

ISSN 2518-1726 (Online),
ISSN 1991-346X (Print)

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ

Х А Б А Р Л А Р Ы

ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА
СЕРИЯСЫ**



СЕРИЯ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ



**PHYSICO-MATHEMATICAL
SERIES**

2 (312)

НАУРЫЗ – СӘУІР 2017 Ж.

МАРТ – АПРЕЛЬ 2017 г.

MARCH – APRIL 2017

1963 ЖЫЛДЫҢ ҚАҢТАР АЙЫНАН ШЫҒА БАСТАҒАН
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1963 ГОДА
PUBLISHED SINCE JANUARY 1963

ЖЫЛЫНА 6 РЕТ ШЫҒАДЫ
ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД
PUBLISHED 6 TIMES A YEAR

АЛМАТЫ, ҚР ҰҒА
АЛМАТЫ, НАН РК
ALMATY, NAS RK

Б а с р е д а к т о р ы
ф.-м.ғ.д., проф., ҚР ҰҒА академигі **Ғ.М. Мұтанов**

Р е д а к ц и я а л қ а с ы:

Жұмаділдаев А.С. проф., академик (Қазақстан)
Кальменов Т.Ш. проф., академик (Қазақстан)
Жантаев Ж.Ш. проф., корр.-мүшесі (Қазақстан)
Өмірбаев У.У. проф. корр.-мүшесі (Қазақстан)
Жүсіпов М.А. проф. (Қазақстан)
Жұмабаев Д.С. проф. (Қазақстан)
Асанова А.Т. проф. (Қазақстан)
Бошқаев К.А. PhD докторы (Қазақстан)
Сұраған Д. PhD докторы (Қазақстан)
Quevedo Hernando проф. (Мексика),
Джунушалиев В.Д. проф. (Қырғыстан)
Вишневский И.Н. проф., академик (Украина)
Ковалев А.М. проф., академик (Украина)
Михалевич А.А. проф., академик (Белорус)
Пашаев А. проф., академик (Әзірбайжан)
Такибаев Н.Ж. проф., академик (Қазақстан), бас ред. орынбасары
Тигиняну И. проф., академик (Молдова)

«ҚР ҰҒА Хабарлары. Физика-математикалық сериясы».

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Меншіктенуші: «Қазақстан Республикасының Ұлттық ғылым академиясы» РҚБ (Алматы қ.)
Қазақстан республикасының Мәдениет пен ақпарат министрлігінің Ақпарат және мұрағат комитетінде
01.06.2006 ж. берілген №5543-Ж мерзімдік басылым тіркеуіне қойылу туралы куәлік

Мерзімділігі: жылына 6 рет.
Тиражы: 300 дана.

Редакцияның мекенжайы: 050010, Алматы қ., Шевченко көш., 28, 219 бөл., 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,
www.nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

© Қазақстан Республикасының Ұлттық ғылым академиясы, 2017

Типографияның мекенжайы: «Аруна» ЖК, Алматы қ., Муратбаева көш., 75.

Главный редактор
д.ф.-м.н., проф. академик НАН РК **Г.М. Мутанов**

Редакционная коллегия:

Джумадилаев А.С. проф., академик (Казахстан)
Кальменов Т.Ш. проф., академик (Казахстан)
Жантаев Ж.Ш. проф., чл.-корр. (Казахстан)
Умирбаев У.У. проф. чл.-корр. (Казахстан)
Жусупов М.А. проф. (Казахстан)
Джумабаев Д.С. проф. (Казахстан)
Асанова А.Т. проф. (Казахстан)
Бошкаев К.А. доктор PhD (Казахстан)
Сураган Д. доктор PhD (Казахстан)
Quevedo Hernando проф. (Мексика),
Джунушалиев В.Д. проф. (Кыргызстан)
Вишневский И.Н. проф., академик (Украина)
Ковалев А.М. проф., академик (Украина)
Михалевич А.А. проф., академик (Беларусь)
Пашаев А. проф., академик (Азербайджан)
Такибаев Н.Ж. проф., академик (Казахстан), зам. гл. ред.
Тигиняну И. проф., академик (Молдова)

«Известия НАН РК. Серия физико-математическая».

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы)

Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации и архивов
Министерства культуры и информации Республики Казахстан №5543-Ж, выданное 01.06.2006 г.

Периодичность: 6 раз в год.

Тираж: 300 экземпляров.

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, ком. 219, 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,
www.nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

© Национальная академия наук Республики Казахстан, 2017

Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75.

E d i t o r i n c h i e f
doctor of physics and mathematics, professor, academician of NAS RK **G.M. Mutanov**

E d i t o r i a l b o a r d:

Dzhumadildayev A.S. prof., academician (Kazakhstan)
Kalmenov T.Sh. prof., academician (Kazakhstan)
Zhantayev Zh.Sh. prof., corr. member. (Kazakhstan)
Umirbayev U.U. prof. corr. member. (Kazakhstan)
Zhusupov M.A. prof. (Kazakhstan)
Dzhumabayev D.S. prof. (Kazakhstan)
Asanova A.T. prof. (Kazakhstan)
Boshkayev K.A. PhD (Kazakhstan)
Suragan D. PhD (Kazakhstan)
Quevedo Hernando prof. (Mexico),
Dzhunushaliyev V.D. prof. (Kyrgyzstan)
Vishnevskiy I.N. prof., academician (Ukraine)
Kovalev A.M. prof., academician (Ukraine)
Mikhalevich A.A. prof., academician (Belarus)
Pashayev A. prof., academician (Azerbaijan)
Takibayev N.Zh. prof., academician (Kazakhstan), deputy editor in chief.
Tiginyanu I. prof., academician (Moldova)

News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physical-mathematical series.

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Owner: RPA "National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan" (Almaty)

The certificate of registration of a periodic printed publication in the Committee of information and archives of the Ministry of culture and information of the Republic of Kazakhstan N 5543-Ж, issued 01.06.2006

Periodicity: 6 times a year

Circulation: 300 copies

Editorial address: 28, Shevchenko str., of. 219, 220, Almaty, 050010, tel. 272-13-19, 272-13-18,
www.nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

© National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, 2017

Address of printing house: ST "Aruna", 75, Muratbayev str, Almaty

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 312 (2017), 126 – 131

B.D. Koshanov, E.N. Adilbekov, E. Duysen

Institute of Mathematics and Mathematical modeling, Almaty
koshanov@list.ru, ermurat_91@mail.ru, erlan_duysen@mail.ru

**THE DIMENSION OF THE SPACE SOLUTIONS
OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR THE POISSON
AND BIHARMONIC EQUATIONS IN UNBOUNDED DOMAINS - II**

Annotation. In this paper, we investigate the behavior of solutions of the Dirichlet problem for the Poisson and the biharmonic equations in an unbounded domain. In studies of such problems there is a need of introduction of additional conditions at infinity determine uniquely solutions of the studied problems. In the paper the dimension of the space of solutions for the above mentioned task with additional conditions is calculated.

Keywords: Poisson equation, biharmonic equation, bi-Laplace operator, Dirichlet problem.

MSC 35J67, 31A30, 31A10.

УДК 517.951

Б.Д. Қошанов, Е.Н. Әділбеков, Е. Дүйсен

Математика және математикалық моделдеу институты, Алматы

**ШЕКТЕЛМЕГЕН ОБЛЫСТА ПУАССОН
ЖӘНЕ БИГАРМОНИАЛЫ ТЕҢДЕУЛЕР ҮШІН ДИРИХЛЕ ЕСЕБІ
ШЕШІМДЕР КЕҢІСТІГІНІҢ ӨЛШЕМІ - II**

Аннотация. Бұл жұмыста шектелмеген облыста Пуассон және бигармониалы теңдеулер үшін Дирихле есептерінің шешімдері зерттелген. Осындай зерттеулер кезінде қарастырылып отырған есептердің шешімін бірмәнді анықтау үшін шексіздікте қосымша шартты енгізу қажеттілігі туындайды. Қосымша шарты бар аталған есептердің шешімі көрсетілген кеңістіктердің өлшемдері есептелінген.

Тірек сөздер: Пуассон теңдеуі, бигармониалы теңдеу, би-Лаплас операторы, Дирихле есебі.

Бұл жұмыстың екінші бөлімі - жалғасы. Осы бөлімде бигармониалы теңдеулер үшін Дирихле есебіне шексіздікте қосымша шарты бар шешімдер кеңістігінің өлшемі есептелінеді.

Бірінші бөлімде көрсетілген кеңістіктердің белгілеулері, есептердің және формулалардың номерлері өзгертілмей сол күйінде ары қарай жалғастырып кете береміз.

Енді $D_\alpha(u, \Omega) < \infty$ шарты бар (15), (13) есебінің шешімдер кеңістігінің өлшемін есептеуге көшейік.

Теорема 2.1. $n > 2$ болсын.

1) Егер $n - 2 \leq \alpha < \infty$, онда $m_1(\alpha) = 0$;

2) Егер $-n \leq \alpha < n - 2$, онда $m_1(\alpha) = 1$;

3) Егер әрбір натурал r үшін $-2r - n \leq \alpha < -2r - n + 2$ болса, онда

$$m_1(\alpha) = \sum_{k=1}^r (2k + n - 2) \cdot \frac{(k + n - 3)!}{(n - 2)!k!}.$$

Дәлелдеуі. Теореманың 2) жағдайын ғана дәлелдейміз. Алдымен $m_1(0) = 1$ болатындығын көрсетейік. Айталық u_0 (15)-(17) есебінің $\varphi \equiv 1$ шартымен шешімі болсын. Осындай шешім лемма 1.1 бойынша бар және ол жалғыз.

$u(x) = u_0(x) - 1$ функциясын қарастырамыз. $u(x)$ функциясы (15) теңдеуді және (13) шекаралық шартты қанағаттандыратыны айқын. Сонымен қатар (17) көмегімен $D_\alpha(u, \Omega) < \infty$ болады. Сондықтан, $u(x) \in \Pi_1(0)$. Осылайша $m_1(0) \geq 1$.

$\Pi_1(0)$ кеңістігінің кез-келген $v(x)$ функциясы $v(x) = s \cdot u(x)$ түрінде болатындығын дәлелдейік, мұндағы $s \in R$ – кейбір тұрақты. Лемма 1.1 бойынша $u(x)$ функциясы үшін келесі өрнек орынды:

$$u(x) = P(x) + C_0 \Gamma(x) + \sum_{j=1}^n C_j \frac{\partial \Gamma(x)}{\partial x_j} + u_1(x), \quad (18)$$

мұндағы $P(x)$ - көпмүшелік, $\deg P(x) \leq 1$ және $u_1(x)$ функциясы (14) теңсіздігін қанағаттандырады. $P(x) \equiv a_0 \neq 0$ болатындығын көрсетейік. Кері жорық. Айталық $a_0 = 0$ болсын. Онда

$$|u(x)| \leq |c_0 \Gamma(x)| + \sum_{j=1}^n \left| c_j \cdot \frac{\partial \Gamma(x)}{\partial x_j} \right| + |u_1(x)| \leq \text{const} \cdot |x|^{2-n}, \quad (19)$$

$$|\nabla u(x)| \leq |c_0 \nabla \Gamma(x)| + \sum_{j=1}^n \left| c_j \cdot \nabla \frac{\partial \Gamma(x)}{\partial x_j} \right| + |\nabla u_1(x)| \leq \text{const} \cdot |x|^{1-n}.$$

(15) теңдеуді $\Phi(x) = \theta_N(x) \cdot u(x)$ функциясына көбейтіп, оны Ω бойынша интегралдасак

$$0 = \int_{\Omega} \Delta u(x) \cdot \Phi(x) dx \equiv \int_{\Omega} \Delta u(x) \cdot \theta_N(x) \cdot u(x) d(x) \equiv \\ \equiv - \int_{\Omega} \theta_N(x) \cdot |\nabla u(x)|^2 dx - \frac{1}{N} \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \theta_N(x) \cdot u(x) dx. \quad (20)$$

аламыз, мұндағы $\theta_N(x) = \theta\left(\frac{|x|}{N}\right)$, $\theta \in C^\infty(R^1)$, $0 \leq \theta \leq 1$; $s < 1$ болса $\theta(s) = 1$ және

$s > 2$ болса $\theta(s) = 0$.

Алынған (20) теңдіктің оң жағында екінші қосылғышты бағалаймыз. (19) теңсіздіктің көмегімен $N \rightarrow \infty$

$$\left| \frac{1}{N} \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \theta_N(x) \cdot u(x) dx \right| \leq C \cdot \frac{1}{N} \int_{\Omega \cap \{|x| > N\}} |\nabla u(x)| \cdot |u(x)| \cdot |x| dx \leq C \cdot \int_{|x| > N} |x|^{2-2n} dx \rightarrow 0$$

болады. Осыдан және (20) теңдігінен $\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx = 0$ шығады, яғни $u(x) = const$. (13)

шекаралық шарттың көмегімен $u(x) \equiv 0$. Алынған қарам- қайшылық (20) өрнегіндегі тұрақты $a_0 \neq 0$ болатындығын көрсетеді.

$v(x)$ функциясы $\Pi_1(0)$ кеңістігінен алынған кез-келген функция болсын. Онда лемма 1.1 көмегімен

$$v(x) = a'_0 + c'_0 \Gamma(x) + \sum_{j=1}^n c'_j \frac{\partial \Gamma(x)}{\partial x_j} + v_1(x) \quad (21)$$

болады, мұндағы $v_1(x)$ функциясы (17) бағалауды қанағаттандырады.

$$s = \frac{a'_0}{a_0} \text{ деп алып және } w(x) = v(x) - s \cdot u(x) \text{ функциясын қарастырамыз. } \Omega \text{-да } \Delta w = 0$$

және $w(x)|_{\partial\Omega} = 0$ болатындығы айқын. Сонымен қатар (18), (21) және s санының таңдауының көмегімен $w(x)$ функциясы (20) теңсіздігін қанағаттандырады. Осыдан, жоғарыда көрсетілгендей, $w(x) = 0$ болатындығы шығады. Осылайша, $m_1(0) = 1$.

Енді $-n \leq \alpha < n - 2$ үшін $m_1(\alpha) = m_1(0)$ болатындығын көрсетейік. Айталық, кейбір $\alpha \in [-n; 0)$ үшін $u(x) \in \Pi_1(0)$ болсын. Онда лемма 1.1-ден

$$u(x) = a_0 + c_0 \Gamma(x) + \sum_{j=1}^n C_j \frac{\partial \Gamma(x)}{\partial x_j} + u_1(x) \quad (22)$$

шығады. Сондықтан

$$|\nabla u(x)| \leq |\nabla c_0 \Gamma(x)| + \sum_{j=1}^n \left| c_j \cdot \nabla \frac{\partial \Gamma(x)}{\partial x_j} \right| + |\nabla u_1(x)| \leq const \cdot |x|^{1-n} \quad (23)$$

Осыдан

$$D_0(u, \Omega) \equiv \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \leq const \cdot \int_{\Omega} |x|^{2-2n+\alpha} dx < \infty,$$

Шығады, яғни $u(x) \in \Pi_1(0)$.

Осылайша $-n \leq \alpha < 0$ үшін $\Pi_1(0) \subset \Pi_1(\alpha)$ болады. Басқаша айтқанда $\alpha < 0$ үшін $\Pi_1(\alpha) \subset \Pi_1(0)$. Сондықтан $-n \leq \alpha < 0$ үшін $m_1(\alpha) = m_1(0)$.

$0 \leq \alpha < n - 2$ болған жағдайды қарастырайық. Көрсетілген α параметірінің мәндері үшін $\Pi_1(0) \subset \Pi_1(\alpha)$ болатындығын көрсетсек жеткілікті.

Айталық, $u(x) \in \Pi_1(0)$ болсын. Онда $u(x)$ функциясын (22) түрде жазуға болады және ол үшін (23) бағалауы орынды. Яғни $\alpha < n - 2$ үшін

$$D_{\alpha}(u, \Omega) = \int_{\Omega} \rho^{\alpha} |\nabla u|^2 dx \leq const \cdot \int_{\Omega} |x|^{2-2n+\alpha} dx < \infty,$$

яғни $u(x) \in \Pi_1(\alpha)$. Осылайша, $0 \leq \alpha < n - 2$ болған кезде, $\Pi_1(0) \subset \Pi_1(\alpha)$ және $m_1(\alpha) = m_1(0) = 1$. Теорема дәлелденді.

3 Шектелмеген облыстағы бигармониялы теңдеу үшін Дирихле есебі

Координат бас нүктесі бар \overline{G} компакттың сыртында, яғни шексіз облыста бигармониялы теңдеу үшін келесі Дирихле есебінің $u(x)$ шешімін зерттейміз:

$$\Delta^2 u(x) \equiv \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^4 u}{\partial x_i^2 \partial x_j^2} = 0, \quad x \in \Omega \equiv R^n \setminus \overline{G}, \quad (24)$$

$$u(x)|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0. \quad (25)$$

Бірінші бөлімге сай функциялар кеңістіктерінің белгілеулерін сол күйінде қалдырамыз.

Анықтама 3.1. Егер $u(x) \in W_{2,loc}^3(\Omega)$ және кез-келген $\psi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ функциясы үшін

$$\int_{\Omega} \Delta u \cdot \Delta \psi dx = 0, \quad (26)$$

интегралдық теңдігі орындалса, онда $u(x)$ функциясын (24),(25) есебінің жалпыланған шешімі деп атайды.

Біз осы бөлімде

$$D_\alpha(u, \Omega) \equiv \int_{\Omega} \rho^\alpha \left[|\nabla(\Delta u)|^2 + |u|^2 \right] dx < \infty$$

шартын қанағаттандыратын (24), (25) есебінің шешімдер кеңістігінің өлшемін есептейміз.

Лемма 3.1. $u(x)$ функциясы $D_\alpha(u, \Omega) < \infty$ шартын қанағаттандыратын Ω облысындағы $\Delta^2 u(x) = 0$ теңдеуінің шешімі болсын. Онда $n > 4$ үшін $u(x)$ функциясы келесі өрнекке

$$u(x) = P(x) + C_0 \Gamma(x) + \sum_{j=1}^n C_j \frac{\partial \Gamma(x)}{\partial x_j} + u_1(x), \quad (27)$$

ие болады, мұндағы $P(x)$ – дәрежесі d_0 -ден төмен көпмүшелік

$$d_0 = \max \left\{ 1; 2 - \frac{\alpha + n}{2} \right\},$$

$\Gamma(x) = -\frac{1}{(4-n)4 \cdot (2-n)} \cdot \frac{1}{\sigma_n} |x|^{4-n}$ - би-Лаплас операторының іргелі шешімі [4],

$\sigma_n = (2\pi)^n - R^n$ кеңістігіндегі бірлік сфераның бетік ауданы, $C_i, i = 0, 1, \dots, n$ - кейбір тұрақтылар, $u(x)$ функциясы үшін келесі бағалау орындалады:

$$\left| \partial_x^\gamma \Delta u_1(x) \right| \leq b_\gamma |x|^{-n-|\gamma|}, \quad (28)$$

$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$, $\gamma_i, i = 1, \dots, n$ - бүтін теріс емес сандар,

$b_\gamma = const$, $\partial_x = (\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n})$, $\partial_{x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}$, $j = 1, \dots, n$.

$\Pi_2(\alpha) = \{u(x) \mid u(x) \text{ -- (24), (25) есебінің } D_\alpha(u, \Omega) < \infty \text{ шартын қанағаттандыратын жалпыланған шешімдер}\}$ кеңістігі болсын. $m_2(\alpha)$ арқылы $\Pi_2(\alpha)$ кеңістігінің өлшемін белгілейміз, яғни $m_2(\alpha) = \dim \Pi_2(\alpha)$.

Төмендегі қосалқы есеп үшін

$$\Delta^2 u = 0, \quad x \in \Omega, \quad (29)$$

$$u(x)|_{\alpha\Omega} = \varphi_0(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad (30)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\alpha\Omega} = \varphi_1(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad (31)$$

$$F(u) \equiv \int_{\Omega} [|x|^{-2}|u|^2 + |\nabla(\Delta u)|^2] dx < \infty \quad (32)$$

келесі лемма орынды.

Лемма 3.1. *Кез-келген $\varphi_0 \in C^3(\partial\Omega), \varphi_1 \in C^2(\partial\Omega)$ функциялары үшін (29)- (32) есебінің шешімі жалғыз.*

Шексіз облыста бигармониялы тендеу үшін Дирихле есебінің шешімдер кеңістігінің өлшемі жайында келесі негізгі теорема орынды.

Теорема 3.1. *$n > 4$ болсын.*

1) *егер $n - 4 \leq \alpha < \infty$ болса, онда $m_2(\alpha) = 0$;*

2) *егер $-n \leq \alpha < n - 4$ болса, онда $m_2(\alpha) = 1$;*

3) *егер әрбір натурал r үшін $-2r - n \leq \alpha < -2r - n + 4$ болса, онда*

$$m_2(\alpha) = \sum_{k=1}^r (2k + n - 4) \cdot \frac{(k + n - 5)!}{(n - 4)!k!}.$$

Ескерту. Көпөлшемді шектелмеген облыста бигармониялы тендеулерге Дирихле есебі үшін алынған нәтижелерді полигармониялы тендеулерге де алуға болады.

Бұл жұмыс Қазақстан Республикасы Білім және Ғылым министрлігінің 3492/ГФ4 грантының қолдауымен орындалды.

ӘДЕБИЕТ

- [1] Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. - М.: Наука. -1974. - 808 с.
- [2] Кондратьев В.А., Олейник О.А. О периодических решениях параболического уравнения второго порядка во внешних областях // Вестник МГУ, сер. 1, мат., мех. - 1985. - №4. - С. 38-47.
- [3] Кудрявцев Л.Д. Решение первой краевой задачи для самосопряженных и эллиптических уравнений в случае неограниченных областей // Изв. АН СССР, Сер. матем. - 1967. - Т. 31, №5. - С. 354-366.
- [4] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1981. - 512 с.
- [5] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. - М.: Наука, -1966. - 724 с.
- [6] Зорич В.А. Математический анализ. - М.: Наука, 1984. - Т.2.
- [7] Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. - М.: Наука, 1983.
- [8] Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. - М.: Высшая школа, 1977.
- [9] Харди Г.Г., Литтлвуд Д.Е., Поля Г. Неравенства. - М.: ИЛ, 1948.
- [10] Begehr H., Vu T.N.H., Zhang Z.-X. Polyharmonic Dirichlet Problems // Proceedings of the Steklov Institute of Math. - 2006. - V. 255. - P. 13-34.
- [11] Begehr H. Six Biharmonic Dirichlet Problems in Complex Analysis // Preprint. - FU Berlin. - 2006. - P. 243 -251.
- [12] Begehr H., Vaitekhovich T. Harmonic boundary value problems in half disc and half ring // Funct. Approx. Comment. Math. - 2009. - V. 40, № 2. - P. 251--282.
- [13] Kalmenov T.Sh., Koshanov B.D., Nemchenko M.Y. Green function representation for the Dirichlet problem of the polyharmonic equation in a sphere // Complex Variables and Elliptic Equations. - 2008. - V. 53, № 2. - P. 177-183.

- [14] Кальменов Т.Ш., Кошанов Б.Д. Представление функции Грина задачи Дирихле для полигармонических уравнений в шаре // Сибирский Математический журнал. 2008, Т.49, №3, 423-428 с.
- [15] Кальменов Т.Ш., Кошанов Б.Д., Немченко М.Ю. Представление функции Грина задачи Дирихле для полигармонических уравнений в шаре // Доклады Российской Академии Наук. - 2008. - Т. 421, № 3. - С. 305-307.
- [16] Кангужин Б.Е., Кошанов Б.Д. Необходимые и достаточные условия разрешимости краевых задач для полигармонического уравнения // Уфимский математический журнал. - 2010. - № 2. - С. 41-52.
- [17] Sadybekov M.A., Torebek B.T., Turmetov B.Kh. On an explicit form of the Green function of the third boundary value problem for the Poisson equation in a circle // AIP Conference Proceedings. - 2014. - V. 1611. - P. 255-260.
- [18] Sadybekov M.A., Torebek B.T., Turmetov B.Kh. Representation of Green's function of the Neumann problem for a multi-dimensional ball // Complex Variables and Elliptic Equations. - 2016. - V.61, № 1. - P. 104-123.
- [19] Кангужин Б.Е., Кошанов Б.Д., Рамазанов М.А. О корректных краевых задачах для уравнения Лапласа во внешних областях // Деп. в КазГосИНТИ 04.05.98. - №8294 - Ка98.

REFERENCES

- [1] Sobolev S.L. Introduction to the theory of cubature formulas. Nauka, Moscow. - 1974. - 808 p. (in Russian).
- [2] Kondrat'ev V.A., Oleinik O.A. Periodic solutions of second order parabolic equation in the outer regions // Vestnik MGU, ser.1, mat., mech. - 1985. - №4. - P. 38-47.
- [3] Kudryavtsev L.D. Solution of the first boundary value problem for self-
- [4] adjoint and elliptic equations in the case of unbounded domains // Izvestie AN USSR, Ser. Mat. - 1967. - T. 31, №5. - P. 354-366.
- [5] Vladimirov V.S. Equations of mathematical physics. Nauka, Moscow. - 1981. - 512 p. (in Russian).
- [6] Tikhonov A.N., Samarskii A.A. Equations of mathematical physics. Nauka, Moscow. -1966. - 724 p. (in Russian).
- [7] Zorich V.A. Mathematical analysis. Vol. 2. Nauka, Moscow. - 1984. (in Russian).
- [8] Mikhailov V.P. Differential equations in partial derivatives. High School, Moscow. -1983. (in Russian).
- [9] Mikhlin S.G. Linear partial differential equations. High School, Moscow. - 1977. (in Russian).
- [10] Hardy G.G., Littlewood D.E., Polya G. Inequality. IL, Moscow. - 1948. (in Russian).
- [11] Begehr H., Vu T.N.H., Zhang Z.-X. Polyharmonic Dirichlet Problems // Proceedings of the Steklov Institute of Math. - 2006. - V. 255. - P. 13-34.
- [12] Begehr H. Six Biharmonic Dirichlet Problems in Complex Analysis // Preprint. - FU Berlin. - 2006. - P. 243 -251.
- [13] Begehr H., Vaitekhovich T. Harmonic boundary value problems in half disc and half ring // Funct. Approx. Comment. Math. - 2009. - V. 40, № 2. - P. 251--282.
- [14] Kal'menov T.Sh., Koshanov B.D., Nemchenko M.Y. Green function representation for the Dirichlet problem of the polyharmonic equation in a sphere // Complex Variables and Elliptic Equations. - 2008. - V. 53, № 2. - P. 177-183.
- [15] Kal'menov T.Sh., Koshanov B.D. Representation for the Green's function of the Dirichlet problem for polyharmonic equations in a ball, Siberian Mathematical Journal. - 2008. - V. 49, № 3. - P. 423-428.
- [16] Kal'menov T.Sh., Koshanov B.D., Nemchenko M.Yu. Green function representation in the Dirichlet problem for polyharmonic equations in a ball // Doklady Mathematics. - 2008. - V. 78, № 1. - P. 528-530.
- [17] Kanguzhin B.E., Koshanov B.D. Necessary and sufficient conditions for the solvability of boundary value problems for polyharmonic equation // Ufa Mathematical Journal. - 2010. - № 2. - P. 41-52.
- [18] Sadybekov M.A., Torebek B.T., Turmetov B.Kh. On an explicit form of the Green function of the third boundary value problem for the Poisson equation in a circle // AIP Conference Proceedings. - 2014. - V. 1611. - P. 255-260.
- [19] Sadybekov M.A., Torebek B.T., Turmetov B.Kh. Representation of Green's function of the Neumann problem for a multi-dimensional ball // Complex Variables and Elliptic Equations. - 2016. - V.61, № 1. - P. 104-123.
- [20] Kanguzhin B.E., Koshanov B.D., Ramazanov M.A. Correct boundary value problems for the Laplace equation in the outer regions // Dep. in KazGosINTI 04.05.98. - №8294 - Ка98.

Б.Д. Кошанов, Е.Н. Адильбеков, Е. Дуйсен

Институт математики и математического моделирования, Алматы

РАЗМЕРНОСТЬ ПРОСТРАНСТВА РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ПУАССОНА И БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ-II

Аннотация. В данной работе изучены поведения решений задач Дирихле для уравнения Пуассона и бигармонического уравнения в неограниченной области. При исследовании таких задач появляется необходимость введения дополнительных условий на бесконечности, однозначно определяющих решений исследуемых задач. В работе вычислены размерности пространств решений выше указанной задачи с дополнительным условием.

Ключевые слова: уравнения Пуассона, бигармоническое уравнение, оператор би-Лапласа, задача Дирихле.

МАЗМҰНЫ

<i>Джумабаев Д.С., Жармагамбетов А.С.</i> Фредгольм интегро-дифференциалдық теңдеуі үшін сызықтық шеттік есепті шешудің сандық әдісі.....	5
<i>Асанова А.Т., Иманчиев А.Е., Қәдірбаева Ж.М.</i> Жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін көпнүктелі есептің бірмәнді шешілімділігі туралы	12
<i>Дауылбаев М. К., Джумабаев Д. С., Атахан Н.</i> Сингулярлы ауытқыған интегралды-дифференциалдық теңдеуге арналған шекаралық есептің асимптотикалық бейнелеуі.....	18
<i>Асқарова Ә.С., Бөлегенова С.Ә., Бөлегенова С.Ә., Максимов В.Ю., Оспанова Ш.С.</i> ПК-39 және БКЗ-160 қазандықтарының жану камераларының аэродинамикасы мен жылу масса алмасуын зерттеу.....	27
<i>Абишев М.Е., Токтарбай С., Абылаева А.Ж., Талхат А.З., Белсарова Ф.Б.</i> Екі массивті айналмалы дене өрісіндегі айналмалы сынақ дене орбитасының орнықтылығы.....	39
<i>Ақжігітова Э.М., Құрманғалиева В.О., Арбузов А.Б.</i> Мюонның радиациялық ыдырауын модельден тәуелсіз түрде сипаттау	54
<i>Асқарова Ә.С., Бөлегенова С.Ә., Бөлегенова С.Ә., Максимов В.Ю., Оспанова Ш.С.</i> ПК-39 қазандығының жану камерасындағы шаң тозанды көмір отынын жағу процесін сандық модельдеу.....	58
<i>Әбішев М., Малыбаев А., Кеведо Э.</i> Мінсіз газдың геометротермодинамикасы.....	64
<i>Шыныбаев М.Д., Беков А.А., Рахимжанов Б.Н., Моминов С.Б., Сәдібек А.Ж., Дауырбеков С.С., Жолдасов С.А.</i> Хилдың екінші есебіндегі ұйытқулы шеңбер типтес орбиталар.....	69
<i>Асқарова А.С., Бөлегенова С.А., Бөлегенова С.А., Максимов В.Ю., Максұтханова А.М., Турбекова А.Г., Бейсенов Х.И.</i> БКЗ-160 жану камерасындағы термохимиялық-газдандырылған көмір жануын зерттеудің есептеу эксперименті.....	75
<i>Салғараева Г.И., Базарбаева А.</i> Білім берудегі Steam жүйесі және робототехника.....	81
<i>Ақылбаев М.И., Пархатова С., Шалданбаев А.Ш.</i> Бірлесіп толыққан операторлар	87
<i>Шыныбаев М.Д., Дауырбеков С.С., Жолдасов С.А., Алиасқаров Д.Р., Мырзақасова Г.Е., Сәдібек А.Ж.</i> Жердің жасанды серігінің сәуле қысымынан алған ұйытқуын Делоне элементтерінде есепке алу.....	98
<i>Қабылбеков К.А., Аширбаев Х.А., Абекова Ж.А., Омашова Г.Ш., Қыдырбекова Ж.Б., Джумағалиева А.И.</i> Соққы құбылысын зерттеуге арналған компьютерлік зертханалық жұмысты ұйымдастырудың бланкі үлгісі.....	104
<i>Қожамқұлова Ж.Ж., Аманкелдіқызы Н., Кабаева Д.А.</i> Болашақ мұғалімдерді кәсіби дайындауда қолданылатын ақпараттық технологиялар және олардың даму болашағы.....	110
<i>Қошанов Б.Д., Әділбеков Е.Н., Дүйсен Е.</i> Шектелмеген облыста пуассон және Бигармониалы теңдеулер үшін Дирихле есебі шешімдер кеңістігінің өлшемі – I.....	116
<i>Қошанов Б.Д., Әділбеков Е.Н., Дүйсен Е.</i> Шектелмеген облыста Пуассон және бигармониалы теңдеулер үшін Дирихле есебі шешімдер кеңістігінің өлшемі – II.....	126
<i>Сапрыгина М.Б., Ақылбаев М.И., Шалданбаев А.Ш.</i> Штурм-Лиувилл операторының периодты кері есебі.....	132
<i>Қойшыева Т.Қ., Қожамқұлова Ж.Ж., Сабит Б.</i> Жоғары оқу орнында болашақ мұғалімдерді объектілі-бағдарлы жобалау негізінде кәсіби дайындау моделі.....	146
<i>Исаева Г.Б., Бейсенова А.М.</i> Виртуалды машина және виртуалды машина ерекшеліктері мен виртуалдану деңгейлері жайлы жалпы мәселелер.....	153
<i>Сарсенбаев Х.А., Хамзина Б.С., Колдасова Г.А., Исаева Г.Б.</i> Көлденең ұңғымалардың өнімдік қабатын тиімді ашу үшін биополимерлі бұрғылау ерітіндісін қолдану.....	161
Ғалымды еске алу	
Э.Г. Боос.....	166

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Джумабаев Д.С., Жармагамбетов А.С.</i> Численный метод решения линейной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма.....	5
<i>Асанова А.Т., Иманчиев А.Е., Кадирбаева Ж.М.</i> Об однозначной разрешимости многоточечной задачи для системы нагруженных дифференциальных уравнений	12
<i>Дауылбаев М. К., Джумабаев Д. С., Атахан Н.</i> Асимптотическое представление сингулярно возмущенных краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений.....	18
<i>Аскарова А.С., Болегенова С.А., Болегенова С.А., Максимов В.Ю., Оспанова Ш.С.</i> Исследование аэродинамики и теплообмена в топочных камерах котлов ПК-39 и БКЗ-160	27
<i>Абишев М.Е., Токтарбай С., Абылаева А.Ж., Талхат А.З., Белисарова Ф.Б.</i> Устойчивость орбиты вращательного движения пробного тела в поле двух массивных вращающихся тел.....	39
<i>Акжигитова Э.М., Курмангалиева В.О., Арбузов А.Б.</i> Описание радиоационного распада мюона в модельно – независимом подходе	54
<i>Аскарова А.С., Болегенова С.А., Болегенова С.А., Максимов В.Ю., Шортанбаева Ж.К.</i> Численное моделирование процессов сжигания пылеугольного топлива в топочной камере котла ПК 39.....	58
<i>Абишев М., Мальбаев А., Кеведо Э.</i> Геометротермодинамика идеального газа.....	64
<i>Шинибаев М.Д., Беков А.А., Рахимжанов Б.Н., Моминов С.Б., Садыбек А.Ж., Даиырбеков С.С., Жолдасов С.А.</i> Возмущенная орбита кругового типа во второй задаче Хилла.....	69
<i>Аскарова А.С., Болегенова С.А., Болегенова С.А., Максимов В.Ю., Максутханова А.М., Турбекова А.Г., Бейсенов Х.И.</i> Вычислительный эксперимент по исследованию горения термохимически-газифицированного угля в топочной камере котла БКЗ-160.....	75
<i>Салгарева Г.И., Базарбаева А.</i> Система Steam в образовании и робототехника.....	81
<i>Ақылбаев М.И., Пархатова С., Шалданбаев А.Ш.</i> О совместно полных операторах Штурма-Лиувилля.....	87
<i>Шинибаев М.Д., Даирбеков С.С., Жолдасов С.А., Алиаскаров Д.А., Мырзакасова Г.Е., Садыбек А.Ж.</i> Возмущения спутника земли от светового давления в элементах Делоне.....	98
<i>Кабылбеков К.А., Аширбаев Х.А., Абекова Ж.А., Омашова Г.Ш., Кыдырбекова Ж.Б., Джумагалиева А.И.</i> Организация выполнения компьютерной лабораторной работы по исследованию явления биения.....	104
<i>Кожамкулова Ж.Ж., Аманкелдикызы Н., Кабаева Д.А.</i> Информационные технологии, используемые при подготовке будущих педагогов, и их развитие.....	110
<i>Кошанов Б.Д., Адильбеков Е.Н., Дуйсен Е.</i> Размерность пространства решений задачи Дирихле для уравнений Пуассона и бигармонического уравнения в неограниченной области-I.....	116
<i>Кошанов Б.Д., Адильбеков Е.Н., Дуйсен Е.</i> Размерность пространства решений задачи Дирихле для уравнений Пуассона и бигармонического уравнения в неограниченной области- II.....	126
<i>Сапрыгина М.Б.¹, Акылбаев М.И., Шалданбаев А.Ш.</i> Обратная периодическая задача оператора Штурма-Лиувилля.....	132
<i>Койшиева Т.К., Кожамкулова Ж.Ж., Сабит Б.</i> Профессиональная подготовка будущих преподавателей в высших учебных заведениях на основе объектно-ориентированного проектирования	146
<i>Исаева Г.Б., Бейсенова А.М.</i> Виртуальные машины, преимущества виртуальных машин и уровни виртуализации...153	
<i>Сарсенбаев Х.А., Хамзина Б.С., Колдасова Г.А., Исаева Г.Б.</i> Применение биополимерных буровых растворов для эффективного вскрытия продуктивных горизонтов горизонтальных скважин.....	161
Памяти ученого	
Краткий очерк научной и общественной деятельности академика Национальной академии наук Республики Казахстан Э.Г.Бооса.....	166

CONTENTS

<i>Dzhumabaev D.S., Zharmagambetov A.S.</i> Numerical method for solving a linear boundary value problem for fredholm integro-differential equations.....	5
<i>Assanova A.T., Imanchiev A.E., Kadirbayeva Zh.M.</i> On the unique solvability of a multi-point problem for system of the loaded differential equations hyperbolic type	12
<i>Dauylbayev M. K., Dzhumabaev D. S., Atakhan N.</i> Asymptotical representation of singularly perturbed boundary value problems for integro-differential equations	18
<i>Askarova A.S., Bolegenova S.A., Bolegenova S.A., Maximov V.Yu., Ospanova Sh.S.</i> Investigation of aerodynamics and heat and mass transfer in the combustion chambers of the boilers PK-39 and BKZ-160.....	27
<i>Abishev M.E., Toktarbay S., Abylayeva A.Zh., Talkhat A.Z., Belissarova F.B.</i> The orbital stability of the motion of a test particle in a field of two massive rotating bodies.....	39
<i>Akzhigitova E.M., Kurmangaliyeva V.O., Arbuzov A.B.</i> Description of radiative muon decay using model-independent approach.....	54
<i>Askarova A.S., Bolegenova S.A., Bolegenova S.A., Maximov V.Yu., Shortanbaeva Zh.K.</i> Numerical modeling of burning pulverized coal in the combustion chamber of the boiler PK 39.....	58
<i>Abishev M., Malybayev A., Quevedo H.</i> Geometrothermodynamics of the ideal gas	64
<i>Shinibaev M.D., Bekov A.A., Rahimganov B.N., Mominov S.B., Sadybek A.G., Dairbekov S.S., Zholdasov S.A.</i> Perturbed orbit of a circular type for the Hill second task	69
<i>Askarova A.S., Bolegenova S.A., Bolegenova S.A., Maximov V.Yu., Maxutkhanova A.M., Turbekova A.G., Beisenov Kh.I.</i> A Computational experiment for studying the combustion of thermochemically-gasified coal in the combustion chamber of the boiler BKZ-160.....	75
<i>Salgarayeva G.I., Bazarbayeva A.</i> Steam system in education and robotics.....	81
<i>Akylbayev M. I., Parkhatova S., Shaldanbayev A.Sh.</i> On jointly completeness of Sturm-Liouville operators.....	87
<i>Shinibaev M.D., Dairbekov S.S., Zholdasov S.A., Aliaskarov D.A., Myrzakasova G.E., Sadybek A.G.</i> Perturbations satellites from the light pressure in the delaunay elements.....	98
<i>Kabyrbekov K.A., Ashirbaev H. A., Abekova Zh. A., Omashova G.Sh., Kydyrbekova Zh. B., Dzhumagaliyeva A.I.</i> The organization of performance of computer laboratory operation on examination of the phenomenon of palpation.....	104
<i>Kozhamkulova Zh.Zh., Amankeldikyzy N., Kabaeva D.A.</i> Information technology used in the preparation of future teachers and their development.....	110
<i>Koshanov B.D., Adilbekov E.N., Duysen E.</i> The dimension of the space solutions of the dirichlet problem for the Poisson and biharmonic equations in unbounded Domains – I.....	116
<i>Koshanov B.D., Adilbekov E.N., Duysen E.</i> The dimension of the space solutions of the Dirichlet problem for the Poisson and biharmonic equations in unbounded domains – II.....	126
<i>Saprigina M.B., Akylbayev M. I., Shaldanbayev A.Sh.</i> The inverse periodic problem of the Sturm-Liouville operator.....	132
<i>Koysheeva T.K., Kozhamkulova Zh.Zh., Sabit B.</i> Training in higher education for future teachers on the basis of object-oriented design.....	146
<i>Issayeva G.B., Beisenova A.M.</i> The virtual machines, advantages of the virtual machines and virtualization levels.....	153
<i>Sarsenbayev Kh.A., Khamzina B.S., Koldassova G.A., Issayeva G.B.</i> Application of biopolymer drilling fluid for effective opening productive horizons horizontal wells.....	161
The memory of the scientist	
E. G. Boos	166

**Publication Ethics and Publication Malpractice
in the journals of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan**

For information on Ethics in publishing and Ethical guidelines for journal publication see <http://www.elsevier.com/publishingethics> and <http://www.elsevier.com/journal-authors/ethics>.

Submission of an article to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan implies that the described work has not been published previously (except in the form of an abstract or as part of a published lecture or academic thesis or as an electronic preprint, see <http://www.elsevier.com/postingpolicy>), that it is not under consideration for publication elsewhere, that its publication is approved by all authors and tacitly or explicitly by the responsible authorities where the work was carried out, and that, if accepted, it will not be published elsewhere in the same form, in English or in any other language, including electronically without the written consent of the copyright-holder. In particular, translations into English of papers already published in another language are not accepted.

No other forms of scientific misconduct are allowed, such as plagiarism, falsification, fraudulent data, incorrect interpretation of other works, incorrect citations, etc. The National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan follows the Code of Conduct of the Committee on Publication Ethics (COPE), and follows the COPE Flowcharts for Resolving Cases of Suspected Misconduct (http://publicationethics.org/files/u2/New_Code.pdf). To verify originality, your article may be checked by the Cross Check originality detection service <http://www.elsevier.com/editors/plagdetect>.

The authors are obliged to participate in peer review process and be ready to provide corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. All authors of a paper should have significantly contributed to the research.

The reviewers should provide objective judgments and should point out relevant published works which are not yet cited. Reviewed articles should be treated confidentially. The reviewers will be chosen in such a way that there is no conflict of interests with respect to the research, the authors and/or the research funders.

The editors have complete responsibility and authority to reject or accept a paper, and they will only accept a paper when reasonably certain. They will preserve anonymity of reviewers and promote publication of corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. The acceptance of a paper automatically implies the copyright transfer to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.

The Editorial Board of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan will monitor and safeguard publishing ethics.

Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайтах:

www.nauka-nanrk.kz

<http://www.physics-mathematics.kz>

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Редакторы *М. С. Ахметова, Д. С. Аленов, Т. А. Апендиев*
Верстка на компьютере *А. М. Кульгинбаевой*

Подписано в печать 10.04.2017.
Формат 60x881/8. Бумага офсетная. Печать – ризограф.
11,4 п.л. Тираж 300. Заказ 2.

Национальная академия наук РК
050010, Алматы, ул. Шевченко, 28, т. 272-13-18, 272-13-19