ISSN 2518-1726 (Online),
ISSN 1991-346X (Print)

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ

Х А Б А Р Л А Р Ы

ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

N E W S

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА
СЕРИЯСЫ**

♦

**СЕРИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ**

♦

**PHYSICO-MATHEMATICAL
SERIES**

2 (312)

**НАУРЫЗ – СӘУІР 2017 Ж.
МАРТ – АПРЕЛЬ 2017 г.
MARCH – APRIL 2017**

1963 ЖЫЛДЫҢ ҚАҢТАР АЙЫНАН ШЫҒА БАСТАҒАН
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1963 ГОДА
PUBLISHED SINCE JANUARY 1963

ЖЫЛЫНА 6 РЕТ ШЫҒАДЫ
ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД
PUBLISHED 6 TIMES A YEAR

АЛМАТЫ, ҚР ҰҒА
АЛМАТЫ, НАН РК
ALMATY, NAS RK

«ҚР ҰҒА Хабарлары. Физика-математикалық сериясы».

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Меншіктенуші: «Қазақстан Республикасының Ұлттық ғылым академиясы» РҚБ (Алматы қ.)
Қазақстан республикасының Мәдениет пен ақпарат министрлігінің Ақпарат және мұрағат комитетінде 01.06.2006 ж. берілген **№5543-Ж** мерзімдік басылым тіркеуіне қойылу туралы куәлік

Мерзімділігі: жылына 6 рет.
Тиражы: 300 дана.

Редакцияның мекенжайы: 050010, Алматы қ., Шевченко көш., 28, 219 бөл., 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18, www:nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

Типографияның мекенжайы: «Аруна» ЖК, Алматы қ., Муратбаева көш., 75.

«Известия НАН РК. Серия физико-математическая».

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы)
Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации и архивов Министерства культуры и информации Республики Казахстан **№5543-Ж**, выданное 01.06.2006 г.

Периодичность: 6 раз в год.
Тираж: 300 экземпляров.

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, ком. 219, 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,
www:nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75.

News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physical-mathematical series.

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Owner: RPA "National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan" (Almaty)
The certificate of registration of a periodic printed publication in the Committee of information and archives of the Ministry of culture and information of the Republic of Kazakhstan N 5543-Ж, issued 01.06.2006

Periodicity: 6 times a year
Circulation: 300 copies

Editorial address: 28, Shevchenko str., of. 219, 220, Almaty, 050010, tel. 272-13-19, 272-13-18,
www:nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

Address of printing house: ST "Aruna", 75, Muratbayev str, Almaty

N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 2, Number 312 (2017), 116 – 125

B.D. Koshanov, E.N. Adilbekov, E. Duysen

Institute of Mathematics and Mathematical modeling, Almaty
koshanov@list.ru , ermurat__91@mail.ru , erlan_duysen@mail.ru

THE DIMENSION OF THE SPACE SOLUTIONS OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR THE POISSON AND BIHARMONIC EQUATIONS IN UNBOUNDED DOMAINS - I

Annotation. In this paper, we investigate the behavior of solutions of the Dirichlet problem for the Poisson and the biharmonic equations in an unbounded domain. In studies of such problems there is a need of introduction of additional conditions at infinity determine uniquely solutions of the studied problems. In the paper the dimension of the space of solutions for the above mentioned task with additional conditions is calculated.

Keywords: Poisson equation, biharmonic equation, bi-Laplace operator, Dirichlet problem.
MSC 35J67, 31A30, 31A10.

УДК 517.951

Б.Д. Қошанов, Е.Н. Әділбеков, Е. Дуйсен

Математика және математикалық моделдеу институты, Алматы

ШЕКТЕЛМЕГЕН ОБЛЫСТА ПУАССОН ЖӘНЕ БИГАРМОНИАЛЫ ТЕҢДЕУЛЕР ҮШІН ДИРИХЛЕ ЕСЕБІ ШЕШІМДЕР КЕҢІСТІГІНІҢ ӨЛШЕМІ - I

Аннотация. Бұл жұмыста шектелмеген облыста Пуассон және бигармониалы теңдеулер үшін Дирихле есептерінің шешімдері зерттелген. Осындай зерттеулер кезінде қарастырылып отырған есептердің шешімін бірмәнді анықтау үшін шексіздікте қосымша шартты енгізу қажеттілігі туындайды. Қосымша шарты бар аталған есептердің шешімі көрсетілген кеңістіктердің өлшемдері есептелінген.

Тірек сөздер: Пуассон теңдеуі, бигармониалы теңдеу, би-Лаплас операторы, Дирихле есебі.

Кіріспе. Дифференциалдық теңдеулер үшін тиянақты шеттік есептердің қасиеттерін зерттеу теориялық жағынан да, математика мен механиканың түрлі қолданбалы есептерінің қосымшалары (қолдану аясы) үшін де маңызды екендігі белгілі.

Жоғарғы ретті эллиптикалық теңдеулер үшін шеттік есептер теориясына математиктер ерекше назар аударуда.

Моделді полигармониалы оператор Δ^m таңдау ең алдымен, бұл оператор қолдану аясы тұрғысынан қызықты. $m=1$ болса - бұл белгілі Лаплас операторы болып табылады, электростатикалық өрісте потенциалдардың таратылуы Пуассон теңдеуімен сипатталады; $m=2$ болса - бұл би-Лаплас операторы деп аталады, мұндай операторлар жұқа пластина мен қабыршақ тербелісін сипаттайды; кез-келген m жағдайында сандық талдауда көптеген қосымшалары бар кубатуралық формулаларда қолданылады.

Лаплас операторы мен лапласиан спектрлік сипаттамаларынан алынатын инвариантты көпбейнелер Риман геометриясында кеңінен қолданылады. Кубатуралық формулаларды негіздеу кезінде полигармониалы теңдеуі маңызды рөл атқарады. Бұл жағдайда, С.Л. Соболев [1] көрсеткендей, полигармониалы теңдеудің шектелмеген шешімдерін пайдалану қажет.

Алайда, тіпті Лаплас теңдеуі үшін де шектелмеген функциялар классында шеттік есептердің дұрыс тұжырымдалуы толық зерттелмеген [2,3]. Эллиптикалық операторлар үшін қарастырылған шеттік есептер және оларға қатысты пайымдаулар кейбір Соболев-Бесов типті [1] салмақты кеңістіктерге кеңейтуге мүмкін болады.

Шектелмеген обылыста Пуассон теңдеуінің шешімдерін зерттеу қолдану тұрғысынан қызықты болып табылады. Осындай зерттеулер кезінде қарастырылып отырған есептердің (Пуассон теңдеуі үшін) шешімін бірмәнді анықтау үшін шексіздікте қосымша шартты енгізу қажеттілігі туындайды.

Мұндай қосымша шарттар, әдетте, физикада мағынасы өте зор, Зоммерфельдтің сәулелену шарттары [4,5] деп аталады.

Бигармониалы және полигармониалы теңдеулер үшін жазықтықта шеттік есептердің тиянақты тұжырымдалуы комплекс айнымалы функциялар теориясының әдістерімен [10-12] жұмыстарда көрсетілді. Бұл жұмыстарда жазықтықта аналитикалық және гармониалы функциялардың жалпыланған классикалық интегралдық өрнегінің теориясының негізінде Дирихле, Нейман, Робен және басқа да шеттік есептердің Грин функциясы құрылды.

Зерттеулер кеңістік өлшемі көпөлшемді болған жағдайда күрделі болады. Полигармониалы теңдеудің кез келген оң жағы үшін Дирихле есебі бірмәнді шешілетіндігі белгілі. [13-15] жұмыстарда көпөлшемді шарда полигармониалы теңдеу үшін Дирихле есебінің Грин функциясының жаңа өрнегі айқын түрде құрылды.

[17,18] жұмыстарында көпөлшемді бірлік шарда Пуассон теңдеуі үшін Нейман есебінің Грин функциясының өрнегі алынды.

[16] жұмыста көпөлшемді шарда полигармониалы теңдеулер үшін әртүрлі шеттік есептердің шешімділігінің шарттарын табу мәселелері зерттелген.

Шектелмеген обылыстарда эллиптикалық теңдеулер үшін шеттік есептерді зерттеу өзекті мәселе болып табылады.

Шектелмеген обылыста Лаплас теңдеуі үшін тиянақты шеттік есептің бар екендігі бұрыннан белгілі. Осыған орай [5] монографиясында Зоммерфельдтің сәулелену шарттары келтірілген. [2,3,19] жұмыстарында дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің кейбір кластары үшін шешімділік сұрақтары зерттелген.

Осы жұмыстың нәтижелері шексіздікте қойылатын қандай да бір интегралдық шарты ретінде болатын салмақты кеңістікті енгізумен тығыз байланысты. Бұл жұмыста Пуассон теңдеуі мен бигармониалы теңдеулер үшін Дирихле есебінің салмақты шешімдер кеңістігінің өлшемдері есептелінген. Сонымен қатар, бұл жұмыстың тағы бір ерекшелігі, құрылған әдістер кеңістіктің айнымалы санына және дифференциалдық теңдеудің реттіне байланысты емес.

Бұл - жұмыстың бірінші бөлімі. Осы бөлімде шектелмеген облыста көпөлшемді салмақты кеңістікте Лаплас операторы өзегінің өрнегі көрсетіледі. Лаплас теңдеуі үшін Дирихле есебіне, шексіздікте қосымша шарты бар, шешімдер кеңістігінің өлшемі есептелінеді.

1 Шектелмеген облыстағы көпөлшемді салмақты кеңістіктегі Лаплас операторының өзегі

Бұл бөлімде шектелмеген $\Omega \subset R^n$ облысындағы Лаплас операторы үшін шекаралық есептер зерттеледі.

Координат бас нүктесі бар $\overline{G}$ компакттың сыртында Лаплас теңдеуінің

$$\Delta u(x) \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0, \quad x \in \Omega \equiv R^n \setminus \overline{G} \tag{1}$$

$u(x)$ шешімі зерттеледі.

Келесі белгілеуді енгізейік:

$C_0^{\infty}(\Omega)-$ Ω-дағы компакт тұғыры бар $C^{\infty}(\Omega)$ кеңістігінен алынған функциялар кеңістігі;

$W_2^1(\Omega)$ нормасы бойынша $C^{\infty}(\overline{\Omega})$ толықтыруынан алынған функциялар кеңістігі, норма келесі түрде алынған

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega)} \equiv \left[\int_{\Omega}(|\nabla u|^2+|u|^2)dx\right]^{\frac{1}{2}}, \quad \nabla u=(\frac{\partial u}{\partial x_1},...,\frac{\partial u}{\partial x_n});$$

$\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)-$ жоғарыдағы норма бойынша $C_0^{\infty}(\Omega)$ толықтыруынан алынған функциялар кеңістігі;

$W_{2.loc}^1(\Omega)-$кез-келген $Q_R=\{x\in R^n:|x|<R\}$ шары үшін $u(x)\in W_2^1(\Omega\cap Q_R)$ шартын қанағаттандыратын $u(x)$ функциялар кеңістігі;

$\overset{\circ}{W}{}_{2,loc}^1(\Omega)-$ $u(x)\big|_{\partial\Omega}=0$ шартын қанағаттандыратын $u(x)\in W_{2.loc}^1(\Omega)$ функциялар кеңістігі;

$$D(u,\Omega)=\int_{\Omega}|\nabla u|^2dx, \quad D_{\alpha}(u,\Omega)\equiv\int_{\Omega}\rho^{\alpha}|\nabla u|^2dx, \tag{2}$$

мұндағы $n>2,\ \rho=|x|=\sqrt{x_1^2+...+x_n^2},\ \alpha\in\mathrm{R}^1.$

Келесі лемма орындалады.

Лемма 1.1. $u(x)$ функциясы $D_{\alpha}(u,\Omega)<\infty$ шартын қанағаттандыратын Ω облысындағы $\Delta u(x)=0$ теңдеуінің шешімі болсын. Онда $n\geq 3$ үшін $u(x)$ функциясы үшін келесі өрнек

$$u(x)=P(x)+C_0\Gamma(x)+\sum_{j=1}^{n}C_j\frac{\partial\Gamma(x)}{\partial x_j}+u_1(x), \tag{3}$$

орындалады, мұндағы $P(x)-$ дәрежесі d_0-ден төмен көпмүшелік

$$d_0=\max\left\{1;1-\frac{\alpha+\mathrm{n}}{2}\right\},$$

$\Gamma(x)=-\dfrac{1}{(n-2)\sigma_n}|x|^{2-n}$ *- Лаплас операторының іргелі шешімі [4],* σ_n-R^n*-дегі бірлік сфераның бетік ауданы,* $C_i, i=0,1,...,n-$ *кейбір тұрақтылар,* $u_1(x)$ *функциясы үшін келесі бағалау орындалады:*

$$\left|\partial_x^{\gamma}u_1(x)\right|\leq b_{\gamma}|x|^{-n-|\gamma|}, \tag{4}$$

$\gamma=(\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n),\quad \gamma_i,\ i=1,...,n-$ *бүтін теріс емес сандар,* $b_{\gamma}=const,\ \partial_{\mathrm{x}}=(\partial_{x_1},...,\partial_{x_n}),\ \partial_{x_j}=\dfrac{\partial}{\partial_{x_j}},\ j=1,...,n.$

Дәлелдеуі. G шектелген обылыс болғандықтан, онда оны қандай да бір $Q_R = \{x \in R^n : |x| < R\}$ шарда жатады деп есептеуімізге болады.

Айталық, $\theta(|x|) \in C^\infty(R^1) : \theta = 1$ үшін $|x| > R + 2$ және $\theta = 0$ үшін $|x| < R + 1$ болса, онда $\upsilon(x) = \theta(|x|) \cdot u(x)$ функциясы $R^n -$де $\Delta\upsilon(x) = f(x)$ теңдеуін қанағаттандырады, мұндағы $f(x) \in C_0^\infty(R^n)$.

$$w(x) = \upsilon(x) - \int_{R^n} \Gamma(x-y) \cdot f(y) \cdot dy, \tag{5}$$

деп алайық, мұндағы $\Gamma(x) -$ Лаплас операторының іргелі шешімі.

$$\Delta w(x) = 0 \quad R^n \text{ - де.} \tag{6}$$

(6) теңдеуіне Фурье түрлендіруін қолдансақ келесі теңдікті аламыз

$$|\eta|^2 \cdot \widetilde{w}(\eta) = 0 \tag{7}$$

мұндағы $\widetilde{w}(\eta) -$ функциясы $w(x)$ функциясының Фурье образы.

(7) формулада $\widetilde{w}(\eta)$ функциясының тұғыры бір нүктелік жиынан $\{0\}$құралады. Сондықтан [6], $\widetilde{w}(\eta)$ функциясы $\delta(x)$ функцияы мен оның туындыларының ақырлы сызықты комбинациясынан тұрады. Осыдан $w(x)$ көпмүшелік екендігі шығады.

(5) формуладан

$$\upsilon(x) = P(x) + \upsilon_1(x) \tag{8}$$

аламыз, мұндағы $P(x) \equiv w(x) -$ көпмүшелік, ал

$$\upsilon_1(x) = \int_{R^n} \Gamma(x-y) \cdot f(y) \cdot dy. \tag{9}$$

Айталық, $d - P(x)$ көпмүшелігінің реті болсын. $d < d_0$ болатынын көрсетейік. $d \geq d_0 \geq 1$ болсын деп ұйғарайық. Онда $x \in K \cap \{x \in R^n : \rho > N\}$ кезінде

$$|\nabla P(x)| \geq const\ \rho^{d-1} \tag{10}$$

болатын, R^n-нен төбесі координаталар бас нүктесінде жататын K конусы мен $N > 0$ саны табылады.

R^n - нен төбесі координаталар бас нүктесінде жататын K **конусы** деп, егер $x \in K,$ онда кез-келген $\mu > 0$ үшін $\mu \cdot x \in K$ болатын облысты айтады.

Басқаша жағынан

$f(x) \in C_0^\infty(R^n)$ болғандықтан, ал $|\nabla_x \Gamma(x-y)| \leq c \cdot |x-y|^{1-n}$,

онда

$$|\nabla \upsilon_1(x)| \leq const\ \rho^{1-n}.$$

Осыдан және (10)-нан $x \in K \cap \{x \in R^n : \rho > N\}$ кезінде

$$\left|\nabla \upsilon(x)\right| \le const\, \rho^{d-1} \qquad (11)$$

шығады. $\upsilon(x)$ функциясының анықтамасынан $D_\alpha(\upsilon(x),\Omega) < \infty$ болатынын көреміз. Басқаша айтқанда, (11) теңсіздігінің көмегімен

$$D_\alpha(\upsilon(x),\Omega) \ge \int\limits_{K\cap\{\rho>N\}} \rho^{2(d-1)+\alpha} dx$$

шығады.

Алынған интегралдың жинақталуы үшін

$$2\cdot(d-1)+\alpha+n<0$$

шарты орындалуы жеткілікті. Осыдан

$$d<1-\frac{(\alpha+n)}{2}\le d_0$$

шығады.

Сонымен

$$d<d_0.$$

Енді

$$\upsilon_1(x) = a_0\cdot\Gamma(x) + \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial\Gamma(x)}{\partial x_j} + \upsilon_2(x) \qquad (12)$$

теңдігі орындалатындығын көрсетейік, мұндығы $a_0,\dots,a_n$ – кейбір тұрақтылар, ал $\upsilon_2(x)$ функциясы (4) теңсіздігін қанағаттандырады.

Тейлор формуласы [6] бойынша

$$\Gamma(x-y) = \Gamma(x) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\Gamma(x)}{\partial x_j} y_j + \int\limits_0^1 (1-t)\cdot \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2\Gamma(x+t\cdot y)}{\partial x_i\cdot\partial x_j} dt\cdot y_i\cdot y_j$$

жіктеледі. Бұл теңдікті (9)-ға қойып, келесі теңдікті аламыз:

$$\upsilon_1(x) = \Gamma(x)\cdot \int\limits_{R^n} f(y)\cdot dy - \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{R^n} y_j\cdot f(y)\cdot dy \frac{\partial\Gamma(x)}{\partial x_j} +$$

$$+\int\limits_{R^n}\int\limits_0^1 (1-t)\cdot \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2\Gamma(x+t\cdot y)}{\partial x_i\cdot\partial x_j} dt\cdot y_i\cdot y_j\cdot f(y)dy.$$

Осыдан (12) формуласы келесі коэффициенттермен

$$a_0 = \int_{R^n} f(y)dy,\ a_j = -\int_{R^n} f(y)\cdot y_j dy,$$

$$\upsilon_2(x) = \int_{R^n}\int_0^1 (1-t)\cdot \sum_{i,j=0}^{n} \frac{\partial^2 \Gamma(x+t\cdot y)}{\partial x_i \partial x_j} dt \cdot y_i \cdot y_j \cdot f(y)dy$$

шығады. $\upsilon_2(x)$ функциясы үшін (4) теңсіздігінің орындалуы тікелей тексеріледі. Сондай-ақ $u(x) = \upsilon(x) = P(x) + \upsilon_1(x)$ өрнегі $|x| > R+2$ үшін ондалады, осыдан $u(x)$ функциясы үшін (3) өрнегі шығады.

2 Шектелмеген облыстағы Лаплас теңдеуі үшін Дирихле есебі

$\Omega = R^n \setminus G$ обылысында (1) теңдеуі үшін бірінші түрдегі шеттік есепті, яғни Дирихле есебін қарастырамыз

$$u(x)\big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{13}$$

Анықтама 2.1. [7] *Егер* $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}^{1}_{2,loc}(\Omega)$ *және кез-келген* $\psi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ *функциясы үшін*

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx = 0 \tag{14}$$

интегралдық теңдік орындалса, онда $u(x)$ функциясын (1), (13) есебінің жалпыланған шешімі деп атайды.

Келешекте

$$D_\alpha(u,\Omega) \equiv \int_\Omega \rho^\alpha |\nabla u|^2 dx < \infty$$

шартын қанағаттандыратын (1), (13) есебінің шешімдер кеңістігінің өлшемін есептейміз, мұндағы $\alpha \in \mathrm{R}^1$.

$\Pi_1(\alpha) = \{u(x) \ \ | \ u(x)$ -- (1), (13) есебінің $D_\alpha(u,\Omega) < \infty$ шартын қанағаттандыратын жалпыланған шешімдер$\}$ кеңістігі болсын. $m_1(\alpha)$ арқылы $\Pi_1(\alpha)$ кеңістігінің өлшемін белгілейміз, яғни $m_1(\alpha) = \dim \Pi_1(\alpha)$.

Төменде $m_1(\alpha)$ шамасын есептейтін формулалар $\alpha \in \mathrm{R}^1$ санына байланысты алынады. Лаплас операторымен қатар екінші ретті эллиптикалық операторларды қарастыруға болады. Барлық теоремалар

$$D_\alpha(u,\Omega) < \infty$$

шартымен (1), (13) есебі үшін тұжырымдалып дәлелденеді.

Келесі қосалқы есепті қарастырайық:

$$\Delta u = 0, (15)$$

$$u(x)\big|_{\partial\Omega} = \varphi(x), (16)$$

$$F(u) \equiv \int_{\Omega} \left[|x|^{-2}|u|^2 + |\nabla u|^2 \right] dx < \infty. (17)$$

Лемма 2.1. Кез-келген $\varphi \in C^1(\partial\Omega)$ функциясы үшін (15)-(17) есебінің шешімі жалғыз болады.

Дәлелдеуі. Алдымен шешімнің жалғыз екендігін көрсетеміз.
$u_1(x),\ u_2(x) -$ (15)-(17) есебінің екі әртүрлі шешімі болсын. Онда

$$u(x) = u_1(x) - u_2(x)$$

функциясы (15)-(17) есебінің

$$\varphi(x) = 0$$

шартын қанағаттандыратын шешімі болады.

Айталық,

$$\upsilon(x) = \theta_N(x) \cdot u(x),$$

мұндағы

$$\theta_N(x) = \theta\left(\frac{|x|}{N}\right),\ \theta \in C^\infty(R^n),\ 0 \le \theta \le 1,$$

$$\theta(t) = 0 \text{ үшін } t > 2 \text{ және } \theta(t) = 1 \text{ үшін } t < 1.$$

(15) теңдеуін $\upsilon(x)$ функциясына көбейтіп және жеткілікті үлкен N үшін Ω облысы бойынша интегралдасақ келесі өрнекті аламыз:

$$0 = \int_{\Omega} \Delta u \cdot \upsilon(x) dx \equiv -\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \cdot \theta_N(x) dx - \int_{\Omega} (\nabla u) \cdot (\nabla \theta_N(x)) \cdot u dx =$$

$$= -\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \cdot \theta_N(x) dx - \frac{1}{N} \int_{N<|x|<2N} (\nabla u) \cdot \nabla \theta(\frac{|x|}{N}) \cdot u(x) dx.$$

Соңғы теңдіктің оң жағындағы екінші қосылғышты Шварц теңсіздігі бойынша бағаласақ:

$$\left| \frac{1}{N} \int_{N<|x|<2N} (\nabla u) \cdot \nabla \theta(\frac{|x|}{N}) \cdot u(x) dx \right| \le C \cdot \int_{|x|>N} |\nabla u| \cdot \frac{|u|}{x} dx \le$$

$$\le C \cdot \left[\int_{|x|>N} |\nabla u|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\int_{|x|>N} \frac{|u|^2}{|x|^2} \cdot dx \right]^{\frac{1}{2}} \to 0,\ N \to \infty,$$

және $N \to \infty$ шекке көшсек

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx = 0,\ u(x) \equiv const,$$

сондай-ақ, Ω обылысында $u(x)\big|_{\partial\Omega} = 0$ ескеретін болсақ, онда $u(x) \equiv 0$ шығады.

Енді (15)-(17) есебінің шешімінің табылатындығын көрсетейік. $W_{2,F}^1$ арқылы

$$\|u(x)\|_{W_{2,F}^1} = [F(u)]^{\frac{1}{2}}$$

нормасы бойынша $C_0^\infty(\Omega)$ кеңістігінің тұйықталуын белгілейміз.

$$M = \left\{\upsilon(x) \in W_{2,F}^1,\ \upsilon(x)\big|_{\partial\Omega} = \varphi(x)\right\}$$

деп жиынын анықтаймыз және

$$I(\upsilon) = \int_\Omega |\nabla \upsilon(x)|^2 dx$$

функционалын қарастырамыз.

Кез-келген $\upsilon(x) \in M$ үшін $I(\upsilon) \ge 0$ болғандықтан онда, I-дің мәндер жиыны M жиынында төменнен шенелген. Төменнен шенелген барлық жиындардың дәл төменгі шекарасы бар болады, оны $\inf\limits_{\upsilon\in M} I(\upsilon) = \mu,\ \mu \ge 0$ [6] деп белгілейік. Дәл төменгі шекараның анықтамасы бойынша M жиынынан $\{u_k\}$ жинақталатын тізбегін бөліп алауға болады, $k \to \infty$ ұмтылғанда $I(u_k) \to \mu$ болатындай. $\{u_k\}$ тізбегі **минималдаушы тізбек** деп аталады [8].

Алдымен $I(u_0) = \mu$ теңдігін қанағаттандыратын $u_0 \in M$ функциясының табылатындығын дәлелдейміз.

$\varepsilon > 0$ саны берілсін. Онда $k > N$ үшін $I(u_k) < \mu + \varepsilon$ орындалатын $N >> 1$ саны табылады.

$k, m > N$ болсын. Сондай-ақ $u_k, u_m \in M$ болса, онда $\frac{u_k + u_m}{2} \in M$, осыдан

$$I\left(\frac{u_k + u_m}{2}\right) \ge \mu.$$

Параллелограмм теңдігінен

$$I\left(\frac{u_k + u_m}{2}\right) + I\left(\frac{u_k - u_m}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot I(u_k) + \frac{1}{2} \cdot I(u_m)$$

келесі теңсіздік

$$\mu + I\left(\frac{u_k + u_m}{2}\right) \le \left(\frac{\mu + \varepsilon}{2}\right) + \left(\frac{\mu + \varepsilon}{2}\right) = \mu + \varepsilon,$$

яғни $I(u_k - u_m) \le 4\varepsilon$ үшін

$$I\left(\frac{u_k - u_m}{2}\right) \le \varepsilon$$

шығады.

Осылайша $k,m \to \infty$ ұмтылғанда $I(u_k - u_m) \to 0$ болады. Сонымен қатар, $(u_k - u_m)\big|_{\partial\Omega} = 0$ ескерсек, онда **Харди леммасы** [9] бойынша

$$\int_\Omega |u_k - u_m|^2 \cdot |x|^{-2} dx \le C \cdot \int_\Omega |\nabla(u_k - u_m)|^2 dx$$

аламыз. Сол себепті, $\{u_k\}$ тізбегі $W^1_{2,F}$ кеңістігінде фундаменталды (іргелі).

Шектік функцияны $u_0(x)$ деп белгілейік. $I(\upsilon)$ функционалы $W^1_{2,F}$ кеңістігінде үзіліссіз болғандықтан

$$I(u_0) = \lim_{k\to\infty} I(u_k) = \mu$$

орындалады.

Сонымен қатар, $W^1_{2,F}$ кеңістігі $W^1_{2,loc}(\Omega)$ кеңістігіне үзіліссіз енген. Осыдан және $u_k\big|_{\partial\Omega} = \varphi$ шартынан $u_0\big|_{\partial\Omega} = \varphi$ шығады. Осылайша $u_0(x) \in M$ және $I(u_0) = \mu$.

$u_0(x) \in M$ функциясы (15) шартын қанағаттандыратынын көрсетейік. $\upsilon \in C_0^\infty(\Omega)$ болсын. Онда R^1-де анықталған $f(t) = I(u_0 + \upsilon \cdot t)$ функциясының $t = 0$ нүктесінде локалды минимум бар болады.

$$f(t) = I(u_0) + 2 \cdot \mathrm{t} \cdot \int_\Omega \nabla u_0 \cdot \nabla \upsilon dx + t^2 \cdot I(\upsilon)$$

функциясы t айнымалысы бойынша дифференциалданады, олай болса $f'(0) = 0$. Сондықтан, кез-келген $\upsilon \in C_0^\infty(\Omega)$ функциялары үшін $\int_\Omega \nabla u_0 \cdot \nabla \upsilon dx = 0$. Бұл теңдік $u_0(x)$ функциясының (15) теңдеуінің жалпыланған шешімі болатындығын білдіреді. Лемма 2.1 толығымен дәлелденді.

Бұл жұмыстың жалғасын екінші бөлімнен қараңыз.

Бұл жұмыс Қазақстан Республикасы Білім және Ғылым министрлігінің 3492/ГФ4 грантының қолдауымен орындалды.

ӘДЕБИЕТ

[1] Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. - М.: Наука. -1974. - 808 с.

[2] Кондратьев В.А., Олейник О.А. О периодических решениях параболического уравнения второго порядка во внешних областях // Вестник МГУ, сер. 1, мат., мех. - 1985. - №4. - С. 38-47.

[3] Кудрявцев Л.Д. Решение первой краевой задачи для самосопряженных и эллиптических уравнений в случае неограниченных областей // Изв. АН СССР, Сер. матем. - 1967. - Т. 31, №5. - С. 354-366.

[4] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981. – 512 с.

[5] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. - М.: Наука, -1966. – 724 с.

[6] Зорич В.А. Математический анализ. - М.: Наука, 1984. - Т.2.

[7] Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. - М.: Наука, 1983.

[8] Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. - М.: Высшая школа, 1977.

[9] Харди Г.Г., Литтлвуд Д.Е., Полиа Г. Неравенства. - М.: ИЛ, 1948.

[10]Begehr H., Vu T.N.H., Zhang Z.-X. Polyharmonic Dirichlet Problems

[11]// Proceedings of the Steklov Institute of Math. - 2006. - V. 255. - P. 13-34.

[12] Begehr H. Six Biharmonic Dirichlet Problems in Complex Analyisis

[13]// Preprint. – FU Berlin. - 2006. - P. 243 –251.

[14]Begehr H., Vaitekhovich T. Harmonic boundary value problems in half disc and half ring // Funct. Approx. Comment. Math. – 2009. - V. 40, № 2. – P. 251--282.

[15]Kalmenov T.Sh., Koshanov B.D., Nemchenko M.Y. Green function representation for the Dirichlet problem of the polyharmonic equation in a sphere // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2008. - V. 53, № 2. - P. 177-183.

[16]Кальменов Т.Ш., Кошанов Б.Д. Представление функции Грина задачи Дирихле для полигармонических уравнений в шаре // Сибирский Математический журнал. 2008, Т.49, №3, 423-428 с.

[17]Кальменов Т.Ш., Кошанов Б.Д., Немченко М.Ю. Представление функции Грина задачи Дирихле для полигармонических уравнений в шаре // Доклады Российской Академии Наук. - 2008. - Т. 421, № 3. - С. 305-307.

[18]Кангужин Б.Е., Кошанов Б.Д. Необходимые и достаточные условия разрешимости краевых задач для полигармонического уравнения // Уфимский математический журнал. – 2010. – № 2. – С. 41-52.

[19]Sadybekov M.A., Torebek B.T., Turmetov B.Kh. On an explicit form of the Green function of the third boundary value problem for the Poisson equation in a circle // AIP Conference Proceedings. - 2014. – V. 1611. – P. 255-260.

[20]Sadybekov M.A., Torebek B.T., Turmetov B.Kh. Representation of Green's function of the Neumann problem for a multi-dimensional ball // Complex Variables and Elliptic Equations. - 2016. - V.61, № 1. – P. 104-123.

[21]Кангужин Б.Е., Кошанов Б.Д., Рамазанов М.А. О корректных краевых задачах для уравнения Лапласа во внешних областях // Деп. в КазгосИНТИ 04.05.98. - №8294 - Ка98.

REFERENCES

[1] Sobolev S.L. Introduction to the theory of cubature formulas. Nauka, Moscow. - 1974. - 808 p. (in Russian).

[2] Kondrat'ev V.A., Oleinik O.A. Periodic solutions of second order parabolic equation in the outer regions // Vestnik MGU, ser.1, mat., mech. - 1985. - №4. - P. 38-47.

[3] Kudryavtsev L.D. Solution of the first boundary value problem for self-

[4] adjoint and elliptic equations in the case of unbounded domains // Izvestie AN USSR, Ser. Mat. - 1967. - T. 31, №5. - P. 354-366.

[5] Vladimirov V.S. Equations of mathematical physics. Nauka, Moscow. - 1981. – 512 p. (in Russian).

[6] Tikhonov A.N., Samarskii A.A. Equations of mathematical physics. Nauka, Moscow. -1966. – 724 p. (in Russian).

[7] Zorich V.A. Mathematical analysis. Vol. 2. Nauka, Moscow. – 1984. (in Russian).

[8] Mikhailov V.P. Differential equations in partial derivatives. High School, Moscow. -1983. (in Russian).

[9] Mikhlin S.G. Linear partial differential equations. High School, Moscow. – 1977. (in Russian).

[10]Hardy G.G., Littlewood D.E., Polya G. Inequality. IL, Moscow. - 1948. (in Russian).

[11]Begehr H., Vu T.N.H., Zhang Z.-X. Polyharmonic Dirichlet Problems // Proceedings of the Steklov Institute of Math. - 2006. - V. 255. - P. 13-34.

[12] Begehr H. Six Biharmonic Dirichlet Problems in Complex Analyisis // Preprint. – FU Berlin. - 2006. - P. 243 –251.

[13]Begehr H., Vaitekhovich T. Harmonic boundary value problems in half disc and half ring // Funct. Approx. Comment. Math. – 2009. - V. 40, № 2. – P. 251--282.

[14]Kalmenov T.Sh., Koshanov B.D., Nemchenko M.Y. Green function representation for the Dirichlet problem of the polyharmonic equation in a sphere // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2008. - V. 53, № 2. - P. 177-183.

[15]Kal'menov T.Sh., Koshanov B.D. Representation for the Green's function of the Dirichlet problem for polyharmonic equations in a ball, Siberian Mathematical Journal. – 2008. - V. 49, № 3. – P. 423–428.

[16]Kal'menov T.Sh., Koshanov B.D., Nemchenko M.Yu. Green function representation in the Dirichlet problem for polyharmonic equations in a ball // Doklady Mathematics. - 2008. – V. 78, № 1. - P. 528–530.

[17]Kanguzhin B.E., Koshanov B.D. Necessary and sufficient conditions for the solvability of boundary value problems for polyharmonic equation // Ufa Mathematical Journal. – 2010. – № 2. – P. 41-52.

[18]Sadybekov M.A., Torebek B.T., Turmetov B.Kh. On an explicit form of the Green function of the third boundary value problem for the Poisson equation in a circle // AIP Conference Proceedings. - 2014. – V. 1611. – P. 255-260.

[19]Sadybekov M.A., Torebek B.T., Turmetov B.Kh. Representation of Green's function of the Neumann problem for a multi-dimensional ball // Complex Variables and Elliptic Equations. - 2016. - V.61, № 1. – P. 104-123.

[20]Kanguzhin B.E., Koshanov B.D., Ramazanov M.A. Correct boundary value problems for the Laplace equation in the outer regions // Dep. in KazGosINTI 04.05.98. - №8294 - Ка98.

Б.Д. Кошанов, Е.Н. Адильбеков, Е. Дуйсен

Институт математики и математического моделирования, Алматы

РАЗМЕРНОСТЬ ПРОСТРАНСТВА РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ПУАССОНА И БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ- I

Аннотация. В данной работе изучены поведения решений задач Дирихле для уравнения Пуассона и бигармонического уравнения в неограниченной области. При исследований таких задач появляется необходимость введения дополнительных условий на бесконечности, однозначно определяющих решений исследуемых задач. В работе вычислены размерности пространств решений выше указанной задачи с дополнительным условием.

Ключевые слова: уравнения Пуассона, бигармоническое уравнение, оператор би-Лапласа, задача Дирихле.

МАЗМҰНЫ

Ғалымды еске алу

СОДЕРЖАНИЕ

Памяти ученого

CONTENTS

Publication Ethics and Publication Malpractice
in the journals of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan

For information on Ethics in publishing and Ethical guidelines for journal publication see http://www.elsevier.com/publishingethics and http://www.elsevier.com/journal-authors/ethics.

Submission of an article to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan implies that the described work has not been published previously (except in the form of an abstract or as part of a published lecture or academic thesis or as an electronic preprint, see http://www.elsevier.com/postingpolicy), that it is not under consideration for publication elsewhere, that its publication is approved by all authors and tacitly or explicitly by the responsible authorities where the work was carried out, and that, if accepted, it will not be published elsewhere in the same form, in English or in any other language, including electronically without the written consent of the copyright-holder. In particular, translations into English of papers already published in another language are not accepted.

No other forms of scientific misconduct are allowed, such as plagiarism, falsification, fraudulent data, incorrect interpretation of other works, incorrect citations, etc. The National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan follows the Code of Conduct of the Committee on Publication Ethics (COPE), and follows the COPE Flowcharts for Resolving Cases of Suspected Misconduct (http://publicationethics.org/files/u2/New_Code.pdf). To verify originality, your article may be checked by the Cross Check originality detection service http://www.elsevier.com/editors/plagdetect.

The authors are obliged to participate in peer review process and be ready to provide corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. All authors of a paper should have significantly contributed to the research.

The reviewers should provide objective judgments and should point out relevant published works which are not yet cited. Reviewed articles should be treated confidentially. The reviewers will be chosen in such a way that there is no conflict of interests with respect to the research, the authors and/or the research funders.

The editors have complete responsibility and authority to reject or accept a paper, and they will only accept a paper when reasonably certain. They will preserve anonymity of reviewers and promote publication of corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. The acceptance of a paper automatically implies the copyright transfer to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.

The Editorial Board of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan will monitor and safeguard publishing ethics.

Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайтах:

www:nauka-nanrk.kz

http://www.physics-mathematics.kz

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Редакторы *М. С. Ахметова, Д.С. Аленов, Т.А. Апендиев*
Верстка на компьютере *А.М. Кульгинбаевой*

Подписано в печать 10.04.2017.
Формат 60x881/8. Бумага офсетная. Печать – ризограф.
11,4 п.л. Тираж 300. Заказ 2.

Национальная академия наук РК
050010, Алматы, ул. Шевченко, 28, т. 272-13-18, 272-13-19