), \end{aligned}$$

И, если $x \in R^t$, то пусть

$$\begin{aligned} f_{v_R}(x, z, t) &= f_A(z, t), \\ h_{v_R}(x, z, t) &= h_A(z, t). \end{aligned}$$

Покажем, что пара функций $\langle f_{v_R}, h_{v_R} \rangle$ удовлетворяет условиям 1)-3) в определении. Для любых $x, z \in \omega$:

4) $f_{v_R}(x, z, 0) = f_B(z, 0) = 0$.

5) $h_{v_R}(x, z, 0) = n + h_B(z, 0) = n + 1 + n = 2n + 1$.

Если $x \notin R^{t+1}$, то $h_{v_R}(x, z, t + 1) = n + 1 + h_B(z, t + 1) \leq n + 1 + h_B(z, t) = h_{v_R}(x, z, t)$.

Если $x \in R^{t+1}$ и $x \notin R^t$, то $h_{v_R}(x, z, t + 1) = h_A(z, t + 1) \leq n < n + 1 + h_B(z, t) = h_{v_R}(x, z, t)$.

Если $x \in R^t$, то $h_{v_R}(x, z, t + 1) = h_A(z, t + 1) \leq h_A(z, t) = h_{v_R}(x, z, t)$.

6) Пусть $f_{v_R}(x, z, t + 1) \neq f_{v_R}(x, z, t)$. Покажем, что $h_{v_R}(x, z, t + 1) \neq h_{v_R}(x, z, t)$.

Если $x \notin R^{t+1}$, то $f_{v_R}(x, z, t + 1) = f_B(z, t + 1) \& f_{v_R}(x, z, t) = f_B(z, t + 1) \Rightarrow f_B(z, t + 1) \neq f_B(z, t) \Rightarrow h_B(z, t + 1) \neq h_B(z, t) \Rightarrow h_{v_R}(x, z, t + 1) \neq h_{v_R}(x, z, t)$.

Если $x \in R^{t+1}$ и $x \notin R^t$, то $f_{v_R}(x, z, t + 1) = f_A(z, t + 1) \& f_{v_R}(x, z, t) = f_B(z, t) \& h_{v_R}(x, z, t + 1) = h_A(z, t + 1) \leq n \& h_{v_R}(x, z, t) = n + 1 + h_B(z, t) > n \Rightarrow h_A(z, t + 1) \neq h_B(z, t)$.

Если $x \in R^t$, то $f_{v_R}(x, z, t + 1) = f_A(z, t + 1) \& f_{v_R}(x, z, t) = f_A(z, t + 1) \Rightarrow f_A(z, t + 1) \neq f_A(z, t) \Rightarrow h_A(z, t + 1) \neq h_A(z, t) \Rightarrow h_{v_R}(x, z, t + 1) \neq h_{v_R}(x, z, t)$.

Учитывая предложение, можно сказать, что для любого двухэлементного семейства Σ_n^{-1} -множеств $S = \{A, B\}$ полурешетка L_m^0 изоморфно вложится в полурешетку Роджерса $\mathcal{R}_{2n+1}^{-1}(S)$. А если n – четное, то вложимость верна и для полурешетки Роджерса $\mathcal{R}_{2n}^{-1}(S)$. Покажем, что оценки вложимости полурешетки L_m^0 в полурешетку Роджерса не улучшаются.

Теорема. Для любого $n \geq 1$ найдется двухэлементное семейство Σ_n^{-1} -множеств $S = \{A, B\}$ такое, что

$$|\mathcal{R}_n^{-1}(S)| = |\mathcal{R}_{n+1}^{-1}(S)| = \dots = |\mathcal{R}_{2n-1}^{-1}(S)| = 1$$

Доказательство. Строим разрешимую Σ_n^{-1} -вычислимую нумерацию α следующим образом: $\alpha(0) = A$ и $\alpha(x) = B$ для всех $x \geq 1$. Пусть π_k – все Σ_{2n-1}^{-1} -вычислимые нумерации всех Σ_{2n-1}^{-1} -вычислимых семейств. Пусть $a(k, x, i)$ – произвольная 1 – 1-вычислимая функция. Будем строить аппроксимационные функции f_A, h_A, f_B, h_B для множеств A и B соответственно и функции g_k ($k \in \omega$), удовлетворяющие следующему требованию: Если π_k – Σ_{2n-1}^{-1} -вычислимая нумерация семейства S , то g_k всюду определена и сводит π_k к α .

Стратегия для g_k .

Определяем $f_A(a(k, x, 0), t) = 1$, $h_A(a(k, x, 0), t) = n - 1$, $f_B(a(k, x, 1), t) = 1$, $h_B(a(k, x, 1), t) = n - 1$. Ждём, пока $f_{\pi_k}(x, a(k, x, 0), t)$ или $f_{\pi_k}(x, a(k, x, 1), t)$ не поменяют свои значения.

Случай 1. Если $g_k(x)$ не определена, $f_{\pi_k}(x, a(k, x, 0), t + 1) = f_A(a(k, x, 0), t)$ и $h_A(a(k, x, 0), t) \neq 0$, то пусть $f_A(a(k, x, 0), t + 1) = \overline{sg}(f_A(a(k, x, 0), t))$ и $h_A(a(k, x, 0), t + 1) =$

$h_A(a(k, x, 0), t) - 1$. А если $g_k(x)$ не определена, $f_{\pi_k}(x, a(k, x, 1), t + 1) = f_B(a(k, x, 1), t)$ и $h_B(a(k, x, 1), t) \neq 0$, то пусть $f_B(a(k, x, 1), t + 1) = \overline{sg}(f_B(a(k, x, 1), t))$ и $h_B(a(k, x, 1), t + 1) = h_B(a(k, x, 1), t) - 1$.

Случай 2. Если g_k не определена, $f_{\pi_k}(x, a(k, x, 0), t + 1) = f_A(a(k, x, 0), t)$ и $h_A(a(k, x, 0), t) = 0$, то пусть $g_k(x) = 0$. А если g_k не определена, $f_{\pi_k}(x, a(k, x, 1), t + 1) = f_B(a(k, x, 1), t)$ и $h_B(a(k, x, 1), t) = 0$, то пусть $g_k(x) = 1$.

Случай 3. Если $g_k(x)$ определена и $g_k(x) = 1$, то пусть $f_A(a(k, x, 1), t + 1) = \overline{sg}(f_{\pi_k}(x, a(k, x, 1), t + 1))$ и $h_A(a(k, x, 1), t + 1) = h_{\pi_k}(x, a(k, x, 1), t + 1)$. Если $g_k(x)$ определена и $g_k(x) = 0$, то пусть $f_B(a(k, x, 0), t + 1) = \overline{sg}(f_{\pi_k}(x, a(k, x, 0), t + 1))$ и $h_B(a(k, x, 0), t + 1) = h_{\pi_k}(x, a(k, x, 0), t + 1)$.

Конструкция стратегии

Шаг 0. Пусть $f_A(x, 0) = 0$, $h_A(x, 0) = n$, $f_B(x, 0) = 0$, $h_B(x, 0) = n$ для всех $x \in \omega$. И $g_k^0(x)$ не определена для всех $k, x \in \omega$. И пусть $f_\alpha(x, y, 0) = 0$, $h_\alpha(x, y, 0) = n$ для всех $x, y \in \omega$. Переходим к следующему шагу.

Шаг t+1. Пусть $m = l(t)$, $k = l(m)$, $x = r(m)$ и выполняем инструкции следующих случаев.

Случай 1. Если t наименьший номер такой, что $l(t) = m$, то пусть $f_A(a(k, x, 0), t + 1) = 1$, $h_A(a(k, x, 0), t + 1) = n - 1$ и $f_B(a(k, x, 1), t + 1) = 1$, $h_B(a(k, x, 1), t + 1) = n - 1$. Переходим в конец шага.

Случай 2. Если найдется $t' < t$ такой, что $l(t') = l(t) = m$ и $g_k^t(x)$ не определена, то выполняем инструкции следующих подслучаев.

Подслучай 2.1. Если $h_A(a(k, x, 0), t) \neq 0$ и $h_B(a(k, x, 1), t) \neq 0$, то пусть

$$\begin{aligned} f_A(a(k, x, 0), t + 1) &= \overline{sg}(f_{\pi_k}(x, a(k, x, 0), t + 1)), \\ h_A(a(k, x, 0), t + 1) &= h_A(a(k, x, 0), t) - \overline{sg}|f_{\pi_k}(x, a(k, x, 0), t + 1) - f_A(a(k, x, 0), t)|, \\ f_B(a(k, x, 1), t + 1) &= \overline{sg}(f_{\pi_k}(x, a(k, x, 1), t + 1)), \\ h_B(a(k, x, 1), t + 1) &= h_B(a(k, x, 1), t) - \overline{sg}|f_{\pi_k}(x, a(k, x, 1), t + 1) - f_B(a(k, x, 1), t)|. \end{aligned}$$

Переходим в конец шага.

Подслучай 2.2. Если $h_A(a(k, x, 0), t) = 0$ и $f_A(a(k, x, 0), t) = f_{\pi_k}(x, a(k, x, 0), t + 1)$, то пусть $g_k^{t+1}(x) = 0$. Переходим в конец шага.

Подслучай 2.3. Если подслучай 2.2. не выполняется, $h_B(a(k, x, 1), t) = 0$ и $f_{\pi_k}(x, a(k, x, 1), t + 1) = f_B(a(k, x, 1), t)$, то пусть $g_k^{t+1} = 1$. Переходим в конец шага.

Подслучай 2.4. Если подслучаи 2.1.-2.3. не выполняются, то пусть $f_A(a(k, x, 0), t + 1) = f_A(a(k, x, 0), t)$, $h_A(a(k, x, 0), t + 1) = h_A(a(k, x, 0), t)$, $f_B(a(k, x, 1), t + 1) = f_B(a(k, x, 1), t)$, $h_B(a(k, x, 1), t + 1) = h_B(a(k, x, 1), t)$. Переходим в конец шага.

Случай 3. Если $g_k^t(x)$ определена, то выполняем инструкции следующих подслучаев.

Подслучай 3.1. Если $g_k^t(x) = 0$, то пусть

$$\begin{aligned} f_B(a(k, x, 0), t + 1) &= \overline{sg}(f_{\pi_k}(x, a(k, x, 0), t + 1)), \\ h_B(a(k, x, 0), t + 1) &= h_{\pi_k}(x, a(k, x, 0), t + 1). \end{aligned}$$

Переходим в конец шага.

Подслучай 3.2. Если $g_k^t(x) = 1$, то пусть

$$\begin{aligned} f_A(a(k, x, 1), t + 1) &= \overline{sg}(f_{\pi_k}(x, a(k, x, 1), t + 1)), \\ h_A(a(k, x, 1), t + 1) &= h_{\pi_k}(x, a(k, x, 1), t + 1). \end{aligned}$$

Переходим в конец шага.

Конец шага. Для всех $m, y \in \omega$, если $g_m^t(y)$ определена, то пусть $g_m^{t+1}(y) = g_m^t(y)$. Для всех s таких, что $s \neq a(k, x, 0)$ и $s \neq a(k, x, 1)$ пусть $f_A(s, t+1) = f_A(s, t)$, $h_A(s, t+1) = h_A(s, t)$, $f_B(s, t+1) = f_B(s, t)$, $h_B(s, t+1) = h_B(s, t)$. Для всех $x \geq 1$ и y пусть $f_\alpha(0, y, t+1) = f_A(y, t+1)$, $h_\alpha(0, y, t+1) = h_A(y, t+1)$, $f_\alpha(x, y, t+1) = f_B(y, t+1)$, $h_\alpha(x, y, t+1) = h_B(y, t+1)$. Переходим к следующему шагу.

Свойства конструкции

1. Для всех $i \geq 1$ $\alpha(i) = \alpha(1)$. В частности, $S = \{\alpha(1), \alpha(1)\}$.
2. Для каждого $y \in \alpha(0) \cup \alpha(1)$ найдется $i \leq 1$ и $k, x \in \omega$ такие, что $y = a(k, x, i)$.
3. Для всех $k, x, t \in \omega$, если $g_k^t(x)$ определена, тогда $g_k^s(x)$ определена и $g_k^t(x) = g_k^s(x)$ для всех $s \geq t$. В частности, каждая g_k является частично рекурсивной функцией.
4. Для каждого k , если π_k – нумерация семейства S , тогда g_k всюду определена. Свойства 1-4 очевидны.
5. $S \subseteq \Sigma_n^{-1}$ и α является Σ_n^{-1} -вычислимой нумерацией семейства S .

Доказательство. В наших множествах все элементы вида $a(k, x, 0)$ или $a(k, x, 1)$ (по свойству 2.) Для доказательства этого свойства нам достаточно показать, что функции h_A и h_B корректно определены. По конструкции в нулевом шаге для всех x $h_A(x, 0) = h_B(x, 0) = n$.

Для h_A по конструкции видно, что для элементов вида $a(k, x, 0)$ функция h_A корректно определена, т.е. для любого t :

- 1) $h_A(a(k, x, 0), 0) = n$,
- 2) $f_A(a(k, x, 0), t+1) \neq f_A(a(k, x, 0), t) \Rightarrow h_A(a(k, x, 0), t+1) \neq h_A(a(k, x, 0), t)$,
- 3) $h_A(a(k, x, 0), t+1) \leq h_A(a(k, x, 0), t)$.

А для элементов вида $a(k, x, 1)$ ясно, что $h_A(a(k, x, 1), 0) = n$. По конструкции $f_A(a(k, x, 1), t)$ меняет своё значение лишь тогда, когда $g_k^t(x) = 1$. Пусть t_0 – наименьший шаг, когда $g_k^t(x)$ определился и $g_k^t(x) = 1$. По подслучаю 2.3. $f_{\pi_k}(x, a(k, x, 1), t_0) = f_B(a(k, x, 1), t_0 - 1) = 1$ и $f_A(a(k, x, 1), t_0) = \overline{sg}(f_{\pi_k}(x, a(k, x, 1), t_0)) = 0 = f_A(a(k, x, 1), s)$ для любых $s \leq t_0$. Значит, для $t \leq t_0$ второе условие выполняется. А для $t > t_0$ очевидно по подслучаю 3.2. По конструкции видно то, чтобы функция $g_k(x)$ определилась и равнялась 1, $\pi_k(x)$ должен как минимум n колебаний истратить. Значит, $h_{\pi_k}(x, a(k, x, 1), t_0) \leq 2n - 1 - n = n - 1$. Так как $f_A(a(k, x, 1), s) = n$ для всех $s \leq t_0$, монотонность функции сохраняется.

А корректность h_B доказывается точно так же.

6. Для любого $k \in \omega$, если π_k – нумерация семейства S , то $\pi_k(x) = \alpha(g_k(x))$ для всех $x \in \omega$.

Доказательство. Пусть π_k – нумерация семейства S и пусть x – произвольное число. По свойству 4 функция g_k всюду определена и по конструкции $g_k(x) = 0$ или $g_k(x) = 1$.

Рассмотрим случай, когда $g_k(x) = 0$. Докажем, что $\pi_k(x) = \alpha(0) = A$. Пусть t_0 – такой наименьший шаг, что $g_k^t(x)$ определена. Пойдем от противного, пусть $\pi_k(x) = B$. Так как $g_k(x) = 0$ в конструкции, начиная с момента t_0 , всегда будет срабатывать подслучай 3.1., и в пределе

$$\lim_t (f_B(a(k, x, 0), t)) = \lim_t \left(\overline{sg}(f_{\pi_k}(x, a(k, x, 0), t)) \right) \Rightarrow \lim_t (f_B(a(k, x, 0), t)) \neq \lim_t (f_{\pi_k}(x, a(k, x, 0), t)).$$

Это противоречит нашему предположению $\pi_k(x) = B$.

А случай, когда $g_k(x) = 1$ доказывается аналогично.

$$7. |\mathcal{R}_n^{-1}(S)| = |\mathcal{R}_{n+1}^{-1}(S)| = \dots = |\mathcal{R}_{2n}^{-1}(S)| = 1.$$

Доказательство. По сути, нам достаточно доказать, что $|\mathcal{R}_{2n-1}^{-1}(S)| = 1$. Если бы для некоторого $n \leq m < 2n - 1$ была бы $|\mathcal{R}_m^{-1}(S)| > 1$, то $|\mathcal{R}_{2n}^{-1}(S)| > 1$, так как полурешетка Роджерса некоторого уровня содержит все нумерации и их структуры полурешеток меньших уровней. Так как π_k – все Σ_{2n-1}^{-1} -вычислимы нумерации всех Σ_{2n-1}^{-1} -вычислимы семейств, то если π_k нумерация - нумерация нашего семейства, то по свойству 6, π_k сводится к разрешимой Σ_n^{-1} -вычислимой нумерации α через функцию g_k . Отсюда следует, что $|\mathcal{R}_{2n-1}^{-1}(S)| = 1$.

Следствие. Для нечетных n найдется двухэлементное семейство Σ_n^{-1} -множеств $S = \{A, B\}$ такое, что $|\mathcal{R}_{2n}^{-1}(S)| = 1$.

Доказательство. Строим разрешимую Σ_n^{-1} -вычислимую нумерацию α следующим образом: $\alpha(0) = A$ и $\alpha(x) = B$ для всех $x \geq 1$. Пусть π_k – все Σ_{2n}^{-1} -вычислимые нумерации всех Σ_{2n}^{-1} -вычислимых семейств. Пусть $a(k, x, i)$ – произвольная 1 – 1-вычислимая функция. Будем строить аппроксимационные функции f_A, h_A, f_B, h_B для множеств A и B соответственно и функции g_k ($k \in \omega$), удовлетворяющие следующему требованию: Если π_k – Σ_{2n}^{-1} -вычислимая нумерация семейства S , тогда g_k всюдуопределена и сводит π_k к α .

Стратегия и конструкция будут такими же, как в теореме. Все свойства теоремы тоже выполняются и доказываются также, за исключением свойства 5.

Доказательство свойства 5. В наших множествах все элементы вида $a(k, x, 0)$ или $a(k, x, 1)$ (по свойству 2.) Для доказательства этого свойства, нам достаточно показать, что функции h_A и h_B корректно определены. По конструкции, в нулевом шаге для всех x $h_A(x, 0) = h_B(x, 0) = n$.

Для h_A . По конструкции видно, что для элементов вида $a(k, x, 0)$ функция h_A корректно определены, т.е. для любого t :

$$1) h_A(a(k, x, 0), 0) = n,$$

$$2) f_A(a(k, x, 0), t + 1) \neq f_A(a(k, x, 0), t) \Rightarrow h_A(a(k, x, 0), t + 1) \neq h_A(a(k, x, 0), t),$$

$$3) h_A(a(k, x, 0), t + 1) \leq h_A(a(k, x, 0), t).$$

По конструкции видно: чтобы функция $g_k(x)$ определилась и равнялась 1, $\pi_k(x)$ должен истратить как минимум n колебаний. Значит, $h_{\pi_k}(x, a(k, x, 1), t_0) \leq 2n - n = n$. Так как $h_A(a(k, x, 1), s) = n$ для всех $s \leq t_0$, монотонность функции сохраняется.

А для элементов вида $a(k, x, 1)$ ясно, что $h_A(a(k, x, 1), 0) = n$. По конструкции, $f_A(a(k, x, 1), t)$ меняет своё значение лишь тогда, когда $g_k^t(x) = 1$. Пусть t_0 – наименьший шаг, в котором $g_k^t(x)$ определился и $g_k^t(x) = 1$. По подслучаю 2.3. $f_{\pi_k}(x, a(k, x, 1), t_0) = f_B(a(k, x, 1), t_0 - 1) = 1$ и $f_A(a(k, x, 1), t_0) = \overline{s\bar{g}}(f_{\pi_k}(x, a(k, x, 1), t_0)) = 0 = f_A(a(k, x, 1), s)$ для любых $s \leq t_0$. Значит, для $t \leq t_0$ второе условие выполняется. Из $h_{\pi_k}(x, a(k, x, 1), s) = n$ следует, что $f_{\pi_k}(x, a(k, x, 1), s) = 1$. Значит, когда сработает подслучай 3.2 при $h_{\pi_k}(x, a(k, x, 1), s) = n$, функция $f_A(x, a(k, x, 1), s)$ свое значение не поменяет, и это значит 2 условия не рушится. А для $t > t_0$ очевидно по подслучаю 3.2.

А корректность h_B доказывается точно также.

Замечание. При четных n доказательство свойства 5 не проходит.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Гончаров С.С., Сорби А. Обобщенные вычислимые нумерации и нетривиальные полурешетки Роджерса // Алгебра и логика – 1997. Т. 36 - №6. – С. 621-641.
- [2] Badaev S.A., Goncharov S.S. Theory of numberings: open problems // Computability theory and its applications – 2000. P. Cholack (ed.) et al. (Contemp. Math. – Т. 257), Providence, RI, Am. Math. Soc., - С. 23-38.
- [3] Badaev S.A., Talasbaeva Zh.T. Computable numberings in the hierarchy of Ershov // Concharov S.S., (ed.) et al., Mathematical logic in Asia. Proceedings of the 9th Asian logic conference (Novosibirks, Russia, August 16-19, 2005). – 2006. NJ. World Scientific. –С. 17-30.
- [4] Ash C.J., Knight J.F. Computable structure and the hyperarithmetical hierarchy, (Stud. Logic Found. Math., -Т. 144), Amsterdam etc., Elsvier Sci. B.V., -2000. -346 p.
- [5] Ершов Ю.Л., Об одной иерархии множеств // Алгебра и логика. – 1968. – Т. 7, - №1, – С. 47-74.
- [6] Ершов Ю.Л., Об одной иерархии множеств // Алгебра и логика. – 1968. – Т. 7, - №4, - С. 15-47.
- [7] Rodgers H. Theory of recursive functions and effective computability. – New York: McGraw-Hill, 1967. – 482 p. (имеется русский перевод: Роджерс Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. – Москва: Мир, 1972. – 624 с.)
- [8] Ершов Ю.Л. Теория нумераций. – Москва: Наука, 1977. – 416 с.

REFERENCES

- [1] Goncharov S.S., Sorbi A. Obobshhennye vychislimye numeracii i netrivial'nye polureshetki Rodzhersa // Algebra i logika. 1997. T. 36. №6. S. 621-641.

[2] Badaev S.A., Goncharov S.S. Theory of numberings: open problems // Computability theory and its applications – 2000. P. Cholack (ed.) et al. (Contemp. Math. T. 257), Providence, RI, Am. Math. Soc., С. 23-38.

[3] Badaev S.A., Talasbaeva Zh.T. Computable numberings in the hierarchy of Ershov // Goncharov S.S., (ed.) et al., Mathematical logic in Asia. Proceedings of the 9th Asian logic conference (Novosibirsk, Russia, August 16-19, 2005). 2006. NJ. World Scientific. С. 17-30.

[4] Ash C.J., Knight J.F. Computable structure and the hyperarithmetical hierarchy, (Stud. Logic Found. Math., -Т. 144), Amsterdam etc., Elsevier Sci. B.V., 2000. 346 p.

[5] Ershov Ju.L., Ob odnoj ierarhii mnozhestv // Algebra i logika. 1968. Т. 7, №1, S. 47-74.

[6] Ershov Ju.L., Ob odnoj ierarhii mnozhestv // Algebra i logika. 1968. Т. 7, №4, S. 15-47.

[7] Rodgers H. Theory of recursive functions and effective computability. New York: McGraw-Hill, 1967. 482 p. (imeetsja russkij perevod: Rodzher H. Teoriya rekursivnyh funkcij i jeffektivnaja vychislimost'. Moskva: Mir, 1972. 624 s.)

[8] Ershov Ju.L. Teoriya numeracij. Moskva: Nauka, 1977. 416 s.

ӘОЖ: 510.54

Б.С. Калмурзаев

Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан
E-mail: birzhan.kalmurzayev@gmail.com

L_m^0 ЖАРТЫТОРЫНЫҢ ЕКІ ЭЛЕМЕНТІ ЕРШОВ ИЕРАРХИЯСЫНЫҢ ЖИЫНДАР ҮЙІРІНІҢ РОДЖЕРС ЖАРТЫТОРЫНА ЕНУІНІҢ БАҒАЛАУЛАРЫ ЖАЙЛЫ

Аннотация. Рекурсив саналымды m деңгейлердің құрылымы өте күрделі екендігі жақсы белгілі. Ол универсалды деңгейі, шексіз тізбе және анти-тізбесі бар жоғарғы жартыторды құрайды. Және де ол жартытордың қауты шексіз екендігі белгілі. Бұл жұмыста рекурсив саналымды m деңгейлер жартыторының екі элементті Ершов иерархиясының ақырлы деңгейіндегі жиындар үйірінің Роджерс жартыторына енуінің бағалаулары берілген. Және де бір элементті Роджерс жартыторларының мысалдардың көмегімен біздің бағалаулардан кез келген төмен деңгейдегі бағалаулары жақсартылмайтындығы дәлелденген.

Түйін сөздер: рекурсив саналымды m деңгейлерінің жартыторы, Роджерс жартыторы, Ершов иерархиясы, рекурсив саналымды жиындар, шешілімді нөмірлеулер.

МАЗМҰНЫ

<i>Буртебаев Н., Керимкулов Ж.К., Алимов Д.К., Отарбаева А.М., Мухамеджанов Е.С., Джансейтов Д.М.</i> 18 МэВ энергиялы дейтрондардың ⁶ Li ядроларынан серпімді шашырауын зерттеу	5
<i>Жұмбаев Д.С., Темешева С.М.</i> Сызықсыз жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйесінің бүкіл өсте шектелген шешімін табу есебінің аппроксимациясы.....	13
<i>Исахов А. А., Даржанова А. Б.</i> Математикалық модельдеу әдісі арқылы қоршаған ортаға жылу электр станцияларының жұмысының әсерін бағалау.....	20
<i>Дроздов А.М., Жохов А.Л., Юнусов А.А., Юнусова А.А.</i> Космологиялық мәселелерді шешудің жуықтау салдары. (1-бөлім).....	27
<i>Дроздов А.М., Жохов А.Л., Юнусов А.А., Юнусова А.А.</i> Космологиялық мәселелерді шешудің жуықтау салдары. (2-бөлім)	36
<i>Дроздов А.М., Жохов А.Л., Юнусов А.А., Юнусова А.А.</i> Космологиялық мәселелерді шешудің жуықтау салдары (1-бөлім)	46
<i>Дроздов А.М., Жохов А.Л., Юнусов А.А., Юнусова А.А.</i> Космологиялық мәселелерді шешудің жуықтау салдары. (2-бөлім)	55
<i>Байжанов С.С., Култешов Б.Ш.</i> Эбден О-минималдық теориялардың модельдерін байытуда инварианттық қасиеттері.....	65
<i>Дүйсенбай А.Д., Такибаев Н.Ж., Курманғалиева В.О.</i> Исследование реакций взаимодействия изотопов Li и Be с нейтронами.....	72
<i>Қабылбеков К.А., Аширбаев Х.А., Абекова Ж.А., Омашова Г.Ш., Қыдырбекова Ж.Б., Джумағалиева А.И.</i> Нақты газ изотермаларын зерттеуге арналған компьютерлік зертханалық жұмысты орындауды ұйымдастыру	77
<i>Калмурзаев Б.С.</i> L_m^0 Жартыторының екі элементі ершов иерархиясының жиындар үйірінің Роджерс жартыторына енуінің бағалаулары жайлы.....	83
<i>Рябкин Ю.А., Рақыметов Б.А., Байтұмбетова Б.А., Айтмұқан Т., Клименов В.В., Муратов Д.А., Мереке А.У., Умирзаков А.У.</i> Көміртекті қабықшаның парамагнитті қасиетін анықтау негізінде кеуікті никельді анодты зерттеу үшін ЭПР әдісінің мүмкіндігі.....	91
<i>Байтұмбетова Б.А., Рябкин Ю.А., Рахметов Б.А.</i> Графен құрылымдарын ультрадыбыс өрісінде графитті ароматикалық көмірсутектер жүйесінде әсер етіп алу және оларды ЭПР әдісімен зерттеу.....	99
<i>Буртебаев Н., Керимкулов Ж.К., Алимов Д.К., Отарбаева А.М., Мухамеджанов Е.С., Джансейтов Д.М.</i> 18 МэВ энергиялы дейтрондардың ⁶ Li ядроларынан серпімді шашырауын зерттеу.....	104
<i>Жұмбаев Д.С., Темешева С.М.</i> Сызықсыз жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйесінің бүкіл өсте шектелген шешімін табу есебінің аппроксимациясы.....	113
<i>Жаврин Ю.И., Косов В.Н., Молдабекова М.С., Асембаева М.К., Федоренко О.В., Мукамеденқызы В.</i> Ауамен араласатын кейбір табиғи газ қоспасы компоненттері коэффициенттерінің табы.....	120
<i>Шыныбаев М.Д., Даирбеков С.С., Жолдасов С.А., Алиасқаров Д.Р., Мырзақасова Г.Е., Шекербекова С.А., Садыбек А.Ж.</i> Екі жылжымайтын нүкте проблемасының жаңа нұсқасын үш дене есебінде қолдану.....	127
<i>Шалданбаев А.Ш., Ақылбаев М.И., Сапрунова М.Б.</i> Толқындардың үзік ішек бойымен таралуы туралы.....	137
<i>Жақып-тегі К. Б.</i> $k - \varepsilon$, $1es$, рейнольдс және дәрежелі моделдер туралы.....	144
<i>Мазакова Б.М., Жақыпов А.Т., Абдикеримова Г.Б.</i> Көзі ашық мәліметтердің негізінде ғарыш аппараттарының орбитасын салу.....	159
<i>Сапрунова М.Б., Ақылбаев М.И., Шалданбаев А.Ш.</i> Желідегі ақпарларды қорғаудың бір тәсілі туралы.....	164
<i>Самагулова Л.А., Исаева Г.Б.</i> Программалауды оқытуда қолданылатын оқыту технологияларының ерекшеліктері	173
<i>Есқалиев М.Е.</i> Жүктелген элемент әсерінен болатын есепті жуықтап шешу үшін шекаралық элементтер әдісі....	180
<i>Миндетбаева А.А., Мусаханова М.А.</i> Информатика бойынша сыныптан тыс жұмыстарды жүргізуге арналған ақпараттық-бағдарламалық кешен құру.....	187

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Буртебаев Н., Керимкулов Ж.К., Алимов Д.К., Отарбаева А.М., Мухамеджанов Е.С., Джансейтов Д.М.</i> Изучение упругого рассеяния дейтронов на ядрах ${}^6\text{Li}$ при энергии 18 МэВ.....	5
<i>Джумабаев Д.С., Темешева С.М.</i> Аппроксимация задачи нахождения ограниченного решения системы нелинейных нагруженных дифференциальных уравнений.....	13
<i>Исахов А. А., Даржанова А. Б.</i> Оценка воздействия функционирования тепловой электростанции на окружающую среду методами математического моделирования.....	20
<i>Дроздов А.М., Жохов А.Л., Юнусов А.А., Юнусова А.А.</i> Решение космологической проблемы в приближениях (Часть-1).....	27
<i>Дроздов А.М., Жохов А.Л., Юнусов А.А., Юнусова А.А.</i> Решение космологической проблемы в приближениях (Часть-2).....	36
<i>Дроздов А.М., Жохов А.Л., Юнусов А.А., Юнусова А.А.</i> Решение космологической проблемы в приближениях (Часть-1).....	46
<i>Дроздов А.М., Жохов А.Л., Юнусов А.А., Юнусова А.А.</i> Решение космологической проблемы в приближениях (Часть-2).....	55
<i>Байжанов С.С., Кулпешов Б.Ш.</i> Инвариантные свойства при обогащениях моделей вполне О-минимальных теорий.....	65
<i>Дүйсенбай А.Д., Такибаев Н.Ж., Құрманғалиева В.О.</i> Li және Be изотоптарының нейтрондармен әрекеттесу реакцияларын зерттеу.....	72
<i>Кабылбеков К.А., Аширбаев Х.А., Абекова Ж.А., Омишова Г.Ш., Кыдырбекова Ж.Б., Джумагалиева А.И.</i> Организация выполнения компьютерной лабораторной работы по исследованию изотерм реального газа.....	77
<i>Калмурзаев Б.С.</i> Об оценках вложимости L_m^0 в полурешетку Роджерса двухэлементных семейств множеств иерархии Ершова.....	83
<i>Рябкин Ю.А., Рақыметов Б.А., Байтимбетова Б. А., Айтмукан Т., Клименов В.В., Муратов Д.А., Мереке А.У., Умирзаков А.У.</i> Выяснение возможности использования метода ЭПР для изучения пористого никелевого анода на основе определения парамагнитных характеристик углеродных пленок.....	91
<i>Байтимбетова Б.А., Рябкин Ю.А., Рахметов Б.А.</i> Получение графеновых структур в системе графит с ароматическими углеводородами при воздействии ультразвукового поля и изучение их методом ЭПР.....	99
<i>Буртебаев Н., Керимкулов Ж.К., Алимов Д.К., Отарбаева А.М., Мухамеджанов Е.С., Джансейтов Д.М.</i> Изучение упругого рассеяния дейтронов на ядрах ${}^6\text{Li}$ при энергии 18 МэВ.....	104
<i>Джумабаев Д.С., Темешева С.М.</i> Аппроксимация задачи нахождения ограниченного решения системы нелинейных нагруженных дифференциальных уравнений.....	113
<i>Жаврин Ю.И., Косов В.Н., Молдабекова М.С., Асембаева М.К., Федоренко О.В., Мукамеденкызы В.</i> Следовые коэффициенты компонентов некоторых природных газовых смесей, диффундирующих в воздух.....	120
<i>Шинибаев М.Д., Даирбеков С.С., Жолдасов С.А., Алиаскаров Д.Р., Мырзакасова Г.Е., Шекербекова С.А., Садыбек А.Ж.</i> Использование новой версии задачи двух неподвижных центров в задаче трех тел.....	127
<i>Шалданбаев А.Ш., Ақылбаев М.И., Сапрунова М.Б.</i> О распространении волн по разрывной струне.....	137
<i>Джакупов К.Б.</i> О $k - \varepsilon$, les , рейнольдс и степенных моделях.....	144
<i>Мазакова Б.М., Жакыпов А.Т., Абдикеримова Г.Б.</i> Построение орбиты космического аппарата на основе открытых исходных данных.....	159
<i>Сапрунова М.Б., Ақылбаев М.И., Шалданбаев А.Ш.</i> Об одном способе защиты передачи информации.....	164
<i>Смагулова Л.А., Исаева Г.Б.</i> Особенности технологий обучения, применяемых в обучении программирования.....	173
<i>Ескалиев М.Е.</i> Метод граничного элемента для приближенного решения задачи, вызванной действием нагруженного элемента.....	180
<i>Миндетбаева А.А., Мусаханова М.А.</i> Создание информационно-программного комплекса для проведения внеклассных работ по информатике.....	187

CONTENTS

<i>Burtebayev N., Kerimkulov Zh.K., Alimov D.K., Otarbayeva A.M., Mukhamejanov Y.S., Janseitov D.M.</i> Study of elastic scattering of deuterons from ${}^6\text{Li}$ AT energy 18 MeV.....	5
<i>Dzhumabaev D.S., Temesheva S.M.</i> Approximation of problem for finding the bounded solution to system of nonlinear loaded differential equations	13
<i>Issakhov A.A., Darzhanova A.B.</i> Assessing the impact of thermal power plants in the aquatic environment in reservoir-cooler.....	20
<i>Drozdov A.M., Zhokhov A.L., Yunusov A.A., Yunusova A.A.</i> Solution of the cosmological problem in the approximations. (Part-1).....	27
<i>Drozdov A.M., Zhokhov A.L., Yunusov A.A., Yunusova A.A.</i> Solution of the cosmological problem in the approximations. (Part-2)	36
<i>Drozdov A.M., Zhokhov A.L., Yunusov A.A., Yunusova A.A.</i> Solution of the cosmological problem in the approximations (Part-1)	46
<i>Drozdov A.M., Zhokhov A.L., Yunusov A.A., Yunusova A.A.</i> Solution of the cosmological problem in the approximations. (Part-2)	55
<i>Baizhanov S.S., Kulpeshov B.Sh.</i> Invariant properties at expanding models of quite O-minimal theories.....	65
<i>Duisenbay A.D., Takibayev N.ZH., Kurmagalieva V.O.</i> Research of the reactions of Li and Be isotopes with neutrons....	72
<i>Kabyrbekov K.A., Ashirbaev H. A., Abekova ZH. A., Omashova G.Sh., Kydyrbekova Zh. B., Dzhumagaliyeva A.I.</i> The organization of performance of computer laboratory operation on examination of isothermal curves real gaza.....	77
<i>Kalmurzayev B.S.</i> On assessments of embeddability L_m^0 in rogers semilattice of two-element families of sets in the Hierarchy of Ershov.....	83
<i>Ryabikin Y.A., Rakymetov B.A., Baytimbetova B.A., Aytmukan T., Klimenov V.V., Muratov D.A., Mereke A.U., Umirzakov A.U.</i> Identification of capabilities of the EPR method in studying porous nickel anodes based on definition of paramagnetic characteristics of carbon films.....	91
<i>Baytimbetova B.A., Ryabikin Yu.A., Rachmetov B.A.</i> Production of graphene structures in the graphite with an aromatic hydrocarbon on exposure to ultrasonic fields and investigation of their EPR.....	99
<i>Burtebayev N., Kerimkulov Zh.K., Alimov D.K., Otarbayeva A.M., Mukhamejanov Y.S., Janseitov D.M.</i> Study of elastic scattering of deuterons from ${}^6\text{Li}$ at energy 18 MeV.....	104
<i>Dzhumabaev D.S., Temesheva S.M.</i> Approximation of problem for finding the bounded solution to system of nonlinear loaded differential equations.....	113
<i>Zhavrin Yu.I., Kosov V.N., Moldabekova M.S., Asembaeva M.K., Fedorenko O.V., Mukamedenkyzy V.</i> Trace coefficients of components of some natural gaseous mixtures diffusing into the air.....	120
<i>Shinibaev M.D., Dairbekov S.S., Zholdasov S.A., Myrzakasova G.E., Aliaskarov D.R., Shekerbekova S.A., Sadybek A.G.</i> Use of the new version of the problem of two centers in the three-body problem.....	127
<i>Shaldanbayev A. Sh., Akylbayev M., Saprunova M.B.</i> About an advance of waves on an explosive string.....	137
<i>Jakupov K.B.</i> About $k-\varepsilon$, les, reynolds and power model.....	144
<i>Mazakova B.M., Zhakypov A.T., Abdikerimova G.B.</i> The spacecraft's orbit consecution based on open source data.....	159
<i>Saprunova M.B., Akylbayev M., Shaldanbayev A. Sh.</i> About one way of protection of information transfer.....	164
<i>Smagulova L.A., Issayeva G.B.</i> Features of the learning technologies used in teaching programming.....	173
<i>Yeskaliyev M.Ye.</i> Boundary element method for the approximate solution of the problem caused by the action of a loaded element.....	180
<i>Mindetbayeva A.A., Musahanova M.A.</i> Creation of the of a software complex for extracurricular activities on informatics.....	187

**Publication Ethics and Publication Malpractice
in the journals of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan**

For information on Ethics in publishing and Ethical guidelines for journal publication see <http://www.elsevier.com/publishingethics> and <http://www.elsevier.com/journal-authors/ethics>.

Submission of an article to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan implies that the described work has not been published previously (except in the form of an abstract or as part of a published lecture or academic thesis or as an electronic preprint, see <http://www.elsevier.com/postingpolicy>), that it is not under consideration for publication elsewhere, that its publication is approved by all authors and tacitly or explicitly by the responsible authorities where the work was carried out, and that, if accepted, it will not be published elsewhere in the same form, in English or in any other language, including electronically without the written consent of the copyright-holder. In particular, translations into English of papers already published in another language are not accepted.

No other forms of scientific misconduct are allowed, such as plagiarism, falsification, fraudulent data, incorrect interpretation of other works, incorrect citations, etc. The National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan follows the Code of Conduct of the Committee on Publication Ethics (COPE), and follows the COPE Flowcharts for Resolving Cases of Suspected Misconduct (http://publicationethics.org/files/u2/New_Code.pdf). To verify originality, your article may be checked by the Cross Check originality detection service <http://www.elsevier.com/editors/plagdetect>.

The authors are obliged to participate in peer review process and be ready to provide corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. All authors of a paper should have significantly contributed to the research.

The reviewers should provide objective judgments and should point out relevant published works which are not yet cited. Reviewed articles should be treated confidentially. The reviewers will be chosen in such a way that there is no conflict of interests with respect to the research, the authors and/or the research funders.

The editors have complete responsibility and authority to reject or accept a paper, and they will only accept a paper when reasonably certain. They will preserve anonymity of reviewers and promote publication of corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. The acceptance of a paper automatically implies the copyright transfer to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.

The Editorial Board of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan will monitor and safeguard publishing ethics.

Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайтах:

www.nauka-nanrk.kz

<http://www.physics-mathematics.kz>

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Редакторы *М. С. Ахметова, Д.С. Аленов, Т.А. Апендиев, А.Е. Бейсебаева*
Верстка на компьютере *А.М. Күльгинбаевой*

Подписано в печать 01.02.2017.
Формат 60x881/8. Бумага офсетная. Печать – ризограф.
11,4 п.л. Тираж 300. Заказ 1.

Национальная академия наук РК
050010, Алматы, ул. Шевченко, 28, т. 272-13-18, 272-13-19