ISSN 2518-1726 (Online),
ISSN 1991-346X (Print)

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ

Х А Б А Р Л А Р Ы

ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

N E W S

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА СЕРИЯСЫ

♦

СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

♦

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

1 (311)

ҚАҢТАР – АҚПАН 2017 ж.
ЯНВАРЬ – ФЕВРАЛЬ 2017 г.
JANUARY – FEBRUARY 2017

1963 ЖЫЛДЫҢ ҚАҢТАР АЙЫНАН ШЫҒА БАСТАҒАН
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1963 ГОДА
PUBLISHED SINCE JANUARY 1963

ЖЫЛЫНА 6 РЕТ ШЫҒАДЫ
ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД
PUBLISHED 6 TIMES A YEAR

АЛМАТЫ, ҚР ҰҒА
АЛМАТЫ, НАН РК
ALMATY, NAS RK

«ҚР ҰҒА Хабарлары. Физика-математикалық сериясы».

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Меншіктенуші: «Қазақстан Республикасының Ұлттық ғылым академиясы» РҚБ (Алматы қ.)
Қазақстан республикасының Мәдениет пен ақпарат министрлігінің Ақпарат және мұрағат комитетінде 01.06.2006 ж. берілген **№5543-Ж** мерзімдік басылым тіркеуіне қойылу туралы куәлік

Мерзімділігі: жылына 6 рет.
Тиражы: 300 дана.

Редакцияның мекенжайы: 050010, Алматы қ., Шевченко көш., 28, 219 бөл., 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18, www:nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

---

Типографияның мекенжайы: «Аруна» ЖК, Алматы қ., Муратбаева көш., 75.

«Известия НАН РК. Серия физико-математическая».

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы)
Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации и архивов Министерства культуры и информации Республики Казахстан **№5543-Ж**, выданное 01.06.2006 г.

Периодичность: 6 раз в год.
Тираж: 300 экземпляров.

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, ком. 219, 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,
www:nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75.

News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physical-mathematical series.

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Owner: RPA "National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan" (Almaty)
The certificate of registration of a periodic printed publication in the Committee of information and archives of the Ministry of culture and information of the Republic of Kazakhstan N 5543-Ж, issued 01.06.2006

Periodicity: 6 times a year
Circulation: 300 copies

Editorial address: 28, Shevchenko str., of. 219, 220, Almaty, 050010, tel. 272-13-19, 272-13-18,
www:nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

Address of printing house: ST "Aruna", 75, Muratbayev str, Almaty

N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 1, Number 311 (2017), 65 – 71

S.S. Baizhanov[1], B.Sh. Kulpeshov[2]

[1]Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan, e-mail: sayan-5252@mail.ru;
[2]International Information Technology University, Almaty, Kazakhstan, e-mail: b.kulpeshov@iitu.kz

INVARIANT PROPERTIES AT EXPANDING MODELS OF QUITE O-MINIMAL THEORIES

Abstract. The present work concerns the notion of weak o-minimality originally studied by D. Macpherson, D. Marker and C. Steinhorn. If M is weakly o-minimal structure and $A \subseteq M$, we say that two non-algebraic 1-types p and q over A are weakly orthogonal if $p(x) \cup q(y)$ has a unique extension to a complete 2-type over A, and we say that p and q are quite orthogonal if there is an A-definable bijection between the sets of realizations of these types. We say that a weakly o-minimal theory is quite o-minimal if the notions of weak and quite orthogonality coincide. Here the properties being invariant regarding to expanding a model of a countably categorical quite o-minimal theory by a convex unary predicate are studied. It is proved that such properties as quite o-minimality, countable categoricity and convexity rank are invariant.

Keywords: weak o-minimality, quite o-minimality, countable categoricity, expansion of a model, convexity rank.

УДК 510.67

С.С. Байжанов[1], Б.Ш. Кулпешов[2]

[1]Институт математики и математического моедлирования, Алматы, e-mail: sayan-5225@mail.ru;
[2]Международный университет информационных технологий, Алматы, e-mail: b.kulpeshov@iitu.kz

ИНВАРИАНТНЫЕ СВОЙСТВА ПРИ ОБОГАЩЕНИЯХ МОДЕЛЕЙ ВПОЛНЕ О-МИНИМАЛЬНЫХ ТЕОРИЙ

Аннотация. В настоящей работе исследуются свойства, являющиеся инвариантными относительно обогащения модели счетно категоричной вполне о-минимальной теории посредством выпуклого унарного предиката. Доказано, что такими свойствами являются вполне о-минимальность, счетная категоричность и ранг выпуклости.

Ключевые слова: слабая о-минимальность, вполне о-минимальность, счетная категоричность, обогащение модели, ранг выпуклости.

Пусть L — счетный язык первого порядка. Всюду в данной статье мы рассматриваем L-структуры и предполагаем что L содержит символ бинарного отношения $<$, который интерпретируется как линейный порядок в этих структурах. Настоящая работа касается понятия *слабой о-минимальности*, первоначально глубоко исследованного в [1]. Подмножество A линейно упорядоченной структуры M называется *выпуклым*, если для любых $a, b \in A$ и $c \in M$ всякий раз когда $a < c < b$ мы имеем $c \in A$. *Слабо о-минимальной структурой* называется линейно упорядоченная структура $M = \langle M, =, <, \ldots \rangle$ такая, что любое определимое (с параметрами) подмножество структуры M является объединением конечного числа выпуклых множеств в M. Вспомним что такая структура M называется *о-минимальной*, если каждое определимое (с параметрами) подмножество структуры M является объединением конечного числа интервалов и точек в M. Таким образом, слабая о-минимальность является обобщением о-минимальности. Вещественно замкнутые поля с собственным выпуклым кольцом нормирования обеспечивают важный пример слабо о-минимальных (не о-минимальных) структур.

Пусть A, B — произвольные подмножества линейно упорядоченной структуры M. Тогда выражение $A < B$ означает, что $a < b$ всякий раз когда $a \in A$ и $b \in B$. Выражение $A < b$ (соответственно $b < A$) означает, что $A < \{b\}$ ($\{b\} < A$). Для произвольного типа p мы обозначаем через $p(M)$ множество реализаций типа p в M. Теория T является *бинарной*, если любая формула теории T эквивалентна в T булевой комбинации формул самое большее от двух свободных переменных.

Определение 1. [2] Пусть T — слабо о-минимальная теория, M — достаточно насыщенная модель теории T, и пусть $\phi(x)$ — произвольная M-определимая формула с одной свободной переменной. *Ранг выпуклости формулы* $\phi(x)$ $(RC(\phi(x)))$ определяется следующим образом:

1) $RC(\phi(x)) \geq 1$, если $\phi(M)$ бесконечно.

2) $RC(\phi(x)) \geq \alpha + 1$, если существуют параметрически определимое отношение эквивалентности $E(x, y)$ и бесконечная последовательность элементов $b_i, i \in \omega$, такие, что:

• Для любых $i, j \in \omega$, всякий раз когда $i \neq j$ мы имеем $M \quad \neg E(b_i, b_j)$

• Для каждого $i \in \omega$ $\quad RC(E(x, b_i)) \geq \alpha$ и $E(M, b_i)$ - выпуклое подмножество множества $\phi(M)$

3) $RC(\phi(x)) \geq \delta$, если $RC(\phi(x)) \geq \alpha$ для всех $\alpha < \delta$ (δ предельный).

Если $RC(\phi(x)) = \alpha$ для некоторого α, то мы говорим что $RC(\phi(x))$ определяется. В противном случае (т.е. если $RC(\phi(x)) \geq \alpha$ для всех α), мы полагаем $RC(\phi(x)) = \infty$.

Рангом выпуклости 1-типа p $(RC(p))$ будем называть инфимум множества $\{RC(\phi(x)) \mid \phi(x) \in p\}$, т.е. $RC(p) := \inf\{RC(\phi(x)) \mid \phi(x) \in p\}$.

В следующих определениях M — слабо о-минимальная структура, $A, B \subseteq M$, M — $|A|^+$-насыщенна, $p, q \in S_1(A)$ — неалгебраические.

Определение 2. [3] Будем говорить что тип p не является *слабо ортогональным* типу q ($p \perp^w q$), если существуют A-определимая формула $H(x, y)$, $\alpha \in p(M)$ и $\beta_1, \beta_2 \in q(M)$ такие что $\beta_1 \in H(M, \alpha)$ и $\beta_2 \notin H(M, \alpha)$.

Лемма 3. [3] Отношение не слабой ортогональности $\perp^w$ является отношением эквивалентности на $S_1(A)$.

Определение 4. [4] Будем говорить что тип p не является *вполне ортогональным* типу q ($p \perp^q q$), если существует A-определимая биекция $f : p(M) \to q(M)$. Будем говорить что слабо о-минимальная теория является *вполне о-минимальной*, если понятия слабой и вполне ортогональности 1-типов совпадают.

Очевидно что любая о-минимальная теория является вполне о-минимальной, поскольку в случае не слабой ортогональности 1-типов над произвольным множеством A существует A-определимая строго монотонная биекция между множествами реализаций этих типов.

Пример 5. [1] Пусть $M = \langle M; <, P_1^1, P_2^1, f^1 \rangle$ — линейно упорядоченная структура такая, что M есть непересекающееся объединение интерпретаций унарных предикатов P_1 и P_2, при этом $P_1(M) < P_2(M)$. Мы отождествляем интерпретацию P_2 с множеством рациональных чисел Q, упорядоченном как обычно, а P_1 с $\mathrm{Q} \times \mathrm{Q}$, упорядоченном лексикографически. Символ f интерпретируется частичной унарной функцией с $\mathrm{D}om(f) = P_1(M)$ и $\mathrm{R}ange(f) = P_2(M)$ определяется равенством $f((n, m)) = n$ для всех $(n, m) \in \mathrm{Q} \times \mathrm{Q}$.

Может быть доказано, что $Th(M)$ — слабо о-минимальная теория. Пусть $p(x):=\{P_1\}$, $q(x):=\{P_2\}$. Очевидно что $p,q\in S_1(\varnothing)$, $p \not\perp^w q$, но $p\perp^q q$, т.е. $Th(M)$ не является вполне о-минимальной. Заметим также, что $RC(p)=2, RC(q)=1$.

Пример 6. Пусть $M:=\langle M,<,P_1^1,P_2^1,E_1^2,E_2^2,f^1\rangle$ — линейно упорядоченная структура, так что M есть непересекающееся объединение интерпретаций унарных предикатов P_1 и P_2, при этом $P_1(M)<P_2(M)$. Мы отождествляем интерпретации P_1 и P_2 с $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$, упорядоченной лексикографически. Интерпретации бинарных предикатов $E_1(x,y)$ и $E_2(x,y)$ — это отношения эквивалентности на $P_1(M)$ и $P_2(M)$ соответственно такие, что для всех $x=(n_1,m_1), y=(n_2,m_2)\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$,

$$E_i(x,y)\Leftrightarrow n_1=n_2, \text{где } i=1, 2.$$

Символ f интерпретируется частичной унарной функцией с $\mathrm{D}om(f)=P_1(M)$ и $\mathrm{R}ange(f)=P_2(M)$ и определяется посредством $f((n,m))=(n,-m)$ для всех $(n,m)\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$.

Можно понять, что $E_1(x,y)$ и $E_2(x,y)$ — $\varnothing$-определимые отношения эквивалентности, разбивающие $P_1(M)$ и $P_2(M)$ соответственно на бесконечное число бесконечных выпуклых классов. Утверждаем, что f является строго убывающей на каждом $E_1(a,M)$, где $a\in P_1(M)$, и f — строго возрастающая на $P_1(M)/E_1$. Может быть доказано, что $\mathrm{T}h(M)$ — вполне о-минимальная теория. Теория $\mathrm{T}h(M)$ не является о-минимальной, поскольку $E_1(a,M)$ определяет выпуклое множество, не являющееся интервалом в M. Заметим также, что $RC(P_1(x))=RC(P_2(x))=2$.

Вполне о-минимальные теории являются подклассом класса слабо о-минимальных теорий, наследующим многие свойства о-минимальных теорий. Так, в работе [5] были полностью описаны счетно категоричные вполне о-минимальные теории. Это описание влечет их бинарность (аналогичный результат верен для счетно категоричных о-минимальных теорий).

Теорема 7. [5], [6] Пусть T — счетно категоричная вполне о-минимальная теория, $M\models \mathrm{T}$, $|M|=\aleph_0$. Тогда

(i) существует конечное множество $C=\{c_0,\ldots,c_n\}\subseteq M(M\cup\ \{-\infty,+\infty\}$, если M не имеет первого или последнего элементов), состоящее из всех $\varnothing$–определимых элементов в M (с возможными исключениями для $-\infty$, $+\infty$), такое что $M \quad c_i<c_j$ для всех $i<j\le n$ и для каждого $j\in\{1,\ldots,n\}$ либо $M \quad \neg(\exists x)c_{j-1}<x<c_j$ либо $I_j=\{x\in M: M \quad c_{j-1}<x<c_j\}$ является плотным линейным порядком без концевых точек и существуют $k_j\in\omega$ и $p_1^j,\ldots,p_{k_j}^j\in S_1(\varnothing)$ так что $I_j=\bigcup_{s=1}^{k_j}p_s^j(M)$;

(ii) для каждого неалгебраического $p\in S_1(\varnothing)$ существует $n_p\in\omega$ такой, что $RC(p)=n_p$, т.е. существуют $\varnothing$-определимые отношения эквивалентности $E_1^p(x,y)$, $E_2^p(x,y)$, …, $E_{n_p-1}^p(x,y)$ такие, что

• $E_{n_p-1}^p$ разбивает $p(M)$ на бесконечное число $E_{n_p-1}^p$-классов, каждый $E_{n_p-1}^p$-класс выпуклый и открытый, так что индуцированный порядок на классах является плотным линейным порядком без концевых точек

• для каждого $i \in \{1, \ldots, n_p - 2\}$ E_i^p разбивает каждый E_{i+1}^p-класс на бесконечное число E_i^p-классов, каждый E_i^p-класс выпуклый и открытый, так что E_i^p-подклассы каждого E_{i+1}^p-класса плотно упорядочены без концевых точек

(iii) существует отношение эквивалентности $\varepsilon \subseteq (\{s : 1 \le s \le k\})^2$, где $\{p_s \mid s \le k < \omega\}$ есть произвольное перечисление всех неалгебраических 1-типов над $\varnothing$, такое что для каждого $(i, j) \in \varepsilon$ существует единственная $\varnothing$–определимая локально монотонная биекция $f_{i,j} : p_i(M) \to p_j(M)$ так что $RC(p_i) = RC(p_j)$, $f_{i,i} = id_{p_i(M)}$ и $f_{j,l} \circ f_{i,j} = f_{i,l}$ для всех $(i, j), (j,l) \in \varepsilon$

так что T допускает элиминацию кванторов до языка

$$\{=,<\} \bigcup \{c_i : i \le n\} \bigcup \{U_s(x) : s \le k\} \bigcup \{E_l^{p_s}(x, y) : s \le k, l \le n_{p_s}\} \bigcup \{f_{i,j} : (i, j) \in \varepsilon\},$$

где $U_s(x)$ изолирует тип p_s для каждого $s \le k$.

Более того, любому упорядочению с выделенными элементами как в (i)-(ii) и любым подходящим отношением эквивалентности ε как в (iii), соответствует счетно категоричная вполне о-минимальная теория как выше.

В настоящей работе исследуются свойства, сохраняющиеся при обогащениях моделей счетно категоричной вполне о-минимальной теории посредством выпуклого унарного предиката. Установлено, что свойствами, сохраняющимися при таких обогащениях, являются вполне о-минимальность, счетная категоричность и ранг выпуклости.

Пусть $M := \langle M, \Sigma \rangle$ — счетно категоричная слабо о-минимальная структура. Обогатим структуру $M := \langle M, \Sigma \rangle$ до структуры $M' := \langle M, \Sigma, U^1 \rangle$ посредством добавления в сигнатуру нового унарного предиката $U(x)$, выделяющего выпуклое множество в M. Согласно основному результату из [3] $T' := Th(M')$ остается слабо о-минимальной теорией. Заметим, что обогащение унарным предикатом $U(x)$, выделяющим конечное число (скажем, m) выпуклых множеств в M, равносильно обогащению m унарными предикатами $U_i(x)$, $1 \le i \le m$, выделяющими выпуклые множества в M (поскольку, очевидно, каждое такое выпуклое множество является $\varnothing$-определимым). Так как M — счетно категорична, то существует лишь конечное число неалгебраических 1-типов над $\varnothing$ $p_1, p_2, \ldots, p_s$. Пусть для определенности $p_1(M) < p_2(M) < \ldots < p_s(M)$. Предположим, что $U(M) \cap p_i(M) \ne \varnothing$ для каждого $1 \le i \le 3$, $p_2(M) \subset U(M)$, существуют $a_1, a_2 \in p_1(M)$, $b_1, b_2 \in p_3(M)$ такие, что

$$M' \models a_1 < a_2 \wedge \neg U(a_1) \wedge U(a_2) \wedge b_1 < b_2 \wedge U(b_1) \wedge \neg U(b_2)$$

Тогда введение предиката $U(x)$ равносильно введению двух выпуклых предикатов $U_1(x)$ и $U_2(x)$, где $U_1(x) := P_1(x) \wedge \neg U(x)$ и $U_2(x) := P_3(x) \wedge U(x)$. Поэтому далее рассматриваем предикат $U(x)$ такой, что для некоторого неалгебраического 1-типа $p \in S_1(\varnothing)$ $U(M) \subset p(M)$, $U(M)^- = p(M)^-$, т.е существует $a \in p(M)$ такой, что $U(M) < a$.

Если правая граница предиката $U(x)$ определяется некоторым элементом $b \in M$, то обогащение предикатом $U(x)$ равносильно обогащению структуры M одной константой. Понятно, что в этом случае T' остается счетно категоричной. Поэтому далее рассматриваем случай, когда правая граница предиката $U(x)$ определяет иррациональное сечение в M.

Пусть $E(x, y)$ — $\varnothing$-определимое отношение эквивалентности, разбивающее $p(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов. Будем говорить, что $U(x)$ является *иррациональным относительно E-классов*, если выполняются следующие два условия:

(1) для каждого $a \in p(M)$ с условием $U(a)$ существует $b \in p(M)$ такой, что

$$M' \models a < b \wedge \neg E(a,b) \wedge U(b);$$

(2) для каждого $c \in p(M)$ с условием $\neg U(c)$ существует $d \in p(M)$ такой, что

$$M' \models d < c \wedge \neg E(c,d) \wedge \neg U(d).$$

Пример 8. Пусть $M := \langle \mathbb{Q}, <, U^1 \rangle$ — линейно упорядоченная структура, где $U(x)$ — унарный предикат, выделяющий в M следующее выпуклое множество:

$$U(M) := \{b \in \mathbb{Q} \mid b < \sqrt{2}\}.$$

Заменим каждую точку $a \in M$ копией множества рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и определим новое бинарное отношение $E(x,y)$ следующим образом: для любых $a_1 = (m_1, n_1), a_2 = (m_2, n_2) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ $E(a_1, a_2) \Leftrightarrow m_1 = m_2$.

В результате получим структуру $M' := \langle \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, <, U^1, E^2 \rangle$. Отношение $E(x,y)$ является отношением эквивалентности, разбивающим M' на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, так что индуцированный порядок на E-классах является плотным порядком без концевых точек.

Может быть доказано, что M' — счетно категоричная слабо о-минимальная структура. Нетрудно понять, что предикат $U(x)$ является иррациональным относительно E-классов.

Будем говорить, что $U(x)$ является *квазирациональным вправо (влево) относительно E-классов*, если существует E-класс $E(a,M)$ для некоторого $a \in p(M)$ такой, что $U(M)^+ = E(a,M)^+$ ($U(M) = p(M) \cap E(a,M)^-$).

Будем далее предполагать, что T — счетно категоричная вполне о-минимальная теория, $M \models T$, $p \in S_1(\varnothing)$ — неалгебраический, M' — обогащение модели M унарным предикатом $U(x)$ таким, что $U(M) \subset p(M)$ и $U(M)^- = p(M)^-$.

Лемма 9. Пусть $RC(p) = n$. Тогда множество реализаций $p(M)$ делится предикатом $U(x)$ на s выпуклых $\varnothing$-определимых множеств, являющихся 1-неразличимыми над $\varnothing$, где $2 \le s \le 2n$.

Доказательство Леммы 9. В силу счетной категоричности теории T тип p является изолированным, откуда существует $\varnothing$-определимая формула $P(x)$, изолирующая тип p. Поскольку $RC(p) = n$, то существуют $\varnothing$-определимые отношения эквивалентности $E_1(x,y), E_2(x,y), \ldots, E_{n-1}(x,y)$, разбивающие $p(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, так что

$$E_1(a,M) \subset E_2(a,M) \subset \ldots \subset E_{n-1}(a,M)$$

для некоторого (любого) $a \in p(M)$. В силу Теоремы 7 тип p определяется только этими отношениями эквивалентности. Следовательно, достаточно исследовать взаимное расположение E_i-классов для $1 \le i \le n-1$ и предиката $U(x)$.

Введем следующие формулы:

$$E_0(x,y) := x = y, \quad E_n(x,y) := P(x) \wedge P(y)$$

$$\theta_i(y) := \exists z_1 \exists z_2 [E_i(y,z_1) \wedge E_i(z_1,z_2) \wedge U(z_1) \wedge \neg U(z_2)], \quad 1 \le i \le n-1$$

$$R_i(y) := \exists z [E_{i+1}(y,z) \wedge \neg E_i(y,z) \wedge y < z \wedge U(y) \wedge \neg U(z) \wedge \forall t_1 (E_i(y,t_1) \to U(t_1)) \wedge$$

$$\wedge \forall t_2 (y < t_2 < z \wedge \neg E_i(y,t_2) \to \neg U(t_2))], \quad 1 \le i \le n-1$$

$$L_i(y):=\exists z[E_{i+1}(y,z)\wedge\neg E_i(y,z)\wedge y>z\wedge\neg U(y)\wedge U(z)\wedge\forall t_1(E_i(y,t_1)\to\neg U(t_1))\wedge$$

$$\wedge\forall t_2(z<t_2<y\wedge\neg E_i(y,t_2)\to U(t_2))],\quad 1\le i\le n-1$$

Случай 1. $U(x)$ является иррациональным относительно E_{n-1}-классов.

В этом случае $\theta_i(M)=\varnothing$ для каждого $1\le i\le n-1$ и $P(x)$ делится на две выпуклые формулы: $P(x)\wedge U(x)$ и $P(x)\wedge\neg U(x)$.

Случай 2. $U(x)$ делит E_i-класс для некоторого $1\le i\le n-1$ и является иррациональным относительно E_{i-1}-классов.

Тогда $P(x)$ делится на $2(n-i+1)$ формул:

$$U_j^l(x):=P(x)\wedge\forall y[\theta_i(y)\to x<y\wedge\neg E_{n-j+1}(x,y)\wedge E_{n-j+2}(x,y)],\quad 2\le j\le n-i+1$$

$$U_1^l(x):=P(x)\wedge\forall y[\theta_i(y)\to E_i(x,y)\wedge U(x)]$$

$$U_1^r(x):=P(x)\wedge\forall y[\theta_i(y)\to E_i(x,y)\wedge\neg U(x)]$$

$$U_j^r(x):=P(x)\wedge\forall y[\theta_i(y)\to x>y\wedge\neg E_{n-j+1}(x,y)\wedge E_{n-j+2}(x,y)],\quad 2\le j\le n-i+1$$

Случай 3. $U(x)$ делит E_i-класс для некоторого $2\le i\le n$ и является квазирациональным вправо относительно E_{i-1}-классов.

Тогда $P(x)$ делится на $2(n-i)+3$ формул:

$$U_j^l(x):=P(x)\wedge\forall y[\theta_i(y)\to x<y\wedge\neg E_{n-j}(x,y)\wedge E_{n-j+1}(x,y)],\quad 2\le j\le n-i+1$$

$$U_1^l(x):=P(x)\wedge\forall y[R_{i-1}(y)\to x<y\wedge E_i(x,y)]$$

$$U_0^l(x):=P(x)\wedge R_{i-1}(x)$$

$$U_1^r(x):=P(x)\wedge\forall y[R_{i-1}(y)\to x>y\wedge E_i(x,y)]$$

$$U_j^r(x):=P(x)\wedge\forall y[\theta_i(y)\to x>y\wedge\neg E_{n-j}(x,y)\wedge E_{n-j+1}(x,y)],\quad 2\le j\le n-i+1$$

Случай 4. $U(x)$ делит E_i-класс для некоторого $2\le i\le n$ и является квазирациональным влево относительно E_{i-1}-классов.

Тогда $P(x)$ также делится на $2(n-i)+3$ формул: $U_j^l(x)$ и $U_j^r(x)$ для каждого $2\le j\le n-i+1$ такие же как в Случае 3.

$$U_1^l(x):=P(x)\wedge\forall y[L_{i-1}(y)\to x<y\wedge E_i(x,y)]$$

$$U_0^l(x):=P(x)\wedge L_{i-1}(x)$$

$$U_1^r(x):=P(x)\wedge\forall y[L_{i-1}(y)\to x>y\wedge E_i(x,y)]$$

Лемма 10. Пусть $p,q\in S_1(\varnothing)$ — неалгебраические, $p\not\perp^w q$. Тогда $p(M)$ разбивается на s выпуклых $\varnothing$-определимых множеств $\Leftrightarrow$ $q(M)$ разбивается на s выпуклых $\varnothing$-определимых множеств.

Доказательство Леммы 10. Поскольку $p \not\perp^w q$, то $RC(p) = RC(q)$ и существует $\varnothing$-определимая функция $f : p(M) \to q(M)$, являющаяся локально монотонной биекцией. Пусть $P(x)$ — $\varnothing$-определимая формула, изолирующая тип p. Предположим, что $P(x)$ делится на s выпуклых $\varnothing$-определимых формул $U_1(x),\ldots,U_s(x)$, выделяющих в $p(M)$ 1-неразличимые над $\varnothing$ множества. Рассмотрим следующие формулы:

$$S_i(x) := \exists y[U_i(y) \wedge f(y) = x], \quad 1 \le i \le s$$

Очевидно, что поскольку $U_i(M) \cap U_j(M) = \varnothing$ для всех $1 \le i, j \le s$ с условием $i \ne j$, то $S_i(M) \cap S_j(M) = \varnothing$. В силу неразличимости $U_i(M)$ над $\varnothing$ таким же будет и $S_i(M)$ для любого $1 \le i \le s$.

Пусть $p_i := \{U_i(x)\}, q_i := \{S_i(x)\}$ для каждого $1 \le i \le s$. Тогда нетрудно понять, что $p_i \not\perp^w q_i$, $RC(p_i) = RC(q_i)$ и $f : p_i(M') \to q_i(M')$ — $\varnothing$-определимая биекция.

Таким образом, установлена следующая:

Теорема 11. Пусть M — модель счетно категоричной вполне о-минимальной теории, M' — обогащение модели M произвольным конечным семейством выпуклых унарных предикатов. Тогда M' — модель счетно категоричной вполне о-минимальной теории того же ранга выпуклости.

В заключение отметим, что данные исследования поддержаны грантом КН МОН РК № 0830/ГФ4 по теме «Классификационные вопросы генерических и упорядоченных структур, а также их элементарных теорий» в рамках приоритета «Интеллектуальный потенциал страны».

ЛИТЕРАТУРА

[1] H.D. Macpherson, D. Marker, and C. Steinhorn, Weakly o-minimal structures and real closed fields // Transactions of The American Mathematical Society, 352 (2000), pp. 5435–5483.

[2] B.Sh. Kulpeshov, Weakly o-minimal structures and some of their properties // The Journal of Symbolic Logic, 63 (1998), pp. 1511–1528.

[3] B.S. Baizhanov, Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by a family of unary predicates // The Journal of Symbolic Logic, 66 (2001), pp. 1382–1414.

[4] Б.Ш. Кулпешов, Ранг выпуклости и ортогональность в слабо о-минимальных теориях // Известия НАН РК, серия физико-математическая, 227 (2003), С. 26–31.

[5] Б.Ш. Кулпешов, Счетно-категоричные вполне о-минимальные теории // Вестник НГУ, серия: математика, механика, информатика, 11:1 (2011), С. 45–57.

[6] B.Sh. Kulpeshov, Countably categorical quite o-minimal theories // Journal of Mathematical Sciences, 188:4 (2013), pp. 387–397.

С.С. Байжанов[1], Б.Ш. Кулпешов[2]

[1]Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы, Қазақстан;
[2]Халықаралық ақпараттық технологиялар университеті, Алматы, Қазақстан,

ӘБДЕН О-МИНИМАЛДЫҚ ТЕОРИЯЛАРДЫҢ МОДЕЛЬДЕРІН БАЙЫТУДА ИНВАРИАНТТЫҚ ҚАСИЕТТЕРІ

Аннотация. Осы жұмыста дөңестік унарлық предикатпен есептік-категориялық әбден о-минималдық теорияларының моделін байытылғанда инварианттық қасиеттер зерттеленеді. Әбден о-минималдық, есептік категориялық және дөңестік рангісі инварианттық қасиеттерге жататындығын дәлелденді.

Кілт сөздер: әлсіз о-минималдық, әбден о-минималдық, есептік категориялық, модельді байыту, дөңестік рангісі.

МАЗМҰНЫ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

Publication Ethics and Publication Malpractice in the journals of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan

For information on Ethics in publishing and Ethical guidelines for journal publication see http://www.elsevier.com/publishingethics and http://www.elsevier.com/journal-authors/ethics.

Submission of an article to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan implies that the described work has not been published previously (except in the form of an abstract or as part of a published lecture or academic thesis or as an electronic preprint, see http://www.elsevier.com/postingpolicy), that it is not under consideration for publication elsewhere, that its publication is approved by all authors and tacitly or explicitly by the responsible authorities where the work was carried out, and that, if accepted, it will not be published elsewhere in the same form, in English or in any other language, including electronically without the written consent of the copyright-holder. In particular, translations into English of papers already published in another language are not accepted.

No other forms of scientific misconduct are allowed, such as plagiarism, falsification, fraudulent data, incorrect interpretation of other works, incorrect citations, etc. The National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan follows the Code of Conduct of the Committee on Publication Ethics (COPE), and follows the COPE Flowcharts for Resolving Cases of Suspected Misconduct (http://publicationethics.org/files/u2/New_Code.pdf). To verify originality, your article may be checked by the Cross Check originality detection service http://www.elsevier.com/editors/plagdetect.

The authors are obliged to participate in peer review process and be ready to provide corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. All authors of a paper should have significantly contributed to the research.

The reviewers should provide objective judgments and should point out relevant published works which are not yet cited. Reviewed articles should be treated confidentially. The reviewers will be chosen in such a way that there is no conflict of interests with respect to the research, the authors and/or the research funders.

The editors have complete responsibility and authority to reject or accept a paper, and they will only accept a paper when reasonably certain. They will preserve anonymity of reviewers and promote publication of corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. The acceptance of a paper automatically implies the copyright transfer to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.

The Editorial Board of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan will monitor and safeguard publishing ethics.

Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайтах:

www:nauka-nanrk.kz

http://www.physics-mathematics.kz

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Редакторы *М. С. Ахметова, Д.С. Аленов, Т.А. Апендиев, А.Е. Бейсебаева*
Верстка на компьютере *А.М. Кульгинбаевой*

Подписано в печать 01.02.2017.
Формат 60x881/8. Бумага офсетная. Печать – ризограф.
11,4 п.л. Тираж 300. Заказ 1.

Национальная академия наук РК
050010, Алматы, ул. Шевченко, 28, т. 272-13-18, 272-13-19