

ISSN 2518-1726 (Online),  
ISSN 1991-346X (Print)

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ  
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ

# Х А Б А Р Л А Р Ы

---

---

## ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК  
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES  
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА  
СЕРИЯСЫ**



**СЕРИЯ**

**ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ**



**PHYSICO-MATHEMATICAL  
SERIES**

**2 (312)**

**НАУРЫЗ – СӘУІР 2017 Ж.**

**МАРТ – АПРЕЛЬ 2017 г.**

**MARCH – APRIL 2017**

1963 ЖЫЛДЫҢ ҚАҢТАР АЙЫНАН ШЫҒА БАСТАҒАН  
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1963 ГОДА  
PUBLISHED SINCE JANUARY 1963

ЖЫЛЫНА 6 РЕТ ШЫҒАДЫ  
ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД  
PUBLISHED 6 TIMES A YEAR

АЛМАТЫ, ҚР ҰҒА  
АЛМАТЫ, НАН РК  
ALMATY, NAS RK

Б а с р е д а к т о р ы  
ф.-м.ғ.д., проф., ҚР ҰҒА академигі **Ғ.М. Мұтанов**

Р е д а к ц и я а л қ а с ы:

**Жұмаділдаев А.С.** проф., академик (Қазақстан)  
**Кальменов Т.Ш.** проф., академик (Қазақстан)  
**Жантаев Ж.Ш.** проф., корр.-мүшесі (Қазақстан)  
**Өмірбаев У.У.** проф. корр.-мүшесі (Қазақстан)  
**Жүсіпов М.А.** проф. (Қазақстан)  
**Жұмабаев Д.С.** проф. (Қазақстан)  
**Асанова А.Т.** проф. (Қазақстан)  
**Бошқаев К.А.** PhD докторы (Қазақстан)  
**Сұраған Д.** PhD докторы (Қазақстан)  
**Quevedo Hernando** проф. (Мексика),  
**Джунушалиев В.Д.** проф. (Қырғыстан)  
**Вишневский И.Н.** проф., академик (Украина)  
**Ковалев А.М.** проф., академик (Украина)  
**Михалевич А.А.** проф., академик (Белорус)  
**Пашаев А.** проф., академик (Әзірбайжан)  
**Такибаев Н.Ж.** проф., академик (Қазақстан), бас ред. орынбасары  
**Тигиняну И.** проф., академик (Молдова)

«ҚР ҰҒА Хабарлары. Физика-математикалық сериясы».

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Меншіктенуші: «Қазақстан Республикасының Ұлттық ғылым академиясы» РҚБ (Алматы қ.)  
Қазақстан республикасының Мәдениет пен ақпарат министрлігінің Ақпарат және мұрағат комитетінде  
01.06.2006 ж. берілген №5543-Ж мерзімдік басылым тіркеуіне қойылу туралы куәлік

Мерзімділігі: жылына 6 рет.  
Тиражы: 300 дана.

Редакцияның мекенжайы: 050010, Алматы қ., Шевченко көш., 28, 219 бөл., 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,  
[www.nauka-nanrk.kz](http://www.nauka-nanrk.kz) / [physics-mathematics.kz](http://physics-mathematics.kz)

---

© Қазақстан Республикасының Ұлттық ғылым академиясы, 2017

Типографияның мекенжайы: «Аруна» ЖК, Алматы қ., Муратбаева көш., 75.

Главный редактор  
д.ф.-м.н., проф. академик НАН РК **Г.М. Мутанов**

Редакционная коллегия:

**Джумадильдаев А.С.** проф., академик (Казахстан)  
**Кальменов Т.Ш.** проф., академик (Казахстан)  
**Жантаев Ж.Ш.** проф., чл.-корр. (Казахстан)  
**Умирбаев У.У.** проф. чл.-корр. (Казахстан)  
**Жусупов М.А.** проф. (Казахстан)  
**Джумабаев Д.С.** проф. (Казахстан)  
**Асанова А.Т.** проф. (Казахстан)  
**Бошкаев К.А.** доктор PhD (Казахстан)  
**Сураган Д.** доктор PhD (Казахстан)  
**Quevedo Hernando** проф. (Мексика),  
**Джунушалиев В.Д.** проф. (Кыргызстан)  
**Вишневский И.Н.** проф., академик (Украина)  
**Ковалев А.М.** проф., академик (Украина)  
**Михалевич А.А.** проф., академик (Беларусь)  
**Пашаев А.** проф., академик (Азербайджан)  
**Такибаев Н.Ж.** проф., академик (Казахстан), зам. гл. ред.  
**Тигиняну И.** проф., академик (Молдова)

«Известия НАН РК. Серия физико-математическая».

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы)

Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации и архивов  
Министерства культуры и информации Республики Казахстан №5543-Ж, выданное 01.06.2006 г.

Периодичность: 6 раз в год.

Тираж: 300 экземпляров.

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, ком. 219, 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,  
[www.nauka-nanrk.kz](http://www.nauka-nanrk.kz) / [physics-mathematics.kz](http://physics-mathematics.kz)

---

© Национальная академия наук Республики Казахстан, 2017

Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75.

E d i t o r i n c h i e f  
doctor of physics and mathematics, professor, academician of NAS RK **G.M. Mutanov**

E d i t o r i a l b o a r d:

**Dzhumadildayev A.S.** prof., academician (Kazakhstan)  
**Kalmenov T.Sh.** prof., academician (Kazakhstan)  
**Zhantayev Zh.Sh.** prof., corr. member. (Kazakhstan)  
**Umirbayev U.U.** prof. corr. member. (Kazakhstan)  
**Zhusupov M.A.** prof. (Kazakhstan)  
**Dzhumabayev D.S.** prof. (Kazakhstan)  
**Asanova A.T.** prof. (Kazakhstan)  
**Boshkayev K.A.** PhD (Kazakhstan)  
**Suragan D.** PhD (Kazakhstan)  
**Quevedo Hernando** prof. (Mexico),  
**Dzhunushaliyev V.D.** prof. (Kyrgyzstan)  
**Vishnevskiy I.N.** prof., academician (Ukraine)  
**Kovalev A.M.** prof., academician (Ukraine)  
**Mikhalevich A.A.** prof., academician (Belarus)  
**Pashayev A.** prof., academician (Azerbaijan)  
**Takibayev N.Zh.** prof., academician (Kazakhstan), deputy editor in chief.  
**Tiginyanu I.** prof., academician (Moldova)

**News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physical-mathematical series.**

**ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)**

Owner: RPA "National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan" (Almaty)

The certificate of registration of a periodic printed publication in the Committee of information and archives of the Ministry of culture and information of the Republic of Kazakhstan N 5543-Ж, issued 01.06.2006

Periodicity: 6 times a year

Circulation: 300 copies

Editorial address: 28, Shevchenko str., of. 219, 220, Almaty, 050010, tel. 272-13-19, 272-13-18,  
[www.nauka-nanrk.kz](http://www.nauka-nanrk.kz) / [physics-mathematics.kz](http://physics-mathematics.kz)

---

© National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, 2017

Address of printing house: ST "Aruna", 75, Muratbayev str, Almaty

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

## PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 312 (2017), 5 – 11

D.S. Dzhumabaev<sup>1</sup>, A.S. Zharmagambetov<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>International Information Technologies University, Almaty, Kazakhstan,  
 Department of Differential Equations, Institute of Mathematics and Mathematical Modeling of MES RK, 125,  
 Pushkin str., Almaty, Kazakhstan<sup>1</sup>  
 dzhumabaev@list.ru<sup>1</sup> armanform@gmail.com<sup>2</sup>

## NUMERICAL METHOD FOR SOLVING A LINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR FREDHOLM INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

**Annotation.** Numerical method to solve the linear boundary value problem for the Fredholm integro-differential equations with degenerate kernel is proposed. Dividing interval into N parts and introducing additional parameters as the values of solution at the left-end points of subintervals origin problem is reduced to the multipoint boundary value problem for the system of integro-differential equations with parameters. At the fixed values of parameters the special Cauchy problems for the system of integro-differential equations are solved. Introducing the additional parameters allows as the solvability of the boundary value problem to reduce to the solvability of system of linear algebraic equation with respect to introduced parameters. The Cauchy problems for the ordinary differential equations and evaluating the definite integrals on subintervals are the main auxiliary problems of method proposed. The Cauchy problems are solved by the Bulirsch-Stoer method and definite integrals are determined by the Simpson method.

**Keywords.** Fredholm integro-differential equations, linear boundary value problem, parametrization, Bulirsch-Stoer method.

Various problems of physics, engineering, biology, etc. lead to the study of integro-differential equations and to the formulation of related specific tasks. In connection with this, the theory of such equations has attracted the attention of mathematicians. Qualitative properties of problems for the Fredholm integro-differential equations and methods for solving these problems are considered in the works of many others [1-11].

In the present paper, we consider the linear boundary value problem for Fredholm integro-differential equation:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \sum_{k=1}^m \int_0^T \varphi_k(t)\psi_k(s)x(s)ds + f(t), t \in (0, T), x \in R^n \quad (1)$$

$$Bx(0) + Cx(T) = d, d \in R^n \quad (2)$$

where the matrices  $A(t)$ ,  $\varphi_k(t)$ ,  $\psi_k(s)$ ,  $0 < k < m$  and vector  $f(t)$  are continuous on  $[0, T]$ . A solution to problem (1) and (2) is a vector function  $x(t)$ , continuous on  $[0, T]$  and continuously differentiable on  $(0, T)$ , satisfying the integro-differential equation (1) and boundary condition (2).

Given the points:  $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_N = T$ , and let  $\Delta_N$  denote the partition of interval  $[0, T)$  into N subintervals  $[0, T) = \bigcup_{r=1}^N [t_{r-1}, t_r]$ . The case, when the interval  $[0, T]$  is not divided into parts, we denote by  $\Delta_1$ .

Let  $x_r(t)$  be the restriction of function  $x(t)$  to the  $r$ -th interval  $[t_{r-1}, t_r]$ , i.e.  $x_r(t) = x(t)$ , for  $t \in [t_{r-1}, t_r]$ ,  $r = 1, N$ .

Introducing the additional parameters  $\lambda_r = x_r(t_{r-1})$  and performing a replacement of the function  $u_r(t) = x_r(t) - \lambda_r$  on each  $r$ -th interval, we obtain the following boundary value problem with parameters:

$$\frac{du_r}{dt} = A(t)(u_r + \lambda_r) + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^m \int_{t_{j-1}}^{t_j} \varphi_k(t) \psi_k(s) (u_r(s) + \lambda_r) ds + f(t) \quad (3)$$

$$t \in (t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1, N},$$

$$u_r(t_{r-1}) = 0, \quad r = 1 \dots N \quad (4)$$

$$B\lambda_1 + C\lambda_N + C \lim_{t \rightarrow T-0} u_N(t) = d \quad (5)$$

$$\lambda_p + \lim_{t \rightarrow t_p-0} u_p(t) - \lambda_{p+1} = 0, \quad p = 1 \dots N-1 \quad (6)$$

where (6) are conditions for matching the solution at the interior points of the partition  $\Delta_N$ . Note, that conditions (6) and integro-differential equations (3) also ensure the continuity of solution's derivatives at these points.

Using the fundamental matrix  $X_r(t)$  of differential equation  $dx/dt = A(t)x$  on  $[t_{r-1}, t_r]$ , we reduce the special Cauchy problem for the system of integro-differential equations with parameters (2.3), (2.4) to the equivalent system of integral equations.

$$\begin{aligned} u_r(t) = & X_r \int_{t_{r-1}}^t X_r^{-1}(\tau) A(\tau) d\tau \lambda_r + \\ & + X_r \int_{t_{r-1}}^t X_r^{-1}(\tau) A(\tau) \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^m \int_{t_{j-1}}^{t_j} \varphi_k(\tau) \psi_k(s) (u_r(s) + \lambda_r) ds d\tau + \\ & + X_r \int_{t_{r-1}}^t X_r^{-1}(\tau) A(\tau) f(\tau) d\tau, \quad t \in [t_{r-1}, t_r], \quad r = 1 \dots N \end{aligned} \quad (7)$$

Introduce the notation

$$\mu_k = \sum_{j=1}^N \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(s) u_j(s) ds$$

Multiplying both sides of (7) by  $\psi_p(t)$ , integrating on the interval  $[t_{r-1}, t_r]$  and summing up over  $r$ , we have the system of linear algebraic equations with respect to  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m) \in \mathbb{R}^{nm}$ :

$$\mu_p = \sum_{k=1}^m G_{p,k}(\Delta_N) \mu_k + \sum_{r=1}^N V_{p,r}(\Delta_N) \lambda_r + g_p(f, \Delta_N), \quad p = 1 \dots m \quad (8)$$

with the  $(n \times n)$  matrices

$$G_{p,k}(\Delta_N) = \sum_{r=1}^N \int_{t_{r-1}}^{t_r} \psi_r(\tau) X_r(\tau) \int_{t_{r-1}}^{\tau} X_r^{-1}(\tau) \phi_k(s) ds d\tau \quad (9)$$

$$V_{p,r}(\Delta_N) = \int_{t_{r-1}}^{t_r} \psi_p(\tau) X_r(\tau) \int_{t_{r-1}}^{\tau} X_r^{-1}(\tau) A(s) ds d\tau +$$

$$+ \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^m \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_p(\tau) X_j(\tau) \int_{t_{j-1}}^{\tau} X_j^{-1}(\tau) \phi_k(\tau) d\tau d\tau \int_{t_{r-1}}^{t_r} \psi_k(s) ds \quad (10)$$

and vectors of dimension  $n$

$$g_p(f, \Delta_N) = \sum_{r=1}^N \int_{t_{r-1}}^{t_r} \psi_p(\tau) X_r(\tau) \int_{t_{r-1}}^{\tau} X_r^{-1}(\tau) f(s) ds d\tau \quad (11)$$

Using these matrices we can rewrite the system (8) in the form

$$[I - G(\Delta_N)]\mu = V(\Delta_N)\lambda + g(f, \Delta_N), \quad (12)$$

where  $I$  is the identity matrix of dimension  $nm$ .

Essential requirement to the partition is its regularity. Partition  $\Delta_N$  is called regular if the matrix  $I - G(\Delta_N)$  is invertible. It is established that the invertibility of system's matrix is equivalent to the well-posedness of considered boundary value problem [2]. Assume the matrix  $I - G(\Delta_N)$  is invertible and  $[I - G(\Delta_N)]^{-1} = (M_{k,p}(\Delta_N))$ . Then according to (12) the elements of the vector  $\mu \in \mathbb{R}^{nm}$  are determined by the equalities

$$\mu_k = \sum_{j=1}^N \left( \sum_{p=1}^m M_{k,p}(\Delta_N) V_{p,j}(\Delta_N) \right) \lambda_j + \sum_{p=1}^m M_{k,p}(\Delta_N) g_p(f, \Delta_N), \quad (13)$$

Substituting the right-hand side of (13) instead of  $\mu_k$ , we get the representation of functions  $u_r(t)$  via  $\lambda_j$

$$u_r(t) = \sum_{j=1}^N \left\{ \sum_{k=1}^m X_r(t) \int_{t_{r-1}}^t X_r^{-1}(\tau) \phi_k(\tau) \right.$$

$$\times \left[ \sum_{p=1}^m M_{k,p}(\Delta_N) V_{p,j}(\Delta_N) + \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(s) ds \right] \lambda_j +$$

$$+ X_r(t) \int_{t_{r-1}}^t X_r^{-1}(\tau) A(\tau) d\tau \lambda_r + X_r(t) \int_{t_{r-1}}^t X_r^{-1} \times$$

$$\times \left[ \sum_{k=1}^m \phi_k(\tau) \sum_{p=1}^m M_{k,p}(\Delta_N) g_p(f, \Delta_N) + f(\tau) \right] d\tau, \quad (14)$$

Introduce notation

$$D_{r,j}(\Delta_N) = \sum_{k=1}^{2n} X_r(t) \int_{t_{r-1}}^{t_r} X_r^{-1}(\tau) \phi_k(\tau) \times \\ \times \left[ \sum_{p=1}^{2n} M_{k,p}(\Delta_N) V_{p,j}(\Delta_N) + \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(s) ds \right] \quad (15)$$

$$D_{r,r}(\Delta) = \sum_{k=1}^{2n} X_r(t_r) \int_{t_{r-1}}^{t_r} X_r^{-1}(\tau) \phi_k(\tau) d\tau \times \\ \times \left[ \sum_{p=1}^{2n} M_{k,p}(\Delta_N) V_{p,j}(\Delta_N) + \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(s) ds \right] + \quad (16)$$

$$+ X_r(t_r) \int_{t_{r-1}}^{t_r} X_r^{-1}(\tau) A(\tau) d\tau \\ F_r(\Delta_N) = \sum_{k=1}^{2n} X_r(t_r) \int_{t_{r-1}}^{t_r} X_r^{-1}(\tau) A(\tau) d\tau \sum_{p=1}^{2n} M_{k,p}(\Delta_N) g_p(f, \Delta_N) + \quad (17) \\ + \sum_{k=1}^{2n} X_r(t_r) \int_{t_{r-1}}^{t_r} X_r^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau, r = 1 \dots N,$$

Then from (14) we have

$$\lim_{t \rightarrow t_r - 0} u_r(t) = \sum_{j=1}^N D_{r,j}(\Delta_N) \lambda_j + F_r(\Delta_N). \quad (18)$$

Substituting the right-hand side of (18) into the boundary condition (5) and conditions of matching solution (6), we obtain the following system of linear algebraic equations with respect to parameters  $\lambda_r, r = (1, N)$  :

$$[B + CD_{N,1}(\Delta_N)] \lambda_1 + \sum_{j=2}^{N-1} CD_{N,j}(\Delta_N) \lambda_j + \\ + C[I + D_{N,N}(\Delta_N)] \lambda_N = d - CF_N(\Delta_N), \quad (19)$$

$$[I + D_{p,p}(\Delta_N)] \lambda_p - [I + D_{p,p+1}(\Delta_N)] \lambda_{p+1} + \\ + \sum_{j=1}^N D_{p,j}(\Delta_N) \lambda_j = -F_p(\Delta_N), p = 1 \dots N - 1 \quad (20)$$

By denoting the matrix corresponding to the left-hand side of the system of equations (19), (20) by Q, the system can be written as the following:

$$Q_*(\Delta_N) \lambda = -F_*(\Delta_N), \lambda \in R^{nN}, \quad (21)$$

where



$$F_*(\Delta_N) = \{-d + CF_N(\Delta_N), F_1(\Delta_N), \dots, F_{N-1}(\Delta_N)\} \in R^{nN} \tag{22}$$

Solving equation (21) we find  $\lambda$  and substitute it to (14) to calculate  $u$ . Finally, performing a replacement of the function  $u_r(t) = x_r(t) - \lambda_r$  on each  $r$ -th interval, we obtain the values of the vector function  $x(t)$ .

Consider the Cauchy problems for ordinary differential equations on subintervals.

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + P(t), x(t_{r-1}) = 0, t \in [t_{r-1}, t_r], r = 1 \dots N \tag{23}$$

Here  $P(t)$  is square matrix or vector of dimension  $n$ , continuous on  $[0, T]$ .

Let's denote the solution to the Cauchy problem (23) by  $E_{*,r} = (A(\cdot), P(\cdot), t)$ .

Solving the Cauchy problem for the ordinary differential equations we obtain  $E_{*,r} = (A(\cdot), P(\cdot), t)$  and then evaluate the integrals

$$\hat{\psi}_{p,r} = \int_{t_{r-1}}^{t_r} \psi(t) dt, \hat{\psi}_{p,r}(A) = \int_{t_{r-1}}^{t_r} \psi(t) E_{*,r}(A(\cdot), A(\cdot), t) dt \tag{24}$$

$$\hat{\psi}_{p,r}(f) = \int_{t_{r-1}}^{t_r} \psi(t) E_{*,r}(A(\cdot), f(\cdot), t) dt, \hat{\psi}_{p,r}(\phi) = \int_{t_{r-1}}^{t_r} \psi(t) E_{*,r}(A(\cdot), \phi(\cdot), t) dt$$

From the equalities (24) we calculate matrices  $G, V, g$ . Consequently we obtain the matrices  $Q, F$  and form the system of linear algebraic equations with respect to parameter  $\lambda$ . Solving composed equation we find the parameter  $\lambda$ . The Cauchy problems for ordinary differential equations for the found values of parameter we solve using Bulirsch–Stoer method [12]. Bulirsch–Stoer algorithm is a method for the numerical solution of ordinary differential equations which combines three powerful ideas: Richardson extrapolation, the use of rational function extrapolation in Richardson-type applications, and the modified midpoint method, to obtain numerical solutions to ordinary differential equations (ODEs) with high accuracy and comparatively little computational effort.

Now we consider on  $[0, T]$  the linear boundary value problem for Fredholm integro-differential equation (1) and (2) with degenerate kernel, where

$$T = 1, m = 2, A(t) = \begin{pmatrix} 0 & t \\ t^2 & 0 \end{pmatrix}, B = -C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(t) = \begin{pmatrix} 2\pi \cos(2\pi t) - t \cos(2\pi t) + (t^4 \exp(t/4)) / (4\pi) \\ -2\pi \sin(2\pi t) - t^2 \sin(2\pi t) \end{pmatrix}$$

$$\phi_1(t) = \begin{pmatrix} t^3 \exp(t/4) & t \\ t & 2t^2 \exp(t/4) \end{pmatrix}, \phi_2(t) = \begin{pmatrix} \frac{t^4}{2} \exp(t/4) & 0 \\ 0 & t^4 \exp(t/4) \end{pmatrix}$$

$$\psi_1(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \psi_2(t) = \begin{pmatrix} t - \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & t - \frac{1}{2} \end{pmatrix}, n = 2$$

Here the matrix of differential part is variable and the construction of fundamental matrix breaks down. We use the numerical implementation of algorithm. For the integro-differential equation in the given problem any partition of interval  $[0, T]$ , including  $\Delta_1$ , is regular. Accuracy of solution depends on the accuracy of solving the Cauchy problem on subintervals and evaluating of definite integrals. Numerical solution for Cauchy problem and evaluation of definite integrals are implemented using

Bulirsch-Stoer method and Simpson's method, respectively. We provide the results of the numerical implementation of algorithm by partitioning the interval [0, 1] with step  $h = 0.5$  and partitioning the subintervals [0, 0.5] and [0.5, 1] with step  $h_1 = h_2 = 0.05$ .

t	$x_1^*(t)$	$x_2^*(t)$	t	$x_1^*(t)$	$x_2^*(t)$
0	-0.0000	0.0000	0.5000	1.0000	-1.0000
0.0500	0.3090	-0.3090	0.5500	0.9511	-0.9511
0.1000	0.5878	-0.5878	0.6000	0.8090	-0.8090
0.1500	0.8090	-0.8090	0.6500	0.5878	-0.5878
0.2000	0.9511	-0.9511	0.7000	0.3090	-0.3090
0.2500	1.0000	-1.0000	0.7500	0.0000	0.0000
0.3000	0.9511	-0.9511	0.8000	-0.3090	0.3090
0.3500	0.8090	-0.8090	0.8500	-0.5878	0.5878
0.4000	0.5878	-0.5878	0.9000	-0.8090	0.8090
0.4500	0.3090	-0.3090	0.9500	-0.9511	0.9511
0.5000	-0.0000	-0.0000	1.0000	-1.0000	1.0000

Here is  $x_1^*(t)$  and  $x_2^*(t)$  are approximate solutions of the integro-differential equation. Exact solution to the given problem is

$$x^*(t) = \begin{pmatrix} \sin(2\pi t) \\ \cos(2\pi t) \end{pmatrix}$$

and the following estimate is true

$$\max_{j=1..20} \|x(t_j) - x^*(t_j)\| < 0.000003552$$

whereas the results obtained from the Runge-Kutta 4<sup>th</sup> order method is:

$$\max_{j=1..20} \|x(t_j) - x^*(t_j)\| < 0.000003662$$

Moreover, Bulirsch-Stoer method showed better performance in terms of computation time: spent\_time (Bulirsch-Stoer) = 3.1511s versus spent\_time (Runge-Kutta 4) = 3.9654s, which is 25.8% faster.

#### REFERENCES

- [1] Nekrasov A. I. On a Class of Linear Integro- Differential Equations, Tr. Tsentr. Aerogidrodin. Inst. 190 (1934) 1-25.
- [2] Dzhumabaev D.S. On one approach to solve the linear boundary value problems for Fredholm integro-differential equations, Journal of Computational and Applied Mathematics 294 (2016). P. 342-357.
- [3] Dzhumabaev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation. USSR Comput. Maths. Math. Phys. 29 (1989) 34-46.
- [4] Dzhumabaev D.S. A Method for Solving the Linear Boundary Value Problem for an Integro-Differential Equation. Comput. Math. Math. Phys. 50 (2010) 1150-1161.
- [5] Dzhumabaev D.S. An Algorithm for Solving a Linear Two-Point Boundary Value Problem for an Integro-Differential Equation. Comput. Math. Math. Phys. 53 (2013) 736-758.
- [6] Dzhumabaev D.S., Bakirova E.A. Criteria for the Unique Solvability of a Linear Two-Point Boundary Value Problem for Systems of Integro-Differential Equations. Differential Equations, 49(2013) 914-937.
- [7] Bykov Ya. V. On Some Problems in the Theory of Integro-Differential Equations. Kirgiz. Gos. Univ., Frunze, 1957. [in Russian]
- [8] Dzhumabaev D.S., Bakirova E.A. Criteria for the well-posedness of a linear two-point boundary value problem for systems of integro-differential equations //Differential equations, - 2010. - 46. - № 4. - P. 553-567.
- [9] Dzhumabaev D.S. Necessary and sufficient conditions for the solvability of linear boundary value problems for the Fredholm integro-differential equations //Ukrainian Mathematical journal, - 2015. - 66. -№ 8. - P. 1200-1219.
- [10] Dzhumabaev D.S., Bakirova E.A. On the unique solvability of the boundary value problems for Fredholm integrodifferential equations with degenerate kernel // Journal of Mathematical Science. Vol. 220. No 4. 2017. P. 489-506.

[11] Dzhumabaev D.S. Solvability of a linear boundary value problem for a Fredholm integro-differential equation with impulsive inputs //Differential equations, - 2015. - 51. - № 9. - P. 1180-1196.

[12] Bulirsch, R. and Stoer, J. Introduction to Numerical Analysis. New York: Springer-Verlag, 1991.

Д.С. Джумабаев<sup>1</sup>, А.С. Жармагамбетов<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>Халықаралық ақпараттық технологиялар университеті, Алматы, Қазақстан,

<sup>1</sup> БЖҒМ Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы, Қазақстан

### ФРЕДГОЛЬМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕНДЕУІ ҮШІН СЫЗЫҚТЫҚ ШЕТТІК ЕСЕПТІ ШЕШУДІҢ САНДЫҚ ӘДІСІ

**Аннотация.** Өзегі айныған Фредгольм интегро-дифференциалдық тендеуі үшін сызықтық шеттік есепті шешудің сандық әдісі ұсынылды. Аралықты  $N$  бөлікке бөлу және қосымша параметрлерді шешімнің бөлімшенің сол жақ нүктелеріндегі мәні ретінде еңгізу бастапқы есепті параметрлері бар интегро-дифференциалдық тендеулер жүйесі үшін көпнүктелі шеттік есепке алып келеді. Параметрлердің бекітілген мәндерінде интегро-дифференциалдық тендеулер жүйесі үшін арнайы Коши есебі шешіледі. Қосымша параметрлерді енгізу шеттік есептің шешілімділігін енгізілген параметрлерге байланысты сызықтық алгебралық тендеулер жүйесінің шешілімділігіне келтіреді.

Бөлімшелердегі жәй дифференциалдық тендеулер үшін Коши есебі және анықталған интегралдарды есептеу ұсынылған әдістің негізгі қосалқы есептері болып табылады. Коши мәселелері Булирш –Штер әдісімен шешіледі және анықталған интегралдар Симпсон әдісімен есептеледі.

**Кілттік сөздер.** Фредгольм интегро-дифференциалдық тендеуі, сызықтық шеттік есеп, параметрлеу, Булирш-Штер әдісі.

Д.С. Джумабаев<sup>1</sup>, А.С. Жармагамбетов<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>Международный Университет информационных технологий, Алматы, Казахстан,

<sup>1</sup>Институт математики и математического моделирования МОН РК, Алматы, Казахстан

### ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА

**Аннотация.** Предложен численный метод решения линейной краевой задачи для интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с вырожденным ядром. Разбиение интервала на  $N$  частей и введение дополнительных параметров в качестве значений решения в левых точках подинтервалов исходную задачу сводит к многоточечной краевой задаче для системы интегро-дифференциальных уравнений с параметрами. При фиксированных значениях параметров решаются специальные задачи Коши для системы интегро-дифференциальных уравнений. Введение дополнительных параметров позволяет нам разрешимость краевой задачи сводить к разрешимости системы линейных алгебраических уравнений относительно введенных параметров. Задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений и вычисление определенных интегралов на подинтервалах являются основными вспомогательными задачами предложенного метода. Задачи Коши решаются методом Булирша-Штера, а определенные интегралы вычисляются методом Симпсона.

**Ключевые слова.** Интегро-дифференциальное уравнение Фредгольма, линейная краевая задача, параметризация, метод Булирша – Штера.

---



---

**МАЗМҰНЫ**

<i>Джумабаев Д.С., Жармагамбетов А.С.</i> Фредгольм интегро-дифференциалдық теңдеуі үшін сызықтық шеттік есепті шешудің сандық әдісі.....	5
<i>Асанова А.Т., Иманчиев А.Е., Қәдірбаева Ж.М.</i> Жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін көпнүктелі есептің бірмәнді шешілімділігі туралы .....	12
<i>Дауылбаев М. К., Джумабаев Д. С., Атахан Н.</i> Сингулярлы ауытқыған интегралды-дифференциалдық теңдеуге арналған шекаралық есептің асимптотикалық бейнелеуі.....	18
<i>Асқарова Ә.С., Бөлегенова С.Ә., Бөлегенова С.Ә., Максимов В.Ю., Оспанова Ш.С.</i> ПК-39 және БКЗ-160 қазандықтарының жану камераларының аэродинамикасы мен жылу масса алмасуын зерттеу.....	27
<i>Абишев М.Е., Токтарбай С., Абылаева А.Ж., Талхат А.З., Белсарова Ф.Б.</i> Екі массивті айналмалы дене өрісіндегі айналмалы сынақ дене орбитасының орнықтылығы.....	39
<i>Ақжігітова Э.М., Құрманғалиева В.О., Арбузов А.Б.</i> Мюонның радиациялық ыдырауын модельден тәуелсіз түрде сипаттау .....	54
<i>Асқарова Ә.С., Бөлегенова С.Ә., Бөлегенова С.Ә., Максимов В.Ю., Оспанова Ш.С.</i> ПК-39 қазандығының жану камерасындағы шаң тозанды көмір отынын жағу процесін сандық модельдеу.....	58
<i>Әбішев М., Малыбаев А., Кеведо Э.</i> Мінсіз газдың геометротермодинамикасы.....	64
<i>Шыныбаев М.Д., Беков А.А., Рахимжанов Б.Н., Моминов С.Б., Сәдібек А.Ж., Дауырбеков С.С., Жолдасов С.А.</i> Хилдың екінші есебіндегі ұйытқулы шеңбер типтес орбиталар.....	69
<i>Асқарова А.С., Бөлегенова С.А., Бөлегенова С.А., Максимов В.Ю., Максұтханова А.М., Турбекова А.Г., Бейсенов Х.И.</i> БКЗ-160 жану камерасындағы термохимиялық-газдандырылған көмір жануын зерттеудің есептеу эксперименті.....	75
<i>Салғараева Г.И., Базарбаева А.</i> Білім берудегі Steam жүйесі және робототехника.....	81
<i>Ақылбаев М.И., Пархатова С., Шалданбаев А.Ш.</i> Бірлесіп толыққан операторлар .....	87
<i>Шыныбаев М.Д., Дауырбеков С.С., Жолдасов С.А., Алиасқаров Д.Р., Мырзақасова Г.Е., Сәдібек А.Ж.</i> Жердің жасанды серігінің сәуле қысымынан алған ұйытқуын Делоне элементтерінде есепке алу.....	99
<i>Қабылбеков К.А., Аширбаев Х.А., Абекова Ж.А., Омашова Г.Ш., Қыдырбекова Ж.Б., Джумағалиева А.И.</i> Соққы құбылысын зерттеуге арналған компьютерлік зертханалық жұмысты ұйымдастырудың бланкі үлгісі.....	104
<i>Қожамқұлова Ж.Ж., Аманкелдіқызы Н., Кабаева Д.А.</i> Болашақ мұғалімдерді кәсіби дайындауда қолданылатын ақпараттық технологиялар және олардың даму болашағы.....	110
<i>Қошанов Б.Д., Әділбеков Е.Н., Дүйсен Е.</i> Шектелмеген облыста пуассон және Бигармониалы теңдеулер үшін Дирихле есебі шешімдер кеңістігінің өлшемі – I.....	116
<i>Қошанов Б.Д., Әділбеков Е.Н., Дүйсен Е.</i> Шектелмеген облыста Пуассон және бигармониалы теңдеулер үшін Дирихле есебі шешімдер кеңістігінің өлшемі – II.....	126
<i>Сапрыгина М.Б., Ақылбаев М.И., Шалданбаев А.Ш.</i> Штурм-Лиувилл операторының периодты кері есебі.....	132
<i>Қойшыева Т.Қ., Қожамқұлова Ж.Ж., Сабит Б.</i> Жоғары оқу орнында болашақ мұғалімдерді объектілі-бағдарлы жобалау негізінде кәсіби дайындау моделі.....	146
<i>Исаева Г.Б., Бейсенова А.М.</i> Виртуалды машина және виртуалды машина ерекшеліктері мен виртуалдану деңгейлері жайлы жалпы мәселелер.....	153
<i>Сарсенбаев Х.А., Хамзина Б.С., Колдасова Г.А., Исаева Г.Б.</i> Көлденең ұңғымалардың өнімдік қабатын тиімді ашу үшін биополимерлі бұрғылау ерітіндісін қолдану.....	161
<b>Ғалымды еске алу</b>	
<i>Э.Г. Боос</i> .....	166

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Джумабаев Д.С., Жармагамбетов А.С.</i> Численный метод решения линейной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма.....	5
<i>Асанова А.Т., Иманчиев А.Е., Кадирбаева Ж.М.</i> Об однозначной разрешимости многоточечной задачи для системы нагруженных дифференциальных уравнений .....	12
<i>Дауылбаев М. К., Джумабаев Д. С., Атахан Н.</i> Асимптотическое представление сингулярно возмущенных краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений.....	18
<i>Аскарова А.С., Болегенова С.А., Болегенова С.А., Максимов В.Ю., Оспанова Ш.С.</i> Исследование аэродинамики и теплообмена в топочных камерах котлов ПК-39 и БКЗ-160 .....	27
<i>Абишев М.Е., Токтарбай С., Абылаева А.Ж., Талхат А.З., Белисарова Ф.Б.</i> Устойчивость орбиты вращательного движения пробного тела в поле двух массивных вращающихся тел.....	39
<i>Акжигитова Э.М., Курмангалиева В.О., Арбузов А.Б.</i> Описание радиоационного распада мюона в модельно – независимом подходе .....	54
<i>Аскарова А.С., Болегенова С.А., Болегенова С.А., Максимов В.Ю., Шортанбаева Ж.К.</i> Численное моделирование процессов сжигания пылеугольного топлива в топочной камере котла ПК 39.....	58
<i>Абишев М., Мальбаев А., Кеведо Э.</i> Геометротермодинамика идеального газа.....	64
<i>Шинибаев М.Д., Беков А.А., Рахимжанов Б.Н., Моминов С.Б., Садыбек А.Ж., Даиырбеков С.С., Жолдасов С.А.</i> Возмущенная орбита кругового типа во второй задаче Хилла.....	69
<i>Аскарова А.С., Болегенова С.А., Болегенова С.А., Максимов В.Ю., Максутханова А.М., Турбекова А.Г., Бейсенов Х.И.</i> Вычислительный эксперимент по исследованию горения термохимически-газифицированного угля в топочной камере котла БКЗ-160.....	75
<i>Салгареева Г.И., Базарбаева А.</i> Система Steam в образовании и робототехника.....	81
<i>Ақылбаев М.И., Пархатова С., Шалданбаев А.Ш.</i> О совместно полных операторах Штурма-Лиувилля.....	87
<i>Шинибаев М.Д., Даирбеков С.С., Жолдасов С.А., Алиаскаров Д.А., Мырзакасова Г.Е., Садыбек А.Ж.</i> Возмущения спутника земли от светового давления в элементах Делоне.....	99
<i>Кабылбеков К.А., Аширбаев Х.А., Абекова Ж.А., Омашова Г.Ш., Кыдырбекова Ж.Б., Джумагалиева А.И.</i> Организация выполнения компьютерной лабораторной работы по исследованию явления биения.....	104
<i>Кожамкулова Ж.Ж., Аманкелдикызы Н., Кабаева Д.А.</i> Информационные технологии, используемые при подготовке будущих педагогов, и их развитие.....	110
<i>Кошанов Б.Д., Адильбеков Е.Н., Дуйсен Е.</i> Размерность пространства решений задачи Дирихле для уравнений Пуассона и бигармонического уравнения в неограниченной области- I.....	116
<i>Кошанов Б.Д., Адильбеков Е.Н., Дуйсен Е.</i> Размерность пространства решений задачи Дирихле для уравнений Пуассона и бигармонического уравнения в неограниченной области- II.....	126
<i>Сапрыгина М.Б.<sup>1</sup>, Акылбаев М.И., Шалданбаев А.Ш.</i> Обратная периодическая задача оператора Штурма-Лиувилля.....	132
<i>Койшиева Т.К., Кожамкулова Ж.Ж., Сабит Б.</i> Профессиональная подготовка будущих преподавателей в высших учебных заведениях на основе объектно-ориентированного проектирования .....	146
<i>Исаева Г.Б., Бейсенова А.М.</i> Виртуальные машины, преимущества виртуальных машин и уровни виртуализации...153	
<i>Сарсенбаев Х.А., Хамзина Б.С., Колдасова Г.А., Исаева Г.Б.</i> Применение биополимерных буровых растворов для эффективного вскрытия продуктивных горизонтов горизонтальных скважин.....	161
<b>Памяти ученого</b>	
Краткий очерк научной и общественной деятельности академика Национальной академии наук Республики Казахстан Э.Г.Бооса.....	166

## CONTENTS

<i>Dzhumabaev D.S., Zharmagambetov A.S.</i> Numerical method for solving a linear boundary value problem for fredholm integro-differential equations.....	5
<i>Assanova A.T., Imanchiev A.E., Kadirbayeva Zh.M.</i> On the unique solvability of a multi-point problem for system of the loaded differential equations hyperbolic type .....	12
<i>Dauylbayev M. K., Dzhumabaev D. S., Atakhan N.</i> Asymptotical representation of singularly perturbed boundary value problems for integro-differential equations .....	18
<i>Askarova A.S., Bolegenova S.A., Bolegenova S.A., Maximov V.Yu., Ospanova Sh.S.</i> Investigation of aerodynamics and heat and mass transfer in the combustion chambers of the boilers PK-39 and BKZ-160.....	27
<i>Abishev M.E., Toktarbay S., Abylayeva A.Zh., Talkhat A.Z., Belissarova F.B.</i> The orbital stability of the motion of a test particle in a field of two massive rotating bodies.....	39
<i>Akzhigitova E.M., Kurmangalieva V.O., Arbuzov A.B.</i> Description of radiative muon decay using model-independent approach.....	54
<i>Askarova A.S., Bolegenova S.A., Bolegenova S.A., Maximov V.Yu., Shortanbaeva Zh.K.</i> Numerical modeling of burning pulverized coal in the combustion chamber of the boiler PK 39.....	58
<i>Abishev M., Malybayev A., Quevedo H.</i> Geometrothermodynamics of the ideal gas .....	64
<i>Shinibaev M.D., Bekov A.A., Rahimganov B.N., Mominov S.B., Sadybek A.G., Dairbekov S.S., Zholdasov S.A.</i> Perturbed orbit of a circular type for the Hill second task .....	69
<i>Askarova A.S., Bolegenova S.A., Bolegenova S.A., Maximov V.Yu., Maxutkhanova A.M., Turbekova A.G., Beisenov Kh.I.</i> A Computational experiment for studying the combustion of thermochemically-gasified coal in the combustion chamber of the boiler BKZ-160.....	75
<i>Salgarayeva G.I., Bazarbayeva A.</i> Steam system in education and robotics.....	81
<i>Akylbayev M. I., Parkhatova S., Shaldanbayev A.Sh.</i> On jointly completeness of Sturm-Liouville operators.....	87
<i>Shinibaev M.D., Dairbekov S.S., Zholdasov S.A., Aliaskarov D.A., Myrzakasova G.E., Sadybek A.G.</i> Perturbations satellites from the light pressure in the delaunay elements.....	99
<i>Kabyrbekov K.A., Ashirbaev H. A., Abekova Zh. A., Omashova G.Sh., Kydyrbekova Zh. B., Dzhumagaliyeva A.I.</i> The organization of performance of computer laboratory operation on examination of the phenomenon of palpation.....	104
<i>Kozhamkulova Zh.Zh., Amankeldikyzy N., Kabaeva D.A.</i> Information technology used in the preparation of future teachers and their development.....	110
<i>Koshanov B.D., Adilbekov E.N., Duysen E.</i> The dimension of the space solutions of the dirichlet problem for the Poisson and biharmonic equations in unbounded Domains – I.....	116
<i>Koshanov B.D., Adilbekov E.N., Duysen E.</i> The dimension of the space solutions of the Dirichlet problem for the Poisson and biharmonic equations in unbounded domains – II.....	126
<i>Saprigina M.B., Akylbayev M. I., Shaldanbayev A.Sh.</i> The inverse periodic problem of the Sturm-Liouville operator.....	132
<i>Koysheva T.K., Kozhamkulova Zh.Zh., Sabit B.</i> Training in higher education for future teachers on the basis of object-oriented design.....	146
<i>Issayeva G.B., Beisenova A.M.</i> The virtual machines, advantages of the virtual machines and virtualization levels.....	153
<i>Sarsenbayev Kh.A., Khamzina B.S., Koldassova G.A., Issayeva G.B.</i> Application of biopolymer drilling fluid for effective opening productive horizons horizontal wells.....	161
<b>The memory of the scientist</b>	
E. G. Boos .....	166

**Publication Ethics and Publication Malpractice  
in the journals of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan**

For information on Ethics in publishing and Ethical guidelines for journal publication see <http://www.elsevier.com/publishingethics> and <http://www.elsevier.com/journal-authors/ethics>.

Submission of an article to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan implies that the described work has not been published previously (except in the form of an abstract or as part of a published lecture or academic thesis or as an electronic preprint, see <http://www.elsevier.com/postingpolicy>), that it is not under consideration for publication elsewhere, that its publication is approved by all authors and tacitly or explicitly by the responsible authorities where the work was carried out, and that, if accepted, it will not be published elsewhere in the same form, in English or in any other language, including electronically without the written consent of the copyright-holder. In particular, translations into English of papers already published in another language are not accepted.

No other forms of scientific misconduct are allowed, such as plagiarism, falsification, fraudulent data, incorrect interpretation of other works, incorrect citations, etc. The National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan follows the Code of Conduct of the Committee on Publication Ethics (COPE), and follows the COPE Flowcharts for Resolving Cases of Suspected Misconduct ([http://publicationethics.org/files/u2/New\\_Code.pdf](http://publicationethics.org/files/u2/New_Code.pdf)). To verify originality, your article may be checked by the Cross Check originality detection service <http://www.elsevier.com/editors/plagdetect>.

The authors are obliged to participate in peer review process and be ready to provide corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. All authors of a paper should have significantly contributed to the research.

The reviewers should provide objective judgments and should point out relevant published works which are not yet cited. Reviewed articles should be treated confidentially. The reviewers will be chosen in such a way that there is no conflict of interests with respect to the research, the authors and/or the research funders.

The editors have complete responsibility and authority to reject or accept a paper, and they will only accept a paper when reasonably certain. They will preserve anonymity of reviewers and promote publication of corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. The acceptance of a paper automatically implies the copyright transfer to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.

The Editorial Board of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan will monitor and safeguard publishing ethics.

Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайтах:

[www.nauka-nanrk.kz](http://www.nauka-nanrk.kz)

<http://www.physics-mathematics.kz>

**ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)**

Редакторы *М. С. Ахметова, Д.С. Аленов, Т.А. Апендиев*  
Верстка на компьютере *А.М. Кульгинбаевой*

Подписано в печать 10.04.2017.  
Формат 60x881/8. Бумага офсетная. Печать – ризограф.  
11,4 п.л. Тираж 300. Заказ 2.

---

*Национальная академия наук РК*  
*050010, Алматы, ул. Шевченко, 28, т. 272-13-18, 272-13-19*