ISSN 2518-1726 (Online),
ISSN 1991-346X (Print)

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ

Х А Б А Р Л А Р Ы

ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

N E W S

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА СЕРИЯСЫ

♦

СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

♦

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

2 (312)

НАУРЫЗ – СӘУІР 2017 Ж.
МАРТ – АПРЕЛЬ 2017 г.
MARCH – APRIL 2017

1963 ЖЫЛДЫҢ ҚАҢТАР АЙЫНАН ШЫҒА БАСТАҒАН
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1963 ГОДА
PUBLISHED SINCE JANUARY 1963

ЖЫЛЫНА 6 РЕТ ШЫҒАДЫ
ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД
PUBLISHED 6 TIMES A YEAR

АЛМАТЫ, ҚР ҰҒА
АЛМАТЫ, НАН РК
ALMATY, NAS RK

«ҚР ҰҒА Хабарлары. Физика-математикалық сериясы».

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Меншіктенуші: «Қазақстан Республикасының Ұлттық ғылым академиясы» РҚБ (Алматы қ.)
Қазақстан республикасының Мәдениет пен ақпарат министрлігінің Ақпарат және мұрағат комитетінде 01.06.2006 ж. берілген **№5543-Ж** мерзімдік басылым тіркеуіне қойылу туралы куәлік

Мерзімділігі: жылына 6 рет.
Тиражы: 300 дана.

Редакцияның мекенжайы: 050010, Алматы қ., Шевченко көш., 28, 219 бөл., 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18, www:nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

---

Типографияның мекенжайы: «Аруна» ЖК, Алматы қ., Муратбаева көш., 75.

«Известия НАН РК. Серия физико-математическая».

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы)
Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации и архивов Министерства культуры и информации Республики Казахстан **№5543-Ж**, выданное 01.06.2006 г.

Периодичность: 6 раз в год.
Тираж: 300 экземпляров.

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, ком. 219, 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,
www:nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75.

News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physical-mathematical series.

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Owner: RPA "National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan" (Almaty)
The certificate of registration of a periodic printed publication in the Committee of information and archives of the Ministry of culture and information of the Republic of Kazakhstan N 5543-Ж, issued 01.06.2006

Periodicity: 6 times a year
Circulation: 300 copies

Editorial address: 28, Shevchenko str., of. 219, 220, Almaty, 050010, tel. 272-13-19, 272-13-18,
www:nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

Address of printing house: ST "Aruna", 75, Muratbayev str, Almaty

N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 2, Number 312 (2017), 39 – 53

UDC 530.12:531.51

M.E. Abishev, S. Toktarbay, A.Zh. Abylayeva, A.Z. Talkhat, F.B. Belissarova

Al-Farabi Kazakh National University, Almaty
medeu.abishev@kaznu.kz, saken.yan@yandex.com

THE ORBITAL STABILITY OF THE MOTION OF A TEST PARTICLE IN A FIELD OF TWO MASSIVE ROTATING BODIES

Annotation. The paper considers the orbital stability of the circular motion of a test body in the restricted three-body problem, where all bodies have their own rotation. The position of the central body coincides with the reference point of coordinates, the second body is moving in circular orbit around a central body (first body), and without disturbance. The test body moves in a perturbed circular orbit. This task belongs to the class of quasi-Keplerian problem and based on the adiabatic theory of motion of bodies in the General relativity (GR) mechanics. The adiabatic theory of motion of bodies is the approach for study the evolutionary motion of bodies in the mechanics of the GR and developed by M.M. Abdildin. The corresponding theory based on the vector elements to describe the motion in the asymptotic methods of nonlinear oscillations and in the method of adiabatic invariants.

We derived the Lagrangian of a system up to the terms of second order. This accuracy is sufficient for the problems of relativistic celestial mechanics, the influence of the internal structure of bodies can be neglected and omitted all the members which associated with that influence. We are limited to zero terms of the expansion in powers of the relationship of body size to their mutual distances.

Key words: General relativity, rotational motion, translational motion, stability of motion, three-body problem.

Introduction

The main task of celestial mechanics is the problem of the motion of a system of bodies, special cases of which are the tasks of two, three, four, etc. bodies, to which the problems of the motion of various concrete celestial bodies are indicated [1, 2].

The classical method of investigating the motion of celestial bodies involves representation of the solution of the corresponding equations of perturbed motion in the form of segments of series. However, Henri Poincaré showed that the series, used to describe the motion of celestial bodies, diverge. Consequently, they can not be used to analyze the behavior of the solar system on an infinite time interval [3]. According to the KAM-theory, if the masses of the planets are small enough, the eccentricities and slopes of the orbits are small, then for the majority of the initial conditions (excluding the resonant and close to them) the motion will be conditionally periodic, the eccentricities and slopes will remain small, and the major semiaxes will always oscillate near their original values, that is, the Solar system will be Lyapunov-stable over an infinite time interval. Unfortunately, resonances play a very important role in the real Solar system. Therefore, the conclusions of KAM-theory can not be applied to the Solar system as a whole over the entire range of its existence [4].

Currently, the stability of the Solar system is mainly considered within the framework of classical mechanics, although the modern theory describing the motion and interaction of the Solar system is the general relativity theory (GRT). Therefore, the study of the problem of the stability of motion in the framework of GRT is very relevant.

Qualitative and approximate methods of studying the motion of bodies in general relativity play an extremely important role, since even to obtain the most exact equations of motion (except for test bodies - the equation of geodesics) is practically impossible to achieve.

A rigorous and correct statement of the problem of the stability of the motion of bodies in GRT is more complicated than in classical mechanics. This is due to the complexity of the GRT mathematical apparatus and, as a result, the impossibility of obtaining important physical corollaries of the theory with the help of exact solutions of basic and other equations of general relativity.

It should also be noted that in classical mechanics, the exact differential equations describing the class of motions under study are usually known. In GRT, as mentioned above, the exact equations of motion are known only for test bodies. In the case of bodies of comparable masses, the strict formulation of the problem of motion stability is still clear, since in this case the exact equations of motion are unknown. They are inferred only in a certain approximation. Moreover, most of the problems considered in the GRT mechanics are quasi-Keplerian because of the smallness of the relativistic perturbations in comparison with the Newtonian force. This circumstance makes it possible to search for special, optimal, simple methods for studying problems and other questions of the problem of the motion of bodies in general relativity [5-8].

In works [9-12], the orbital stability of the circular motion of a test body in a restricted three-body problem in GRT is investigated, when all bodies have no proper rotation. Perturbations from a second body moving in a circular orbit in the motion area of the test body (in the plane of the second body motion) are of the order of relativistic corrections to the motion of the test body from the central body

$$U_1 << c^2, U_2 << U_1 \qquad (1)$$

where U_1, U_2 – potentials of the central and second body, respectively. The position of the resting central body coincides with the reference point of coordinates, the second body moves around the central (first) body in a circle and is not subjected to disturbance. The test body moves along a perturbed circular orbit. The problem belongs to the class of quasi-Keplerian ones and is considered on the basis of the adiabatic theory of the motion of bodies in the GRT mechanics. Under the name of adiabatic theory of motion of bodies it is meant the approach developed by M.M. Abdildin for the study of evolutionary motion in the GRT mechanics. It is based on the use of vector elements for the description of motion, on the asymptotic methods of the theory of nonlinear oscillations, and on the method of adiabatic invariants [13-19]. As a result, [9] it is shown that the motion of the test body in the plane of the orbit of the second body is stable.

Methods of research

In this paper, we consider the orbital stability problem for the circular motion of the test body in a restricted three-body problem, when all bodies have their own rotation. We derived the Lagrangian functions of a system of bodies to within second-order terms. With accuracy that is completely sufficient for the problems of relativistic celestial mechanics, the influence of the internal structure of bodies can generally be neglected and omitted from all terms associated with taking this influence into account. We confine ourselves to the zero terms of the expansion in powers of the ratio of the sizes of the bodies to their mutual distances.

The Lagrange function of translational and rotational motion for three rotating bodies can be represented as:

$$L = L^{(0)} + L^{(*)}. \qquad (2)$$

where $L^{(0)}$ – the Lagrange function for three point masses, and the second term $L^{(*)}$ is responsible for corrections containing rotational terms.

The Hamiltonian of the problem can be represented as

$$H = H^{(0)} + H^{(*)} \qquad (3)$$

where $H^{(0)}$ – the Hamiltonian for three point masses, and the second term $H^{(*)}$ is responsible for corrections containing rotational terms.

We write down the equations of motion of the problem under consideration in the representation of the vector elements $\vec{M}$ and $\vec{A}$, which is convenient for the application of asymptotic methods of nonlinear mechanics, since, in this case, the separation of the variables into fast and slow ones is evident in the equations of motion. The latter circumstance is precisely the characteristic feature of those problems for the analysis of which the asymptotic methods of investigation are applied.

$\vec{M}$ and $\vec{A}$ – the vector elements of the orbit (angular momentum and the Laplace vector) and are equal to:

$$\vec{M} = \left[\vec{r}, \vec{p}\right], \tag{4}$$

$$\vec{A} = \left[\frac{\vec{p}}{m}, \vec{M}\right] - \gamma \frac{mm_0}{r}\vec{r}\ , \tag{5}$$

where

$$A = \gamma mm_0 e = \alpha e\ ,$$

where e – eccentricity of orbit.

So, following the procedure, we get the derivatives

$$\dot{M}_i = \left[\dot{\vec{r}}_i, \vec{p}_i\right] + \left[\vec{r}_i, \dot{\vec{p}}_i\right], \tag{6}$$

where

$$\dot{\vec{r}}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{\partial H_0}{\partial p_i} + \frac{\partial H^*}{\partial p_i} = \dot{\vec{r}}_i^{(0)} + \dot{\vec{r}}_i^{(*)};\quad \dot{\vec{p}}_i = -\frac{\partial H}{\partial r_i} = -\frac{\partial H_0}{\partial r_i} - \frac{\partial H^*}{\partial r_i} = \dot{\vec{p}}_i^{(0)} + \dot{\vec{p}}_i^{(*)}; \tag{7}$$

We can also write the equation (6) in the following form:

$$\dot{M} = \dot{M}^{(0)} + \dot{M}^{(*)} \tag{8}$$

where $\dot{M}^{(0)}$ – change in the moment for three point masses, and $\dot{M}^{(*)}$ - change in the moment due to body rotation.

To obtain the equation of evolutionary motion, it is necessary to integrate the equation (8) over the period of the repetition of the configurations of the system T (the synodic period of the test body):

$$\bar{\dot{M}} = \frac{1}{T}\int_0^T \left(\bar{\dot{M}}^{(0)} + \bar{\dot{M}}^{(*)}\right) dt\ . \tag{9}$$

where

$$T = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_3}. \tag{10}$$

The first component on the right-hand side of equation (9) describes the average change in the orbital angular momentum for three point masses. It was shown in [9] that this quantity is zero. Thus, in this case, the motion of the test body in the plane of the orbit is stable.

Let us now consider the case when all bodies have their own rotation. In equation (2) $L^{(*)}$, containing rotational terms, takes the form [20]

$$L^* = \sum_{i=1}^{3}\omega_i^2 I_i + \frac{1}{c^2}\left[\sum_{i=1}^{3}\omega_i^2 I_i - \frac{1}{2}\left(I_2\left(\vec{\omega}_2 \cdot \dot{\vec{r}}_2\right)^2 + I_3\left(\vec{\omega}_3 \cdot \dot{\vec{r}}_3\right)^2\right)\right]$$
$$-\frac{\gamma}{c^2}\cdot\left\{\frac{1}{\left|\vec{r}_2\right|^3}\left(\vec{r}_2 \cdot \dot{\vec{r}}_2\right)\cdot\left[3m_1 I_2.\omega_2 + 4m_2 I_1.\omega_1\right] - \frac{1}{\left|\vec{r}_3\right|^3}\left(\vec{r}_3 \cdot \dot{\vec{r}}_3\right)\cdot\left[3m_1 I_3.\omega_3 + 4m_3 I_1.\omega_1\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_3}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_3\right|^3}\cdot\left[\left(3\dot{\vec{r}}_3 - 4\dot{\vec{r}}_2\right)\cdot m_2 I_3.\omega_3 - \left(3\dot{\vec{r}}_2 - 4\dot{\vec{r}}_3\right)\cdot m_3 I_2.\omega_2\right]\right\} + \frac{\gamma}{2c^2}\cdot\frac{m_2 I_2 + m_3 I_3}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_3\right|^3}.$$

$$\cdot\left[-\dot{\vec{r}}_2\cdot\dot{\vec{r}}_3+3\frac{\left(\left(\vec{r}_2-\vec{r}_3\right)\cdot\dot{\vec{r}}_2\right)\cdot\left(\left(\vec{r}_2-\vec{r}_3\right)\cdot\dot{\vec{r}}_3\right)}{\left|\vec{r}_2-\vec{r}_3\right|^2}\right]-\frac{3\gamma}{c^2}\left[\frac{1}{\left|\vec{r}_2\right|}\cdot\left(m_1\omega_2^2I_2+m_2\omega_1^2I_1\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\left|\vec{r}_3\right|}\left(m_1\omega_3^2I_3+m_3\omega_1^2I_1\right)+\frac{1}{\left|\vec{r}_2-\vec{r}_3\right|}\left(m_2\omega_3^2I_3+m_3\omega_2^2I_2\right)\right]+$$

$$+\frac{\gamma^2}{2c^2}\left\{\frac{m_1I_2+m_2I_1}{\left|\vec{r}_2\right|^3}+\frac{m_1I_3+m_3I_1}{\left|\vec{r}_3\right|^3}+\frac{m_2I_3+m_3I_2}{\left|\vec{r}_2-\vec{r}_3\right|^3}+\right.$$

$$\left.+m_1m_2I_3\cdot\frac{\vec{r}_3\cdot\left(\vec{r}_3-\vec{r}_2\right)}{\left|\vec{r}_3\right|^3\left|\vec{r}_2-\vec{r}_3\right|^3}+m_2m_3I_1\cdot\frac{\vec{r}_2\cdot\vec{r}_3}{\left|\vec{r}_2\right|^3\cdot\left|\vec{r}_3\right|^3}+m_1m_3I_2\cdot\frac{\left(\vec{r}_2-\vec{r}_3\right)\cdot\vec{r}_2}{\left|\vec{r}_2-\vec{r}_3\right|^3\left|\vec{r}_2\right|^3}\right\}-$$

$$-\frac{\gamma}{c^2}\left\{4\left[\frac{I_1I_2}{\left|\vec{r}_2\right|^3}+\frac{I_1I_3}{\left|\vec{r}_3\right|^3}+\frac{I_2I_3}{\left|\vec{r}_2-\vec{r}_3\right|^3}\right]-3\left[\frac{\left(\vec{r}_2\cdot\vec{\omega}_1\right)\cdot\left(\vec{r}_2\cdot\vec{\omega}_2\right)}{\left|\vec{r}_2\right|^3}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\left(\vec{r}_3\cdot\vec{\omega}_1\right)\cdot\left(\vec{r}_3\cdot\vec{\omega}_3\right)}{\left|\vec{r}_3\right|^3}+\frac{\left(\left(\vec{r}_2-\vec{r}_3\right)\cdot\vec{\omega}_2\right)\cdot\left(\left(\vec{r}_2-\vec{r}_3\right)\cdot\vec{\omega}_3\right)}{\left|\vec{r}_2-\vec{r}_3\right|^3}\right]\right\}. \qquad (11)$$

As for the Hamiltonian $H^{(*)}$, this quantity is determined by the relation:

$$H^*=\vec{v}_i\frac{\partial L^*}{\partial\vec{v}_i}-L^*; \qquad (12)$$

Then we get the following expression:

$$H^{(*)}=-\left(\vec{\omega}_1^2I_1+\vec{\omega}_2^2I_2+\vec{\omega}_3^2I_3\right)-\frac{1}{c^2}\left[I_1\vec{\omega}_1^2+I_2\vec{\omega}_2^2+I_3\vec{\omega}_3^2-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\left(I_1\left(\vec{\omega}_1\cdot\vec{p}_1\right)^2+I_2\left(\vec{\omega}_2\cdot\vec{p}_2\right)^2-I_3\left(\vec{\omega}_3\cdot\vec{p}_3\right)^2\right)\right]-$$

$$-\frac{\gamma}{2c^2}\cdot\frac{m_2I_2+m_3I_3}{\left|\vec{r}_2-\vec{r}_3\right|^3}\cdot\left[-\vec{p}_2\cdot\vec{p}_3+3\frac{\left(\left(\vec{r}_2-\vec{r}_3\right)\cdot\vec{p}_2\right)\cdot\left(\left(\vec{r}_2-\vec{r}_3\right)\cdot\vec{p}_3\right)}{\left|\vec{r}_2-\vec{r}_3\right|^2}\right]$$

$$+\frac{3\gamma}{c^2}\left[\frac{1}{\left|\vec{r}_2\right|}\cdot\left(m_1\omega_2^2I_2+m_2\omega_1^2I_1\right)+\frac{1}{\left|\vec{r}_3\right|}\left(m_1\omega_3^2I_3+m_3\omega_1^2I_1\right)+\frac{1}{\left|\vec{r}_2-\vec{r}_3\right|}\left(m_2\omega_3^2I_3+m_3\omega_2^2I_2\right)\right]-$$

$$-\frac{\gamma^2}{2c^2}\left\{\frac{m_1I_2+m_2I_1}{\left|\vec{r}_2\right|^3}+\frac{m_1I_3+m_3I_1}{\left|\vec{r}_3\right|^3}+\frac{m_2I_3+m_3I_2}{\left|\vec{r}_2-\vec{r}_3\right|^3}+\right.$$

$$\left.+m_1m_2I_3\cdot\frac{\vec{r}_3\cdot\left(\vec{r}_3-\vec{r}_2\right)}{\left|\vec{r}_3\right|^3\left|\vec{r}_2-\vec{r}_3\right|^3}+m_2m_3I_1\cdot\frac{\vec{r}_2\cdot\vec{r}_3}{\left|\vec{r}_2\right|^3\cdot\left|\vec{r}_3\right|^3}+m_1m_3I_2\cdot\frac{\left(\vec{r}_2-\vec{r}_3\right)\cdot\vec{r}_2}{\left|\vec{r}_2-\vec{r}_3\right|^3\left|\vec{r}_2\right|^3}\right\}+$$

$$+\frac{\gamma}{c^2}\left\{4\left[\frac{I_1I_2}{|\vec{r}_2|^3}+\frac{I_1I_3}{|\vec{r}_3|^3}+\frac{I_2I_3}{|\vec{r}_2-\vec{r}_3|^3}\right]-3\left[\frac{(\vec{r}_2\cdot\vec{\omega}_1)\cdot(\vec{r}_2\cdot\vec{\omega}_2)}{|\vec{r}_2|^3}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{(\vec{r}_3\cdot\vec{\omega}_1)\cdot(\vec{r}_3\cdot\vec{\omega}_3)}{|\vec{r}_3|^3}+\frac{((\vec{r}_2-\vec{r}_3)\cdot\vec{\omega}_2)\cdot((\vec{r}_2-\vec{r}_3)\cdot\vec{\omega}_3)}{|\vec{r}_2-\vec{r}_3|^3}\right]\right\}. \tag{13}$$

where I_i – moment of inertia, $\vec{\omega}_i$ – orbital angular velocity. Bearing in mind (7), the derivatives

$$\dot{\vec{r}}_3^{(*)}=\frac{1}{c^2}I_3(\vec{\omega}_3\cdot\vec{p}_3)\vec{\omega}_3-\frac{\gamma}{2c^2}\cdot\frac{m_2I_2+m_3I_3}{|\vec{r}_2-\vec{r}_3|^3}\cdot\left[-\vec{p}_2+3\frac{((\vec{r}_2-\vec{r}_3)\cdot\vec{p}_2)\cdot(\vec{r}_2-\vec{r}_3)}{|\vec{r}_2-\vec{r}_3|^2}\right]. \tag{14}$$

$$\dot{\vec{p}}_3^{(*)}=\left\{-\frac{3\gamma}{2c^2}(m_2I_2+m_3I_3)\frac{\vec{p}_2\vec{p}_3}{|\vec{r}_2-\vec{r}_3|^5}+\frac{15\gamma}{2c^2}\frac{((\vec{r}_2-\vec{r}_3)\vec{p}_2)\cdot((\vec{r}_2-\vec{r}_3)\vec{p}_3)}{|\vec{r}_2-\vec{r}_3|^7}-\right.$$

$$-\frac{3\gamma}{c^2}\frac{1}{|\vec{r}_2-\vec{r}_3|^3}\left(m_2\vec{\omega}_3^2I_3+m_3\vec{\omega}_2^2I_2\right)+\frac{3\gamma^2}{2c^2}\frac{(m_2I_3+m_3I_2)}{|\vec{r}_2-\vec{r}_3|^5}+$$

$$+\frac{\gamma^2}{2c^2}m_1m_2I_3\frac{1}{|\vec{r}_3|^3|\vec{r}_2-\vec{r}_3|^3}-\frac{3\gamma^2}{2c^2}m_1m_2I_3\frac{(\vec{r}_3(\vec{r}_2-\vec{r}_3))}{|\vec{r}_3|^3|\vec{r}_2-\vec{r}_3|^3}-\frac{\gamma^2}{2c^2}m_2m_3I_1\frac{1}{|\vec{r}_2|^3|\vec{r}_3|^3}+$$

$$\left.-\frac{9((\vec{r}_2-\vec{r}_3)\vec{\omega}_2)((\vec{r}_2-\vec{r}_3)\vec{\omega}_3)}{|\vec{r}_2-\vec{r}_3|^5}\right\}\vec{r}_2+\left[\vec{r}_3,\left\{-\frac{9\gamma}{2c^2}(m_2I_2+m_3I_3)\frac{\vec{p}_2\vec{p}_3}{|\vec{r}_2-\vec{r}_3|^5}-\right.\right.$$

$$-\frac{15\gamma}{2c^2}\frac{((\vec{r}_2-\vec{r}_3)\vec{p}_2)\cdot((\vec{r}_2-\vec{r}_3)\vec{p}_3)}{|\vec{r}_2-\vec{r}_3|^7}+\frac{3\gamma}{c^2}\frac{1}{|\vec{r}_3|^3}\left(m_1\vec{\omega}_3^2I_3+m_3\vec{\omega}_1^2I_1\right)+$$

$$+\frac{3\gamma}{c^2}\frac{1}{|\vec{r}_2-\vec{r}_3|^3}\left(m_2\vec{\omega}_3^2I_3+m_3\vec{\omega}_2^2I_2\right)-\frac{3\gamma^2}{2c^2}\frac{(m_1I_3+m_3I_1)}{|\vec{r}_3|^5}-\frac{3\gamma^2}{2c^2}\frac{(m_2I_3+m_3I_2)}{|\vec{r}_2-\vec{r}_3|^5}-$$

$$-\frac{\gamma^2}{c^2}m_1m_2I_3\frac{1}{|\vec{r}_3|^3|\vec{r}_2-\vec{r}_3|^3}-\frac{3\gamma^2}{2c^2}m_1m_2I_3\frac{(\vec{r}_3(\vec{r}_2-\vec{r}_3))}{|\vec{r}_3|^5|\vec{r}_2-\vec{r}_3|^3}-\frac{3\gamma^2}{2c^2}m_1m_2I_3\frac{(\vec{r}_3(\vec{r}_2-\vec{r}_3))}{|\vec{r}_3|^3|\vec{r}_2-\vec{r}_3|^3}+$$

$$+\frac{3\gamma^2}{2c^2}m_2m_3I_1\frac{(\vec{r}_2\vec{r}_3)}{|\vec{r}_2|^3|\vec{r}_3|^5}+\frac{3\gamma^2}{2c^2}m_1m_3I_2\frac{((\vec{r}_2-\vec{r}_3)\vec{r}_2)}{|\vec{r}_2-\vec{r}_3|^5|\vec{r}_2|^3}+\frac{12\gamma}{c^2}\frac{I_1I_3}{|\vec{r}_3|^5}+\frac{12\gamma}{c^2}\frac{I_2I_3}{|\vec{r}_2-\vec{r}_3|^5}+$$

$$\left.\left.+\frac{\gamma}{c^2}\frac{9((\vec{r}_2-\vec{r}_3)\vec{\omega}_2)((\vec{r}_2-\vec{r}_3)\vec{\omega}_3)\vec{r}_3}{|\vec{r}_2-\vec{r}_3|^5}\right\}\vec{r}_3\right]+\left[\vec{r}_3,\frac{\gamma}{c^2}\left\{\frac{9(\vec{r}_3\vec{\omega}_2)(\vec{r}_3\vec{\omega}_3)}{|\vec{r}_2-\vec{r}_3|^3}\vec{r}_3-\frac{3(\vec{r}_3\vec{\omega}_3)}{|\vec{r}_3|^3}\vec{\omega}_1+\frac{3(\vec{r}_3\omega_1)}{|\vec{r}_3|^3}\vec{\omega}_3+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{3((\vec{r}_2-\vec{r}_3)\vec{\omega}_3)}{|\vec{r}_2-\vec{r}_3|^3}\vec{\omega}_2+\frac{3((\vec{r}_2-\vec{r}_3)\vec{\omega}_2)}{|\vec{r}_2-\vec{r}_3|^3}\vec{\omega}_3\right\}\right]. \tag{15}$$

Results of the research

Here we integrate the equation of the rotational motion of the test body, having its own rotation, in the field of rotating massive two bodies. We write down the change in the angular momentum of the rotational component of the equation (8):

$$\dot{M}^{(*)} = \left[\dot{\vec{r}}^{(*)}, \vec{p}\right] + \left[\vec{r}, \dot{\vec{p}}^{(*)}\right]. \tag{16}$$

Let us consider the case when the angular velocity $\vec{\omega}_i$ $(i = 2,3)$ of the rotating body is perpendicular to its orbital plane: i.e.:

$$\vec{\omega}_i = \vec{k}\vec{\omega}_z^{(i)}(i = 2,3), \tag{17}$$

$$\vec{r}_i = \vec{i}x^{(i)} + \vec{j}y^{(i)}, \ (i = 2,3) \tag{18}$$

and

$$\vec{p}_i = \vec{i}p^{(i)}{}_x + \vec{j}p^{(i)}{}_y, \ (i = 2,3), \tag{19}$$

Then, taking into account (14) and (15), the equation for the required vector function takes the form:

$$\dot{M}^{(*)} = -\frac{\gamma}{2c^2}\cdot\frac{m_2 I_2 + m_3 I_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3}\cdot\left\{\left[-\vec{p}_2, \vec{p}_3\right] + 3\frac{\left((\vec{r}_2 - \vec{r}_3)\cdot\vec{p}_2\right)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^2}\left[(\vec{r}_2 - \vec{r}_3), \vec{p}_3\right]\right\} +$$

$$+\left\{-\frac{3\gamma}{2c^2}\left(m_2 I_2 + m_3 I_3\right)\frac{\vec{p}_2\vec{p}_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^5} + \frac{15\gamma}{2c^2}\frac{\left((\vec{r}_2 - \vec{r}_3)\vec{p}_2\right)\cdot\left((\vec{r}_2 - \vec{r}_3)\vec{p}_3\right)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^7} - \right.$$

$$-\frac{3\gamma}{c^2}\frac{1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3}\left(m_2\vec{\omega}_3^2 I_3 + m_3\vec{\omega}_2^2 I_2\right) + \frac{3\gamma^2}{2c^2}\frac{\left(m_2 I_3 + m_3 I_2\right)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^5} +$$

$$+\frac{\gamma^2}{2c^2}m_1 m_2 I_3\frac{1}{|\vec{r}_3|^3|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} - \frac{3\gamma^2}{2c^2}m_1 m_2 I_3\frac{\left(\vec{r}_3(\vec{r}_2 - \vec{r}_3)\right)}{|\vec{r}_3|^3|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} - \frac{\gamma^2}{2c^2}m_2 m_3 I_1\frac{1}{|\vec{r}_2|^3|\vec{r}_3|^3} +$$

$$\left.-\frac{\gamma}{c^2}\frac{9\left((\vec{r}_2 - \vec{r}_3)\vec{\omega}_2\right)\left((\vec{r}_2 - \vec{r}_3)\omega_3\right)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^5}\right\}\left[\vec{r}_3, \vec{r}_2\right]. \tag{20}$$

Substituting the radius-vector of the test body

$$\vec{r}_3 = r_{kep}\left(\vec{i}\cos\omega_3 t + \vec{j}\sin\omega_3 t\right), \tag{21}$$

and of the second body

$$\vec{r}_2 = r_2\left(\vec{i}\cos\omega_2 t + \vec{j}\sin\omega_2 t\right), \tag{22}$$

As well as impulses as derivatives of them multiplied by the corresponding masses, and integrating over the period T (10).

Calculating (20), as a result, we get:

$$\bar{\dot{M}}^{(*)} = \frac{1}{T}\int_0^T \dot{M}^{(*)}dt = 0. \tag{23}$$

Conclusion

Bearing in mind (23), it can be noted that in this case the sum of the vectors of the orbital angular momentum of the bodies is conserved. Indeed, it follows from the conservation of the vector that the circular motion of the rotating test body in the field of massive rotating two bodies, providing $\vec{\omega}_i = \vec{k}\,\omega^{(i)}{}_z\,(i = 2,3)$, is stable.

REFERENCES

[1] Duboshin G.N. Nebesnaja mehanika. Osnovnye zadachi i metody. M.: Nauka, **1968**, 799 s.

[2] Sebehej V. Teorija orbit: ogranichennaja zadacha treh tel. M.: Nauka, Glavnaja redakcija fiziko-matematicheskoj literatury, **1982**, 655 s.

[3] A. Puankare. Izbrannye trudy v 3-h tomah, Nebesnaja mehanika. M.: Nauka, t. 1,**1971.**

[4] Kozlov V.V. Integriruemost' i neintegriruemost' v gamil'tonovoj mehanike . UMN,**1983**, t. 38, № 1, S. 3-67.

[5] Abdil'din M.M. Mehanika teorii gravitacii Jejnshtejna. Alma-Ata, **1988**, 198 s.

[6] Brumberg V.A. Reljativistskaja nebesnaja mehanika. M., **1972**, 382 s.

[7] Abdil'din M.M. O metrike vrashhajushhegosja zhidkogo shara. Voprosy teorii polja. Alma-Ata**, 1985**, S. 20-25.

[8] Landau L.D., Lifshic E.M. Mehanika. M., **1973**, 207 s.

[9] Abishev M.E., Toktarbay S., Zhami B.A. On the Stability of Circular Orbits of a Test Body in the Restricted Three-Body Problem in GR Mechanics. Gravitation and cosmology, **2014**, Vol. 20, No.3, P. 149-151.

[10] Abishev M.E., Toktarbaj S., Zhami B.A. Ob ustojchivosti krugovyh orbit probnogo tela v ogranichennoj zadache treh tel v mehanike OTO. Izvestija NAN RK, Ser. fiz.-mat., **2014**, 2(294), S. 11-13.

[11] Abishev Medeu, Toktarbay Saken, Beissen Nurzada, Zhumazhanova Dana. Periodic solutions of the restricted three-body problem in GR mechanics. Fourteenth Marcel Grossmann Meeting, MG14 University of Rome "La Sapienza", Rome, July 12-18, **2015**.

[12] Abishev M., Quevedo H., Toktarbay S., Zhami B. Orbital stability of the restricted three body problem in General Relativity. WSPC Proceedings, October 14, **2015**. arXiv:1510.03703v1.

[13] Abdil'din M.M. Problema dvizhenija tel v obshhej teorii otnositel'nosti. Almaty: Izdatel'vo «Қазақ universiteti», **2006**, 132 s.

[14] Hans C. Ohanian and Remo Ruffini. Gravitation and Spacetime, 3rd edn. Cambridge University Press, **2013**, 530 p.

[15] Abdil'din M.M. Mehanika teorii gravitacii Jejnshtejna. Alma-Ata, **1988**, 198 s.

[16] Abdil'din M.M. Adiabaticheskaja teorija dvizhenija tel v OTO. Dvizhenie tel v reljativistskoj teorii gravitacii; Tezisy dokl. vtorogo vsesojuznogo simpoziuma, Vil'njus-Kaunas, **1986**, S. 6-7.

[17] Abdil'din M.M., Omarov M.S. Adiabaticheskaja teorija dvizhenija tel v OTO. Sovremennye teoreticheskie i jeksperimental'nye problemy teorii otnositel'nosti i gravitacii, Materialy VII Vsesojuznogo konf., Erevan, **1988**, S. 3-4.

[18] Abdil'din M.M., Omarov M.S. Analiz korrektnoj metriki pervogo priblizhenija v metode Foka v OTO. Problemy fiziki zvezd i vnegalakticheskoj astronomii. Almaty, **1993**, S. 170-178.

[19] Abdil'din M.M., Omarov M.S. Ob optimizacii vybora vektornyh jelementov v adiabaticheskoj teorii dvizhenija tel v OTO. Izvestija NAN RK, ser. fiz. -mat., Almaty, **1994**, №4, S. 17-21.

[20] Abishev M.E., Toktarbay S., Ablayeva A.Zh., Talgat A.Z. The stability of periodic motions of the restricted three-body problem. Proceedings of the 3rd International Conference "Astrophysics, Gravity and Cosmology", Astana, **2016**, P.83 – 85.

N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 2, Number 312 (2017), 46 – 53

УДК 530.12:531.51

М.Е. Абишев, С. Токтарбай, А.Ж. Абылаева, А.З. Талхат, Ф.Б. Белисарова

Казахский Национальный Университет им. Аль-Фараби, г. Алматы

УСТОЙЧИВОСТЬ ОРБИТЫ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ПРОБНОГО ТЕЛА В ПОЛЕ ДВУХ МАССИВНЫХ ВРАЩАЮЩИХСЯ ТЕЛ

Аннотация. В работе рассмотрена проблема орбитальной устойчивости кругового движения пробного тела в ограниченной задаче трех тел, все тела, рассматриваемые в задаче, имеют собственное вращение. Положение покоящегося центрального тела совпадает с точкой отсчета координат, второе тело движется по кругу вокруг центрального (первого) тела и не подвергается возмущению. Пробное тело движется по возмущенной круговой орбите. Задача относится к классу квазикеплеровых и рассмотрена на основе адиабатической теории движения тел в механике ОТО. Под названием адиабатическая теория движения тел подразумевается подход, развитый М.М. Абдильдиным для исследования эволюционного движения в механике ОТО. Он основан на использовании векторных элементов для описания движения, на асимптотических методах теории нелинейных колебаний и на методе адиабатических инвариантов.

Мы вывели функции Лагранжа системы тел с точностью до членов второго порядка. С точностью, вполне достаточной для задач релятивистской небесной механики, влиянием внутренней структуры тел можно вообще пренебречь и опустить все члены, связанные с учетом этого влияния. Мы ограничиваемся нулевыми членами разложения по степеням отношений размеров тел к их взаимным расстояниям.

Ключевые слова: Общая теория относительности, вращательное движение, поступательное движение, устойчивость движения, задача трех тел.

Введение

Основной задачей небесной механики является задача о движении системы тел, частными случаями которой являются задачи двух, трех, четырех и т.д. тел, к которым приводятся задачи о движении различных конкретных небесных тел [1,2].

Классический метод исследования движения небесных тел заключается в представлении решения соответствующих уравнений возмущенного движения в виде отрезков рядов. Однако, Анри Пуанкаре показал, что ряды, применяемые для описания движения небесных тел, расходятся. Следовательно, их нельзя использовать для анализа поведения Солнечной системы на бесконечном интервале времени [3]. Согласно по КАМ–теории, если массы планет достаточно малы, эксцентриситеты и наклоны орбит малы, то для большинства начальных условий (исключая резонансные и близкие к ним) движение будет условно-периодическим, эксцентриситеты и наклоны будут оставаться малыми, а большие полуоси будут вечно колебаться вблизи своих первоначальных значений, то есть Солнечная система будет устойчивой по Ляпунову на бесконечном интервале времени. К сожалению, в реальной Солнечной системе резонансы играют очень важную роль. Поэтому, выводы КАМ–теории не могут быть применены к Солнечной системе в целом на всем интервале ее существования [4].

В настоящее время устойчивость солнечной системы в основном рассматривается в рамках классической механики, хотя современной теорией, описывающей движение и взаимодействие солнечной системы является общая теория относительности (ОТО). Поэтому рассмотрение задачи об устойчивости движения в рамках ОТО является весьма актуальной.

Качественные и приближенные методы исследования движения тел в ОТО играют исключительно важную роль, так как даже получить самые точные уравнения движения (кроме как для пробных тел – уравнение геодезических) практически труднодостижимо.

Строгая и корректная постановка задачи устойчивости движения тел в ОТО оказывается сложнее, чем в классической механике. Это объясняется сложностью математического аппарата ОТО и вследствие этого невозможностью получения важных физических следствий теории с помощью точных решений основных и других уравнений ОТО.

Следует также заметить, что в классической механике обычно известны точные дифференциальные уравнения, описывающие исследуемый класс движений. В ОТО, как сказано выше, точные уравнения движения известны только для пробных тел. В случае тел сравнимых масс строгая формулировка задачи устойчивости движения пока на ясна, так как в этом случае неизвестны точные уравнения движения. Они выведены только в некотором приближении. Более того, большинство задач, рассматриваемых в механике ОТО, являются квазикеплеровыми из-за малости релятивистских возмущений по сравнению с ньютоновой силой. Это обстоятельство позволяет поиск особых, оптимальных, простых методов изучения задач и других вопросов проблемы движения тел в ОТО [5-8].

В работах [9-12] исследована орбитальная устойчивость кругового движения пробного тела в ограниченной задаче трех тел в ОТО, когда все тела не имеют собственного вращения. Возмущения от движущегося по круговой орбите второго тела в области движения пробного тела (в плоскости движения второго тела) порядка релятивистских поправок движению пробного тела от центрального тела

$$U_1 << c^2, U_2 << U_1 \tag{1}$$

где U_1, U_2 – потенциалы центрального и второго тела соответственно. Положение покоящегося центрального тела совпадает с точкой отсчета координат, второе тело движется по кругу вокруг центрального (первого) тела и не подвергается возмущению. Пробное тело движется по возмущенной круговой орбите. Задача относится к классу квазикеплеровых и рассмотрена на основе адиабатической теории движения тел в механике ОТО. Под названием адиабатическая теория движения тел подразумевается подход, развитый М.М. Абдильдиным для исследования эволюционного движения в механике ОТО. Он основан на использовании векторных элементов для описания движения, на асимптотических методах теории нелинейных колебаний и на методе адиабатических инвариантов [13-19]. В результате [9] показано, что движение пробного тела в плоскости орбиты второго тела является устойчивым.

Методы исследования

В настоящей работе рассмотрим проблему орбитальной устойчивости кругового движения пробного тела в ограниченной задаче трех тел, когда все тела имеют собственное вращение. Мы вывели функции Лагранжа системы тел с точностью до членов второго порядка. С точностью, вполне достаточной для задач релятивистской небесной механики, влиянием внутренней структуры тел можно вообще пренебречь и опустить все члены, связанные с учетом этого влияния. Мы ограничиваемся нулевыми членами разложения по степеням отношений размеров тел к их взаимным расстояниям.

Функция Лагранжа поступательного и вращательного движения для трех вращающихся тел можно представить в виде:

$$L = L^{(0)} + L^{(*)}. \tag{2}$$

где $L^{(0)}$ – функция Лагранжа для трех точечных масс, а второй член $L^{(*)}$ отвечает за поправки, содержащие вращательные члены.

Гамильтониан задачи можно представить как

$$H = H^{(0)} + H^{(*)} \tag{3}$$

где $H^{(0)}$ – Гамильтониан для трех точечных масс, а второй член $H^{(*)}$ отвечает за поправки, содержащие вращательные члены.

Запишем уравнения движения рассматриваемой задачи в представлении векторных элементов $\vec{M}$ и $\vec{A}$, что удобно для применения асимптотических методов нелинейной механики, поскольку, в этом случае, в уравнениях движения налицо разделение переменных на быстрые и медленные. Последнее обстоятельство как раз и является характерной особенностью тех задач, для анализа которых применяются асимптотические методы исследования.

$\vec{M}$ и $\vec{A}$ – векторные элементы орбиты (момент импульса и вектор Лапласа) и равны:

$$\vec{M} = \left[\vec{r}, \vec{p}\right], \tag{4}$$

$$\vec{A} = \left[\frac{\vec{p}}{m}, \vec{M}\right] - \gamma \frac{mm_0}{r}\vec{r}, \tag{5}$$

где

$$A = \gamma mm_0 e = \alpha e,$$

где e – эксцентриситет орбиты.

Итак, следуя методике, получим производные

$$\dot{M}_i = \left[\dot{\vec{r}}_i, \vec{p}_i\right] + \left[\vec{r}_i, \dot{\vec{p}}_i\right], \tag{6}$$

где

$$\dot{\vec{r}}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{\partial H_0}{\partial p_i} + \frac{\partial H^*}{\partial p_i} = \dot{\vec{r}}_i^{(0)} + \dot{\vec{r}}_i^{(*)}; \ \dot{\vec{p}}_i = -\frac{\partial H}{\partial r_i} = -\frac{\partial H_0}{\partial r_i} - \frac{\partial H^*}{\partial r_i} = \dot{\vec{p}}_i^{(0)} + \dot{\vec{p}}_i^{(*)}; \tag{7}$$

также мы можем написать уравнение (6) в следующем виде:

$$\dot{M} = \dot{M}^{(0)} + \dot{M}^{(*)} \tag{8}$$

где $\dot{M}^{(0)}$ – изменение момента для трех точечных масс, а $\dot{M}^{(*)}$ изменение момента за счет вращения тела.

Для получения уравнения эволюционного движения нужно проинтегрировать уравнение (8) по периоду повторения конфигураций системы Т (синодическому периоду пробного тела):

$$\bar{\dot{M}} = \frac{1}{T}\int_0^T \left(\bar{\dot{M}}^{(0)} + \bar{\dot{M}}^{(*)}\right)dt. \tag{9}$$

где

$$T = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_3}. \tag{10}$$

Первая компонента в правой части уравнения (9) описывает среднее изменение орбитального момента для трех точечных масс. В работе [9] показано, что эта величина равна нулю. Таким образом, в этом случае движение пробного тела в плоскости орбиты является устойчивым.

Рассмотрим теперь случай, когда все тела имеют собственное вращение. В уравнении (2) $L^{(*)}$, содержащие вращательные члены, принимает вид [20]

$$L^* = \sum_{i=1}^{3}\omega_i^2 I_i + \frac{1}{c^2}\left[\sum_{i=1}^{3}\omega_i^2 I_i - \frac{1}{2}\left(I_2\left(\vec{\omega}_2\cdot\dot{\vec{r}}_2\right)^2 + I_3\left(\vec{\omega}_3\cdot\dot{\vec{r}}_3\right)^2\right)\right]$$

$$-\frac{\gamma}{c^2}\cdot\left\{\frac{1}{\left|\vec{r}_2\right|^3}\left(\vec{r}_2\cdot\dot{\vec{r}}_2\right)\cdot\left[3m_1I_2.\omega_2+4m_2I_1.\omega_1\right]-\frac{1}{\left|\vec{r}_3\right|^3}\left(\vec{r}_3\cdot\dot{\vec{r}}_3\right)\cdot\left[3m_1I_3.\omega_3+4m_3I_1.\omega_1\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{\vec{r}_2-\vec{r}_3}{\left|\vec{r}_2-\vec{r}_3\right|^3}\cdot\left[\left(3\dot{\vec{r}}_3-4\dot{\vec{r}}_2\right)\cdot m_2I_3.\omega_3-\left(3\dot{\vec{r}}_2-4\dot{\vec{r}}_3\right)\cdot m_3I_2.\omega_2\right]\right\}+\frac{\gamma}{2c^2}\cdot\frac{m_2I_2+m_3I_3}{\left|\vec{r}_2-\vec{r}_3\right|^3}\cdot$$

$$\cdot\left[-\dot{\vec{r}}_2\cdot\dot{\vec{r}}_3+3\frac{\left(\left(\vec{r}_2-\vec{r}_3\right)\cdot\dot{\vec{r}}_2\right)\cdot\left(\left(\vec{r}_2-\vec{r}_3\right)\cdot\dot{\vec{r}}_3\right)}{\left|\vec{r}_2-\vec{r}_3\right|^2}\right]-\frac{3\gamma}{c^2}\left[\frac{1}{\left|\vec{r}_2\right|}\cdot\left(m_1\omega_2^2I_2+m_2\omega_1^2I_1\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\left|\vec{r}_3\right|}\left(m_1\omega_3^2I_3+m_3\omega_1^2I_1\right)+\frac{1}{\left|\vec{r}_2-\vec{r}_3\right|}\left(m_2\omega_3^2I_3+m_3\omega_2^2I_2\right)\right]+$$

$$+\frac{\gamma^2}{2c^2}\left\{\frac{m_1I_2+m_2I_1}{\left|\vec{r}_2\right|^3}+\frac{m_1I_3+m_3I_1}{\left|\vec{r}_3\right|^3}+\frac{m_2I_3+m_3I_2}{\left|\vec{r}_2-\vec{r}_3\right|^3}+\right.$$

$$\left.+m_1m_2I_3\cdot\frac{\vec{r}_3\cdot\left(\vec{r}_3-\vec{r}_2\right)}{\left|\vec{r}_3\right|^3\left|\vec{r}_2-\vec{r}_3\right|^3}+m_2m_3I_1\cdot\frac{\vec{r}_2\cdot\vec{r}_3}{\left|\vec{r}_2\right|^3\cdot\left|\vec{r}_3\right|^3}+m_1m_3I_2\cdot\frac{\left(\vec{r}_2-\vec{r}_3\right)\cdot\vec{r}_2}{\left|\vec{r}_2-\vec{r}_3\right|^3\left|\vec{r}_2\right|^3}\right\}-$$

$$-\frac{\gamma}{c^2}\left\{4\left[\frac{I_1I_2}{\left|\vec{r}_2\right|^3}+\frac{I_1I_3}{\left|\vec{r}_3\right|^3}+\frac{I_2I_3}{\left|\vec{r}_2-\vec{r}_3\right|^3}\right]-3\left[\frac{\left(\vec{r}_2\cdot\vec{\omega}_1\right)\cdot\left(\vec{r}_2\cdot\vec{\omega}_2\right)}{\left|\vec{r}_2\right|^3}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\left(\vec{r}_3\cdot\vec{\omega}_1\right)\cdot\left(\vec{r}_3\cdot\vec{\omega}_3\right)}{\left|\vec{r}_3\right|^3}+\frac{\left(\left(\vec{r}_2-\vec{r}_3\right)\cdot\vec{\omega}_2\right)\cdot\left(\left(\vec{r}_2-\vec{r}_3\right)\cdot\vec{\omega}_3\right)}{\left|\vec{r}_2-\vec{r}_3\right|^3}\right]\right\}. \qquad (11)$$

Что касается гамильтониана $H^{(*)}$, то эта величина определяется соотношением:

$$H^*=\vec{v}_i\frac{\partial L^*}{\partial\vec{v}_i}-L^*; \qquad (12)$$

Тогда получим следующее выражение:

$$H^{(*)}=-\left(\vec{\omega}_1^2I_1+\vec{\omega}_2^2I_2+\vec{\omega}_3^2I_3\right)-\frac{1}{c^2}\left[I_1\vec{\omega}_1^2+I_2\vec{\omega}_2^2+I_3\vec{\omega}_3^2-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\left(I_1\left(\vec{\omega}_1\cdot\vec{p}_1\right)^2+I_2\left(\vec{\omega}_2\cdot\vec{p}_2\right)^2-I_3\left(\vec{\omega}_3\cdot\vec{p}_3\right)^2\right)\right]-$$

$$-\frac{\gamma}{2c^2}\cdot\frac{m_2I_2+m_3I_3}{\left|\vec{r}_2-\vec{r}_3\right|^3}\cdot\left[-\vec{p}_2\cdot\vec{p}_3+3\frac{\left(\left(\vec{r}_2-\vec{r}_3\right)\cdot\vec{p}_2\right)\cdot\left(\left(\vec{r}_2-\vec{r}_3\right)\cdot\vec{p}_3\right)}{\left|\vec{r}_2-\vec{r}_3\right|^2}\right]$$

$$+\frac{3\gamma}{c^2}\left[\frac{1}{|\vec r_2|}\cdot\left(m_1\omega_2^2 I_2+m_2\omega_1^2 I_1\right)+\frac{1}{|\vec r_3|}\left(m_1\omega_3^2 I_3+m_3\omega_1^2 I_1\right)+\frac{1}{|\vec r_2-\vec r_3|}\left(m_2\omega_3^2 I_3+m_3\omega_2^2 I_2\right)\right]-$$

$$-\frac{\gamma^2}{2c^2}\left\{\frac{m_1I_2+m_2I_1}{|\vec r_2|^3}+\frac{m_1I_3+m_3I_1}{|\vec r_3|^3}+\frac{m_2I_3+m_3I_2}{|\vec r_2-\vec r_3|^3}+\right.$$

$$\left.+m_1m_2I_3\cdot\frac{\vec r_3\cdot(\vec r_3-\vec r_2)}{|\vec r_3|^3|\vec r_2-\vec r_3|^3}+m_2m_3I_1\cdot\frac{\vec r_2\cdot\vec r_3}{|\vec r_2|^3\cdot|\vec r_3|^3}+m_1m_3I_2\cdot\frac{(\vec r_2-\vec r_3)\cdot\vec r_2}{|\vec r_2-\vec r_3|^3|\vec r_2|^3}\right\}+$$

$$+\frac{\gamma}{c^2}\left\{4\left[\frac{I_1I_2}{|\vec r_2|^3}+\frac{I_1I_3}{|\vec r_3|^3}+\frac{I_2I_3}{|\vec r_2-\vec r_3|^3}\right]-3\left[\frac{(\vec r_2\cdot\vec\omega_1)\cdot(\vec r_2\cdot\vec\omega_2)}{|\vec r_2|^3}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{(\vec r_3\cdot\vec\omega_1)\cdot(\vec r_3\cdot\vec\omega_3)}{|\vec r_3|^3}+\frac{\left((\vec r_2-\vec r_3)\cdot\vec\omega_2\right)\cdot\left((\vec r_2-\vec r_3)\cdot\vec\omega_3\right)}{|\vec r_2-\vec r_3|^3}\right]\right\}. \qquad (13)$$

где I_i – момент инерции, $\vec\omega_i$ – орбитальная угловая скорость. имея в виду (7), производные

$$\dot{\vec r}_3^{(*)}=\frac{1}{c^2}I_3\left(\vec\omega_3\cdot\vec p_3\right)\vec\omega_3-\frac{\gamma}{2c^2}\cdot\frac{m_2I_2+m_3I_3}{|\vec r_2-\vec r_3|^3}\cdot\left[-\vec p_2+3\frac{\left((\vec r_2-\vec r_3)\cdot\vec p_2\right)\cdot(\vec r_2-\vec r_3)}{|\vec r_2-\vec r_3|^2}\right]. \qquad (14)$$

$$\dot{\vec p}_3^{(*)}=\left\{-\frac{3\gamma}{2c^2}\left(m_2I_2+m_3I_3\right)\frac{\vec p_2\vec p_3}{|\vec r_2-\vec r_3|^5}+\frac{15\gamma}{2c^2}\frac{\left((\vec r_2-\vec r_3)\vec p_2\right)\cdot\left((\vec r_2-\vec r_3)\vec p_3\right)}{|\vec r_2-\vec r_3|^7}-\right.$$

$$-\frac{3\gamma}{c^2}\frac{1}{|\vec r_2-\vec r_3|^3}\left(m_2\vec\omega_3^2I_3+m_3\vec\omega_2^2I_2\right)+\frac{3\gamma^2}{2c^2}\frac{(m_2I_3+m_3I_2)}{|\vec r_2-\vec r_3|^5}+$$

$$+\frac{\gamma^2}{2c^2}m_1m_2I_3\frac{1}{|\vec r_3|^3|\vec r_2-\vec r_3|^3}-\frac{3\gamma^2}{2c^2}m_1m_2I_3\frac{\left(\vec r_3(\vec r_2-\vec r_3)\right)}{|\vec r_3|^3|\vec r_2-\vec r_3|^3}-\frac{\gamma^2}{2c^2}m_2m_3I_1\frac{1}{|\vec r_2|^3|\vec r_3|^3}+$$

$$\left.-\frac{9\left((\vec r_2-\vec r_3)\vec\omega_2\right)\left((\vec r_2-\vec r_3)\vec\omega_3\right)}{|\vec r_2-\vec r_3|^5}\right\}\vec r_2+\left[\vec r_3,\left\{-\frac{9\gamma}{2c^2}\left(m_2I_2+m_3I_3\right)\frac{\vec p_2\vec p_3}{|\vec r_2-\vec r_3|^5}-\right.\right.$$

$$-\frac{15\gamma}{2c^2}\frac{\left((\vec r_2-\vec r_3)\vec p_2\right)\cdot\left((\vec r_2-\vec r_3)\vec p_3\right)}{|\vec r_2-\vec r_3|^7}+\frac{3\gamma}{c^2}\frac{1}{|\vec r_3|^3}\left(m_1\vec\omega_3^2I_3+m_3\vec\omega_1^2I_1\right)+$$

$$+\frac{3\gamma}{c^2}\frac{1}{|\vec r_2-\vec r_3|^3}\left(m_2\vec\omega_3^2I_3+m_3\vec\omega_2^2I_2\right)-\frac{3\gamma^2}{2c^2}\frac{(m_1I_3+m_3I_1)}{|\vec r_3|^5}-\frac{3\gamma^2}{2c^2}\frac{(m_2I_3+m_3I_2)}{|\vec r_2-\vec r_3|^5}-$$

$$-\frac{\gamma^2}{c^2}m_1m_2I_3\frac{1}{|\vec r_3|^3|\vec r_2-\vec r_3|^3}-\frac{3\gamma^2}{2c^2}m_1m_2I_3\frac{\left(\vec r_3(\vec r_2-\vec r_3)\right)}{|\vec r_3|^5|\vec r_2-\vec r_3|^3}-\frac{3\gamma^2}{2c^2}m_1m_2I_3\frac{\left(\vec r_3(\vec r_2-\vec r_3)\right)}{|\vec r_3|^3|\vec r_2-\vec r_3|^3}+$$

$$+\frac{3\gamma^2}{2c^2}m_2m_3I_1\frac{(\vec{r}_2\vec{r}_3)}{|\vec{r}_2|^3|\vec{r}_3|^5}+\frac{3\gamma^2}{2c^2}m_1m_3I_2\frac{((\vec{r}_2-\vec{r}_3)\vec{r}_2)}{|\vec{r}_2-\vec{r}_3|^5|\vec{r}_2|^3}+\frac{12\gamma}{c^2}\frac{I_1I_3}{|\vec{r}_3|^5}+\frac{12\gamma}{c^2}\frac{I_2I_3}{|\vec{r}_2-\vec{r}_3|^5}+$$

$$+\frac{\gamma}{c^2}\frac{9((\vec{r}_2-\vec{r}_3)\vec{\omega}_2)((\vec{r}_2-\vec{r}_3)\vec{\omega}_3)\vec{r}_3}{|\vec{r}_2-\vec{r}_3|^5}\Bigg\}\vec{r}_3\Bigg]+\Bigg[\vec{r}_3,\frac{\gamma}{c^2}\Bigg\{\frac{9(\vec{r}_3\vec{\omega}_2)(\vec{r}_3\vec{\omega}_3)}{|\vec{r}_2-\vec{r}_3|^3}\vec{r}_3-\frac{3(\vec{r}_3\vec{\omega}_3)}{|\vec{r}_3|^3}\vec{\omega}_1+\frac{3(\vec{r}_3\omega_1)}{|\vec{r}_3|^3}\vec{\omega}_3+$$

$$+\frac{3((\vec{r}_2-\vec{r}_3)\vec{\omega}_3)}{|\vec{r}_2-\vec{r}_3|^3}\vec{\omega}_2+\frac{3((\vec{r}_2-\vec{r}_3)\vec{\omega}_2)}{|\vec{r}_2-\vec{r}_3|^3}\vec{\omega}_3\Bigg\}\Bigg]. \quad (15)$$

Результаты исследования

Здесь мы интегрируем уравнение вращательного движения пробного тела, имеющего собственное вращение, в поле вращающихся массивных двух тел. Напишем изменение момента вращательного компонента уравнения (8):

$$\dot{M}^{(*)}=\left[\dot{\vec{r}}^{(*)},\vec{p}\right]+\left[\vec{r},\dot{\vec{p}}^{(*)}\right]. \quad (16)$$

Рассмотрим случай, когда угловая скорость $\vec{\omega}_i$ $(i=2,3)$ вращающегося тела перпендикулярна к её орбитальной плоскости: т.е.,:

$$\vec{\omega}_i=\vec{k}\vec{\omega}_z^{(i)}(i=2,3), \quad (17)$$

$$\vec{r}_i=\vec{i}x^{(i)}+\vec{j}y^{(i)},\ (i=2,3) \quad (18)$$

и

$$\vec{p}_i=\vec{i}p^{(i)}{}_x+\vec{j}p^{(i)}{}_y,\ (i=2,3), \quad (19)$$

Тогда с учетом (14) и (15) уравнение для искомой векторной функции принимает вид:

$$\dot{M}^{(*)}=-\frac{\gamma}{2c^2}\cdot\frac{m_2I_2+m_3I_3}{|\vec{r}_2-\vec{r}_3|^3}\cdot\left\{[-\vec{p}_2,\vec{p}_3]+3\frac{((\vec{r}_2-\vec{r}_3)\cdot\vec{p}_2)}{|\vec{r}_2-\vec{r}_3|^2}[(\vec{r}_2-\vec{r}_3),\vec{p}_3]\right\}+$$

$$+\Bigg\{-\frac{3\gamma}{2c^2}(m_2I_2+m_3I_3)\frac{\vec{p}_2\vec{p}_3}{|\vec{r}_2-\vec{r}_3|^5}+\frac{15\gamma}{2c^2}\frac{((\vec{r}_2-\vec{r}_3)\vec{p}_2)\cdot((\vec{r}_2-\vec{r}_3)\vec{p}_3)}{|\vec{r}_2-\vec{r}_3|^7}-$$

$$-\frac{3\gamma}{c^2}\frac{1}{|\vec{r}_2-\vec{r}_3|^3}(m_2\vec{\omega}_3^2I_3+m_3\vec{\omega}_2^2I_2)+\frac{3\gamma^2}{2c^2}\frac{(m_2I_3+m_3I_2)}{|\vec{r}_2-\vec{r}_3|^5}+$$

$$+\frac{\gamma^2}{2c^2}m_1m_2I_3\frac{1}{|\vec{r}_3|^3|\vec{r}_2-\vec{r}_3|^3}-\frac{3\gamma^2}{2c^2}m_1m_2I_3\frac{(\vec{r}_3(\vec{r}_2-\vec{r}_3))}{|\vec{r}_3|^3|\vec{r}_2-\vec{r}_3|^3}-\frac{\gamma^2}{2c^2}m_2m_3I_1\frac{1}{|\vec{r}_2|^3|\vec{r}_3|^3}+$$

$$-\frac{\gamma}{c^2}\frac{9((\vec{r}_2-\vec{r}_3)\vec{\omega}_2)((\vec{r}_2-\vec{r}_3)\omega_3)}{|\vec{r}_2-\vec{r}_3|^5}\Bigg\}[\vec{r}_3,\vec{r}_2]. \quad (20)$$

Подставляя радиус-вектор пробного тела

$$\vec{r}_3 = r_{kep}\left(\vec{i}\cos\omega_3 t + \vec{j}\sin\omega_3 t\right), \qquad (21)$$

и второго тела

$$\vec{r}_2 = r_2\left(\vec{i}\cos\omega_2 t + \vec{j}\sin\omega_2 t\right), \qquad (22)$$

а также импульсы как производные от них умноженные на соответствующие массы, и проинтегрировав по периоду Т (10).

Вычислив (20), в результате получим:

$$\bar{\dot{\vec{M}}}^{(*)} = \frac{1}{T}\int_0^T \dot{M}^{(*)}dt = 0. \qquad (23)$$

Выводы

Имея в виду (23), можно отметить, что в данном случае сумма векторов орбитальных моментов тел сохраняется. Действительно, из сохранения вектора $\bar{\dot{\vec{M}}}^{(*)}$ следует, что круговое движение вращающегося пробного тела в поле массивных вращающихся двух тел, при условии $\vec{\omega}_i = \vec{k}\omega^{(i)}{}_z (i = 2,3)$ является устойчивым.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука, 1968, 799 с.

[2] Себехей В. Теория орбит: ограниченная задача трех тел. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1982, 655 с.

[3] А. Пуанкаре. Избранные труды в 3-х томах, Небесная механика. М.: Наука, т. 1,1971.

[4] Козлов В.В. Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике . УМН,1983, т. 38, № 1, С. 3-67.

[5] Абдильдин М.М. Механика теории гравитации Эйнштейна. Алма-Ата, 1988, 198 с.

[6] Брумберг В.А. Релятивистская небесная механика. М., 1972, 382 с.

[7] Абдильдин М.М. О метрике вращающегося жидкого шара. Вопросы теории поля. Алма-Ата, 1985, С. 20-25.

[8] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. М., 1973, 207 с.

[9] Abishev M.E., Toktarbay S., Zhami B.A. On the Stability of Circular Orbits of a Test Body in the Restricted Three-Body Problem in GR Mechanics. Gravitation and cosmology, 2014, Vol. 20, No.3, P. 149-151.

[10] Абишев М.Е., Токтарбай С., Жами Б.А. Об устойчивости круговых орбит пробного тела в ограниченной задаче трех тел в механике ОТО. Известия НАН РК, Сер. физ.-мат., 2014, 2(294), С. 11-13.

[11] Abishev Medeu, Toktarbay Saken, Beissen Nurzada, Zhumazhanova Dana. Periodic solutions of the restricted three-body problem in GR mechanics. Fourteenth Marcel Grossmann Meeting, MG14 University of Rome "La Sapienza", Rome, July 12-18, 2015.

[12] Abishev M., Quevedo H., Toktarbay S., Zhami B. Orbital stability of the restricted three body problem in General Relativity. WSPC Proceedings, October 14, 2015. arXiv:1510.03703v1.

[13] Абдильдин М.М. Проблема движения тел в общей теории относительности. Алматы: Издательво «Қазақ университеті», 2006, 132 с.

[14] Hans C. Ohanian and Remo Ruffini. Gravitation and Spacetime, 3rd edn. Cambridge University Press, 2013, 530 p.

[15] Абдильдин М.М. Механика теории гравитации Эйнштейна. Алма-Ата, 1988, 198 с.

[16] Абдильдин М.М. Адиабатическая теория движения тел в ОТО. Движение тел в релятивистской теории гравитации; Тезисы докл. второго всесоюзного симпозиума, Вильнюс-Каунас, 1986, С. 6-7.

[17] Абдильдин М.М., Омаров М.С. Адиабатическая теория движения тел в ОТО. Современные теоретические и экспериментальные проблемы теории относительности и гравитации, Материалы VII Всесоюзного конф., Ереван, 1988, С. 3-4.

[18] Абдильдин М.М., Омаров М.С. Анализ корректной метрики первого приближения в методе Фока в ОТО. Проблемы физики звезд и внегалактической астрономии. Алматы, 1993, С. 170-178.

[19] Абдильдин М.М., Омаров М.С. Об оптимизации выбора векторных элементов в адиабатической теории движения тел в ОТО. Известия НАН РК, сер. физ. -мат., Алматы, 1994, №4, С. 17-21.

[20] Abishev M.E., Toktarbay S., Ablayeva A.Zh., Talgat A.Z. The stability of periodic motions of the restricted three-body problem. Proceedings of the 3rd International Conference "Astrophysics, Gravity and Cosmology", Astana, 2016, P.83 – 85.

М.Е. Абишев, С. Токтарбай, А.Ж. Абылаева, А.З. Талхат, Ф.Б. Белисарова

Әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық Университеті, Алматы қ.

ЕКІ МАССИВТІ АЙНАЛМАЛЫ ДЕНЕ ӨРІСІНДЕГІ АЙНАЛМАЛЫ СЫНАҚ ДЕНЕ ОРБИТАСЫНЫҢ ОРНЫҚТЫЛЫҒЫ

Аннотация. Бұл жұмыста шектелген үш дене есебіндегі шеңбер бойымен қозғалыстағы сынақ дене орбитасының орнықтылық мәселесі қарастырылды, есепте қарастырылған барлық денелердің өздік айналуы бар.

Орталық дененің орны координаттың бас нүктесіне сәйкес келеді, екінші дене ешқандай ұйытқусыз дөңгелек орбитамен орталық денені айналады. Сынақ денесі ұйытқыған дөңгелек орбитамен қозғалады. Есеп квазикеплерлік классқа жатады, сондай-ақ Жалпы салыстырмалық теория (ЖСТ) механикасындағы қозғалыстың адиабаттық теориясы негізінде қарастырылған. Қозғалыстың адиабаталық теориясы – ЖСТ-да эволюциялық қозғалысты зерттеу үшін М.М. Абдильдин жасаған әдіс болып табылады. Бұл әдіс сызықтық емес тербеліс теориясының асимптоталық әдістері мен адиабаталық инвариант әдісі бойынша қозғалысты сипаттау үшін векторлық элементтерді қолдануға негізделген.

Біз жүйенің Лагранж функциясын екінші ретті жуықтауға дейін енгіздік. Бұл жуықтау релятивистік аспан механикасындағы проблемалар үшін жеткілікті, дененің ішкі құрылымының әсерін және онымен байланысты барлық шарттарды елемеуге болады. Біз денелердің өлшемінің олардың қашықтықтарына қатынасының дәрежесі бойынша жіктеудің нөлінші жуықтаудағы мүшелерімен ғана шектелеміз.

Тірек сөздер: Жалпы салыстырмалық теориясы, айналмалы қозғалыс, ілгерлемелі қозғалыс, қозғалыстың орнықтылығы, үш дене есебі.

Сведения об авторах:

Абишев медеу ержанович - член корр. НАН РК, д.ф.-м.н., профессор кафедры теоретической и ядерной физики КазНУ им. аль-Фараби.

Служебный адрес: Алматы, пр. аль-Фараби, физико-технический факультет КазНУ им. аль-Фараби, тел. 8(727) 377-34-14, e-mail: medeu.*abishev@kaznu.kz;* Домашний адрес: Алматы, Алмалинский район, 6-линия, д. 3/1, кв.28.

Токтарбай сакен - старший преподаватель кафедры теоретической и ядерной физики КазНУ им. аль-Фараби.

Служебный адрес: Алматы, пр. аль-Фараби, физико-технический факультет КазНУ им. аль-Фараби, тел. 8(727) 377-34-14б e-mail: saken.yan@yandex.com*;* Домашний адрес: Алматы, аль-Фараби 71, общ. №10.

Абылаева айгерим жомартовна - магистрант первого курса кафедры теоретической и ядерной физики КазНУ им. аль-Фараби, e-mail: abylayeva.aigerim@gmail.com; Домашний адрес: Алматы, 11 мкр-н, дом 9, кв.38

Талхат аманхан закиділлаұлы - магистрант первого курса кафедры теоретической и ядерной физики КазНУ им. аль-Фарабиб e-mail: aman_xan.95@mail.ru; Домашний адрес: Алматы, аль-Фараби 71, общ. №2.

МАЗМҰНЫ

Ғалымды еске алу

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

Publication Ethics and Publication Malpractice in the journals of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan

For information on Ethics in publishing and Ethical guidelines for journal publication see http://www.elsevier.com/publishingethics and http://www.elsevier.com/journal-authors/ethics.

Submission of an article to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan implies that the described work has not been published previously (except in the form of an abstract or as part of a published lecture or academic thesis or as an electronic preprint, see http://www.elsevier.com/postingpolicy), that it is not under consideration for publication elsewhere, that its publication is approved by all authors and tacitly or explicitly by the responsible authorities where the work was carried out, and that, if accepted, it will not be published elsewhere in the same form, in English or in any other language, including electronically without the written consent of the copyright-holder. In particular, translations into English of papers already published in another language are not accepted.

No other forms of scientific misconduct are allowed, such as plagiarism, falsification, fraudulent data, incorrect interpretation of other works, incorrect citations, etc. The National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan follows the Code of Conduct of the Committee on Publication Ethics (COPE), and follows the COPE Flowcharts for Resolving Cases of Suspected Misconduct (http://publicationethics.org/files/u2/New_Code.pdf). To verify originality, your article may be checked by the Cross Check originality detection service http://www.elsevier.com/editors/plagdetect.

The authors are obliged to participate in peer review process and be ready to provide corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. All authors of a paper should have significantly contributed to the research.

The reviewers should provide objective judgments and should point out relevant published works which are not yet cited. Reviewed articles should be treated confidentially. The reviewers will be chosen in such a way that there is no conflict of interests with respect to the research, the authors and/or the research funders.

The editors have complete responsibility and authority to reject or accept a paper, and they will only accept a paper when reasonably certain. They will preserve anonymity of reviewers and promote publication of corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. The acceptance of a paper automatically implies the copyright transfer to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.

The Editorial Board of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan will monitor and safeguard publishing ethics.

Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайтах:

www:nauka-nanrk.kz

http://www.physics-mathematics.kz

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Редакторы *М. С. Ахметова, Д.С. Аленов, Т.А. Апендиев*
Верстка на компьютере *А.М. Кульгинбаевой*

Подписано в печать 10.04.2017.
Формат 60х881/8. Бумага офсетная. Печать – ризограф.
11,4 п.л. Тираж 300. Заказ 2.

Национальная академия наук РК
050010, Алматы, ул. Шевченко, 28, т. 272-13-18, 272-13-19