

ISSN 2518-1726 (Online),  
ISSN 1991-346X (Print)

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ  
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ

# Х А Б А Р Л А Р Ы

---

---

## ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК  
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES  
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА  
СЕРИЯСЫ**



**СЕРИЯ**

**ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ**



**PHYSICO-MATHEMATICAL  
SERIES**

**2 (312)**

**НАУРЫЗ – СӘУІР 2017 Ж.**

**МАРТ – АПРЕЛЬ 2017 г.**

**MARCH – APRIL 2017**

1963 ЖЫЛДЫҢ ҚАҢТАР АЙЫНАН ШЫҒА БАСТАҒАН  
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1963 ГОДА  
PUBLISHED SINCE JANUARY 1963

ЖЫЛЫНА 6 РЕТ ШЫҒАДЫ  
ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД  
PUBLISHED 6 TIMES A YEAR

АЛМАТЫ, ҚР ҰҒА  
АЛМАТЫ, НАН РК  
ALMATY, NAS RK

Б а с р е д а к т о р ы  
ф.-м.ғ.д., проф., ҚР ҰҒА академигі **Ғ.М. Мұтанов**

Р е д а к ц и я а л қ а с ы:

**Жұмаділдаев А.С.** проф., академик (Қазақстан)  
**Кальменов Т.Ш.** проф., академик (Қазақстан)  
**Жантаев Ж.Ш.** проф., корр.-мүшесі (Қазақстан)  
**Өмірбаев У.У.** проф. корр.-мүшесі (Қазақстан)  
**Жүсіпов М.А.** проф. (Қазақстан)  
**Жұмабаев Д.С.** проф. (Қазақстан)  
**Асанова А.Т.** проф. (Қазақстан)  
**Бошқаев К.А.** PhD докторы (Қазақстан)  
**Сұраған Д.** PhD докторы (Қазақстан)  
**Quevedo Hernando** проф. (Мексика),  
**Джунушалиев В.Д.** проф. (Қырғыстан)  
**Вишневский И.Н.** проф., академик (Украина)  
**Ковалев А.М.** проф., академик (Украина)  
**Михалевич А.А.** проф., академик (Белорус)  
**Пашаев А.** проф., академик (Әзірбайжан)  
**Такибаев Н.Ж.** проф., академик (Қазақстан), бас ред. орынбасары  
**Тигиняну И.** проф., академик (Молдова)

«ҚР ҰҒА Хабарлары. Физика-математикалық сериясы».

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Меншіктенуші: «Қазақстан Республикасының Ұлттық ғылым академиясы» РҚБ (Алматы қ.)  
Қазақстан республикасының Мәдениет пен ақпарат министрлігінің Ақпарат және мұрағат комитетінде  
01.06.2006 ж. берілген №5543-Ж мерзімдік басылым тіркеуіне қойылу туралы куәлік

Мерзімділігі: жылына 6 рет.  
Тиражы: 300 дана.

Редакцияның мекенжайы: 050010, Алматы қ., Шевченко көш., 28, 219 бөл., 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,  
[www.nauka-nanrk.kz](http://www.nauka-nanrk.kz) / [physics-mathematics.kz](http://physics-mathematics.kz)

---

© Қазақстан Республикасының Ұлттық ғылым академиясы, 2017

Типографияның мекенжайы: «Аруна» ЖК, Алматы қ., Муратбаева көш., 75.

Главный редактор  
д.ф.-м.н., проф. академик НАН РК **Г.М. Мутанов**

Редакционная коллегия:

**Джумадильдаев А.С.** проф., академик (Казахстан)  
**Кальменов Т.Ш.** проф., академик (Казахстан)  
**Жантаев Ж.Ш.** проф., чл.-корр. (Казахстан)  
**Умирбаев У.У.** проф. чл.-корр. (Казахстан)  
**Жусупов М.А.** проф. (Казахстан)  
**Джумабаев Д.С.** проф. (Казахстан)  
**Асанова А.Т.** проф. (Казахстан)  
**Бошкаев К.А.** доктор PhD (Казахстан)  
**Сураган Д.** доктор PhD (Казахстан)  
**Quevedo Hernando** проф. (Мексика),  
**Джунушалиев В.Д.** проф. (Кыргызстан)  
**Вишневский И.Н.** проф., академик (Украина)  
**Ковалев А.М.** проф., академик (Украина)  
**Михалевич А.А.** проф., академик (Беларусь)  
**Пашаев А.** проф., академик (Азербайджан)  
**Такибаев Н.Ж.** проф., академик (Казахстан), зам. гл. ред.  
**Тигиняну И.** проф., академик (Молдова)

«Известия НАН РК. Серия физико-математическая».

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы)

Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации и архивов  
Министерства культуры и информации Республики Казахстан №5543-Ж, выданное 01.06.2006 г.

Периодичность: 6 раз в год.

Тираж: 300 экземпляров.

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, ком. 219, 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,  
[www.nauka-nanrk.kz](http://www.nauka-nanrk.kz) / [physics-mathematics.kz](http://physics-mathematics.kz)

---

© Национальная академия наук Республики Казахстан, 2017

Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75.

E d i t o r i n c h i e f  
doctor of physics and mathematics, professor, academician of NAS RK **G.M. Mutanov**

E d i t o r i a l b o a r d:

**Dzhumadildayev A.S.** prof., academician (Kazakhstan)  
**Kalmenov T.Sh.** prof., academician (Kazakhstan)  
**Zhantayev Zh.Sh.** prof., corr. member. (Kazakhstan)  
**Umirbayev U.U.** prof. corr. member. (Kazakhstan)  
**Zhusupov M.A.** prof. (Kazakhstan)  
**Dzhumabayev D.S.** prof. (Kazakhstan)  
**Asanova A.T.** prof. (Kazakhstan)  
**Boshkayev K.A.** PhD (Kazakhstan)  
**Suragan D.** PhD (Kazakhstan)  
**Quevedo Hernando** prof. (Mexico),  
**Dzhunushaliyev V.D.** prof. (Kyrgyzstan)  
**Vishnevskiy I.N.** prof., academician (Ukraine)  
**Kovalev A.M.** prof., academician (Ukraine)  
**Mikhalevich A.A.** prof., academician (Belarus)  
**Pashayev A.** prof., academician (Azerbaijan)  
**Takibayev N.Zh.** prof., academician (Kazakhstan), deputy editor in chief.  
**Tiginyanu I.** prof., academician (Moldova)

**News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physical-mathematical series.**

**ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)**

Owner: RPA "National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan" (Almaty)

The certificate of registration of a periodic printed publication in the Committee of information and archives of the Ministry of culture and information of the Republic of Kazakhstan N 5543-Ж, issued 01.06.2006

Periodicity: 6 times a year

Circulation: 300 copies

Editorial address: 28, Shevchenko str., of. 219, 220, Almaty, 050010, tel. 272-13-19, 272-13-18,  
[www.nauka-nanrk.kz](http://www.nauka-nanrk.kz) / [physics-mathematics.kz](http://physics-mathematics.kz)

---

© National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, 2017

Address of printing house: ST "Aruna", 75, Muratbayev str, Almaty

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 312 (2017), 64 – 68

UDC 530.12

M. Abishev<sup>1</sup>, A. Malybayev<sup>1</sup>, H. Quevedo<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Physical-Technical Faculty, Al-Farabi Kazakh National University,  
Al Farabi av. 71, 050040 Almaty, Kazakhstan

<sup>2</sup>Institute of Nuclear Sciences, National Autonomous University of Mexico  
AP 70543, Mexico, DF 04510, Mexico

## GEOMETROTHERMODYNAMICS OF THE IDEAL GAS

**Abstract.** The goal of this work is to describe the formalism of geometrothermodynamics (GTD) and to corroborate some of its most important assumptions. To this end, the GTD formalism is used to find the thermodynamic properties of the ideal gas. Using this method, we calculate the metric of the space of equilibrium states, the Christoffel symbols, the components of the Riemann Ricci, and Einstein tensors as well as the scalar curvature. As a result, we corroborate one of the most important ideas of GTD, namely, that the curvature of the space of equilibrium states is a measure of the interaction between the components of the thermodynamic system; this is shown in the particular case of the ideal gas. The formalism of GTD can be used to analyze other thermodynamic system as, for example, black holes.

**Keywords:** geometrothermodynamics, phase space, equilibrium space, entropy representation, thermodynamic curvature.

УДК 530.12

М.Абишев<sup>1</sup>, А. Малыбаев<sup>1</sup>, Э. Кеведо<sup>2</sup>

<sup>1</sup>КазНУим. аль-Фараби, физико-технический факультет, г. Алматы. Республика Казахстан;

<sup>2</sup>Мексиканский национальный университет, г. Мехико, Мексика

## ГЕОМЕТРОТЕРМОДИНАМИКА ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

**Аннотация.** Целью данной работы является описание формализма геометротермодинамики (ГТД) и подтверждение его основных положений. Для достижения этой цели использовался метод формализма ГТД для расчета термодинамических свойств идеального газа. С помощью этого метода были посчитаны: метрика пространства равновесных состояний идеального газа, символы Кристоффеля, компоненты тензора Римана, компоненты тензора Риччи, компоненты тензора Эйнштейна и скалярная кривизна. В результате была подтверждена одна из основных идей формализма ГТД о том, что кривизна пространства равновесных состояний является мерой взаимодействия между компонентами термодинамической системы, в частности, для идеального газа. Формализм ГТД может быть использован для исследования других термодинамических систем, например, черных дыр.

**Ключевые слова:** геометротермодинамика, фазовое пространство, пространство равновесных состояний, энтропийное представление, термодинамическая кривизна.

**Введение.** В этой работе мы объясним основные положения формализма геометротермодинамики (ГТД) [1]. На примере идеального газа с помощью ГТД исследуем его термодинамические свойства. Существует связь между теорией относительности и термодинамикой. Эту связь можно показать с помощью формализма ГТД. В формализме ГТД используются геометрические подходы, которые используются в общей теории относительности (ОТО).

Для описания термодинамической системы в ГТД, необходимо сделать следующее:

- построить термодинамическое фазовое пространство  $\mathcal{T}$ , подпространством которого является пространство равновесных состояний  $\mathcal{E}$ , геометрические свойства которого описывают термодинамические свойства соответствующей термодинамической системы.

- Затем вводится фундаментальная форма Гиббса  $\theta$ .

- Для пространства  $\mathcal{T}$  вводят так называемую термодинамическую метрику  $G$ .

- Затем находим метрику  $g$  для пространства равновесных состояний  $\mathcal{E}$ .

- Зная метрику  $g$ , мы рассчитываем кривизну пространства равновесных состояний, которая называется термодинамической кривизной.

Согласно формализму ГТД тензор кривизны (термодинамическая кривизна) является мерой взаимодействия между компонентами термодинамической системы.

Триплет  $(\mathcal{T}, \theta, G)$  называется Римановым контактным множеством и оно выражает структуру и геометрические свойства классической термодинамической системы.

**Геометротермодинамика простых систем.** Остановимся более подробно на этих пунктах.

Для построения  $\mathcal{T}$  необходимо определить: экстенсивные переменные, например, энтропию  $S$ , объём  $V$ , затем интенсивные переменные, скажем температуру  $T$ , давление  $P$ , а также термодинамический потенциал, скажем внутреннюю энергию  $U$ . Эти термодинамические переменные используются как координаты в 5-мерном фазовом пространстве  $\mathcal{T}(S, U, V, T, P)$ .

Для пространства равновесных состояний  $\mathcal{E}$  в качестве координат мы выбираем переменные  $(S, V)$ . Затем вводится фундаментальная форма Гиббса  $\theta$ , которая имеет вид:

$$\theta = dU - TdS + PdV \quad (1)$$

В этом случае фундаментальное уравнение имеет энергетическое представление [2]:

$$U = U(S, V). \quad (2)$$

Для описания структуры пространства  $\mathcal{T}$  вводят так называемую термодинамическую метрику  $G(S, U, V, T, P)$ . Фундаментальная форма Гиббса  $\theta$  и метрика  $G$  инвариантны относительно преобразований Лежандра для случая системы с 2 термодинамическими степенями свободы  $(S, V)$ , то есть геометрическая структура фазового пространства  $\mathcal{T}$  инвариантна относительно преобразований Лежандра.

Для случая системы с двумя степенями свободы, использующей энергетическое представление, преобразования Лежандра для фазового пространства  $\mathcal{T}$  выражаются как преобразование координат в следующем виде:  $(U, S, V, T, P) \rightarrow (\tilde{U}, \tilde{S}, \tilde{V}, \tilde{T}, \tilde{P})$ . Эти преобразования можно осуществить следующими способами [3]:

$$\tilde{U}_1 = U - TS, \quad S = -\tilde{T}, \quad T = \tilde{S}, \quad V = \tilde{V}, \quad P = \tilde{P} \quad (3)$$

$$\tilde{U}_2 = U + PV, \quad S = \tilde{S}, \quad T = \tilde{T}, \quad V = \tilde{P}, \quad -P = \tilde{V} \quad (4)$$

$$\tilde{U}_3 = U - TS + PV, \quad S = -\tilde{T}, \quad T = \tilde{S}, \quad V = \tilde{P}, \quad -P = \tilde{V} \quad (5)$$

где  $\tilde{U}_1 = F$  свободная энергия Гельмгольца,

$$\tilde{U}_2 = H \text{ энтальпия,}$$

$$\tilde{U}_3 = G \text{ потенциал Гиббса.}$$

Если через  $\tilde{\theta}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  мы обозначим результат, полученный после применения преобразования Лежандра (3)-(5) к фундаментальной форме Гиббса  $\theta$ , то можно показать, что:

$$\tilde{\theta}_i = d\tilde{U}_i - \tilde{T}d\tilde{S} + \tilde{P}d\tilde{V} \quad (6)$$

это означает, что  $\theta$  является Лежандр-инвариантным геометрическим объектом.

В формализме ГТД необходимо, чтобы метрика  $G$  для фазового пространства  $\mathcal{T}$  тоже являлась Лежандр-инвариантной. Метрику  $G$  можно написать в следующем виде [4]:

$$G = (dU - TdS + PdV)^2 + (ST)^{2k+1} dSdT + (VP)^{2k+1} dVdP \quad (7)$$

Если через  $\tilde{G}_i$ ,  $i=1,2,3$  мы обозначим результат, полученный после применения преобразования Лежандра (3)-(5) к метрике  $G$ , можно показать, что:

$$\tilde{G}_i = (d\tilde{U}_i - \tilde{T}d\tilde{S} + \tilde{P}d\tilde{V})^2 + (\tilde{S}\tilde{T})^{2k+1} d\tilde{S}d\tilde{T} + (\tilde{V}\tilde{P})^{2k+1} d\tilde{V}d\tilde{P} \quad (8)$$

это означает, что  $G$  является Лежандр-инвариантным геометрическим объектом.

Следующим важным элементом ГТД является пространство равновесных состояний  $\mathcal{E}$ . В качестве координат  $\mathcal{E}$  возьмем следующий набор экстенсивных переменных  $(S, V)$ . Тогда оставшиеся координаты  $\mathcal{T}$  должны быть функциями  $S$  и  $V$ , то есть:

$$U = U(S, V), \quad T = T(S, V), \quad P = P(S, V) \quad (9)$$

Далее мы требуем, чтобы проекция фундаментальной формы Гиббса  $\theta$  на пространство равновесных состояний  $\mathcal{E}$  была равна нулю:

$$\theta|_{\mathcal{E}} = 0 \Leftrightarrow dU = TdS - PdV \quad (10)$$

Так как  $U = U(S, V)$ , следовательно:

$$\frac{\partial U}{\partial S} = T, \quad \frac{\partial U}{\partial V} = -P \quad (11)$$

В классической термодинамике эти соотношения являются условиями термодинамического равновесия. Проецируя метрику  $G$  фазового пространства  $\mathcal{T}$  на  $\mathcal{E}$ , можно получить метрику  $g$  для пространства равновесных состояний:

$$G|_{\mathcal{E}} = g = g(S, V) \quad (12)$$

Тогда имеем, используя (10)-(12):

$$g = \left( S \frac{\partial U}{\partial S} \right)^{2k+1} \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} dS^2 + \left( V \frac{\partial U}{\partial V} \right)^{2k+1} \frac{\partial^2 U}{\partial V^2} dV^2 + \left[ \left( S \frac{\partial U}{\partial S} \right)^{2k+1} + \left( V \frac{\partial U}{\partial V} \right)^{2k+1} \right] \frac{\partial^2 U}{\partial S \partial V} dSdV \quad (13)$$

В дальнейшем для системы с двумя степенями свободы мы будем использовать энтропийное представление. Тогда фундаментальное уравнение имеет вид  $S = S(U, V)$ . Преобразуя уравнение (1) можно получить энтропийное представление формы Гиббса  $\theta$ :

$$\theta_s = dS - \frac{1}{T} dU - \frac{P}{T} dV \quad (14)$$

Тогда фазовое пространство  $\mathcal{T}$  будет иметь следующие координаты  $(S, U, V, \beta, \vartheta)$ , где  $\beta = \frac{1}{T}$ ,  $\vartheta = \frac{P}{T}$ . В этом случае метрика  $G$  фазового пространства  $\mathcal{T}$  будет иметь вид:

$$G_s = \left( dS - \frac{1}{T} dU - \frac{P}{T} dV \right)^2 + \left( \frac{U}{T} \right)^{2k+1} dUd\left(\frac{1}{T}\right) + \left( \frac{VP}{T} \right)^{2k+1} dVd\left(\frac{P}{T}\right) \quad (15)$$

Преобразования Лежандра для фазового пространства  $\mathcal{T}$  выражаются как преобразование координат в следующем виде:  $(U, S, V, \beta, \vartheta) \rightarrow (\tilde{U}, \tilde{S}, \tilde{V}, \tilde{\beta}, \tilde{\vartheta})$ . Эти преобразования можно осуществить следующими способами:

$$\tilde{S}_1 = S - U\beta, \quad U = -\tilde{\beta}, \quad \beta = \tilde{U}, \quad V = \tilde{V}, \quad \vartheta = \tilde{\vartheta} \quad (16)$$

$$\tilde{S}_2 = S - V\vartheta, \quad U = \tilde{U}, \quad \beta = \tilde{\beta}, \quad V = -\tilde{\vartheta}, \quad \vartheta = \tilde{V} \quad (17)$$

$$\tilde{S}_3 = S - U\beta - V\vartheta, \quad U = -\tilde{\beta}, \quad \beta = \tilde{U}, \quad V = -\tilde{\vartheta}, \quad \vartheta = \tilde{V} \quad (18)$$

Здесь для пространства равновесных состояний  $\mathcal{E}$  в качестве координат возьмем экстенсивные переменные  $(U, V)$ . Тогда оставшиеся координаты  $\mathcal{T}$  должны быть функциями  $U$  и  $V$ :

$$S = S(U, V), \quad \beta = \beta(U, V), \quad \vartheta = \vartheta(U, V) \quad (19)$$

Как ранее было отмечено, требуем следующие условия:

$$\theta_s|_{\mathcal{E}} = 0, \quad G_s|_{\mathcal{E}} = g_s = g_s(U, V) \quad (20)$$

Из первого условия получаем:

$$dS = \frac{1}{T} dU + \frac{P}{T} dV, \quad \frac{\partial S}{\partial U} = \frac{1}{T}, \quad \frac{\partial S}{\partial V} = \frac{P}{T} \quad (21)$$

Из второго условия получаем:

$$g_s = \left( U \frac{\partial S}{\partial U} \right)^{2k+1} \frac{\partial^2 S}{\partial U^2} dU^2 + \left( V \frac{\partial S}{\partial V} \right)^{2k+1} \frac{\partial^2 S}{\partial V^2} dV^2 + \left[ \left( U \frac{\partial S}{\partial U} \right)^{2k+1} + \left( V \frac{\partial S}{\partial V} \right)^{2k+1} \right] \frac{\partial^2 S}{\partial U \partial V} dU dV \quad (22)$$

**Пространство равновесных состояний идеального газа.** Для случая идеального газа фундаментальное уравнение в энтропийном представлении имеет вид [5]:

$$S(U, V) = S_0 + Nk_B c_V \ln \left( \frac{U}{U_0} \right) + Nk_B \ln \left( \frac{V}{V_0} \right) \quad (23)$$

Используя условия термодинамического равновесия можно посчитать интенсивные термодинамические переменные  $T$  и  $P$  для идеального газа:

$$\frac{1}{T} = \frac{Nk_B c_V}{U}, \quad \frac{P}{T} = \frac{Nk_B}{V} \quad (24)$$

Подставляя эти соотношения в общую формулу для метрики  $g_s$  получаем простую метрику для пространства равновесных состояний идеального газа:

$$g_s = -(Nk_B)^{2k+2} \left[ c_V^{2k+2} \frac{dU^2}{U^2} + \frac{dV^2}{V^2} \right] \quad (25)$$

Расчеты показывают, что:

- компоненты символа Кристоффеля  $\Gamma_{00}^0 = -\frac{1}{U}$ , и  $\Gamma_{11}^1 = -\frac{1}{V}$ , а остальные компоненты равны нулю  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = 0$ , где  $\alpha, \beta, \gamma = 0, 1$
- все компоненты тензора Римана равны нулю  $R_{\alpha\beta\gamma\sigma} = 0$ , где  $\alpha, \beta, \gamma, \sigma = 0, 1$
- все компоненты тензора Риччи равны нулю  $R_{\alpha\beta} = 0$ , где  $\alpha, \beta = 0, 1$



- все компоненты тензора Эйнштейна равны нулю  $E_{\alpha\beta} = 0$ , где  $\alpha, \beta = 0, 1$
- скалярная кривизна равна нулю  $R = 0$

Последний результат означает отсутствие термодинамического взаимодействия в идеальном газе. Этот факт подтверждает правоту одной из основных идей ГТД о том, что кривизна пространства равновесных состояний является мерой термодинамического взаимодействия.

Напомним, что в теории относительности также существует пространство нулевой кривизны - это пространство Минковского. Отсюда следует, что идеальный газ является самой простой термодинамической системой в ГТД, также как пространство Минковского является самым простым примером в теории относительности.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Quevedo H. *Journal of Mathematical Physics*. **2007**, 48, 013506
- [2] Callen H.B. *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics*. **1985**, Wiley, New York
- [3] Arnold V.I. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. **1980**, Springer, New York
- [4] Vazquez A., Quevedo H., Sanchez A. *Journal of Geometry and Physics*. **2010**, 60, p. 1942-1949
- [5] Quevedo H., Sanchez A., Vazquez A. *General Relativity and Gravitation*. **2015**, 47, article id. 36, 18 pp.

#### REFERENCES

- [1] Quevedo H. *Journal of Mathematical Physics*. **2007**, 48, 013506
- [2] Callen H.B. *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics*. **1985**, Wiley, New York
- [3] Arnold V.I. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. **1980**, Springer, New York
- [4] Vazquez A., Quevedo H., Sanchez A. *Journal of Geometry and Physics*. **2010**, 60, p. 1942-1949
- [5] Quevedo H., Sanchez A., Vazquez A. *General Relativity and Gravitation*. **2015**, 47, article id. 36, 18 pp.

М. Әбішев<sup>1</sup>, А. Малыбаев<sup>1</sup>, Э. Кеведо<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

<sup>2</sup>Мексика ұлттық университеті, Мехико, Мексика

#### МІНСІЗ ГАЗДЫҢ ГЕОМЕТРОТЕРМОДИНАМИКАСЫ

**Аннотация.** Берілген жұмыстың мақсаты геометротермодинамиканың (ГТД) формализмін сипаттау және оның негізгі тұжырымдарын растау болып табылады. Бұл мақсатқа жету үшін идеал газдың термодинамикалық қасиеттерін есептеуде ГТД формализмі қолданылды. Бұл әдіс көмегімен: идеал газдың тепе-теңдік күйінің кеңістіктік метрикасы, Кристоффель символдары, Риман тензорының компоненттері, Риччи тензорының компоненттері, Эйнштейн тензорының компоненттері және скалярлық қисықтық есептелінді. Нәтижесінде ГТД формализмінің негізгі идеяларының бірі тепе-теңдік күйдегі кеңістік қисықтығы термодинамикалық жүйенің компоненттері арасындағы өзара әсерлесу өлшемі болып табылатындығы, идеал газ дербес жағдайы үшін расталды. ГТД формализмі басқа термодинамикалық жүйелерді, мысалы, қара құрдымды зерттеу үшін қолданылуы мүмкін.

**Тірек сөздер:** геометротермодинамика, фазалық кеңістік, тепе-теңдік кеңістік, энтропиялық көрініс, термодинамикалық қисықтық.

---



---

**МАЗМҰНЫ**

<i>Джумабаев Д.С., Жармагамбетов А.С.</i> Фредгольм интегро-дифференциалдық теңдеуі үшін сызықтық шеттік есепті шешудің сандық әдісі.....	5
<i>Асанова А.Т., Иманчиев А.Е., Қәдірбаева Ж.М.</i> Жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін көпнүктелі есептің бірмәнді шешілімділігі туралы .....	12
<i>Дауылбаев М. К., Джумабаев Д. С., Атахан Н.</i> Сингулярлы ауытқыған интегралды-дифференциалдық теңдеуге арналған шекаралық есептің асимптотикалық бейнелеуі.....	18
<i>Асқарова Ә.С., Бөлегенова С.Ә., Бөлегенова С.Ә., Максимов В.Ю., Оспанова Ш.С.</i> ПК-39 және БКЗ-160 қазандықтарының жану камераларының аэродинамикасы мен жылу масса алмасуын зерттеу.....	27
<i>Абишев М.Е., Токтарбай С., Абылаева А.Ж., Талхат А.З., Белсарова Ф.Б.</i> Екі массивті айналмалы дене өрісіндегі айналмалы сынақ дене орбитасының орнықтылығы.....	39
<i>Ақжігітова Э.М., Құрманғалиева В.О., Арбузов А.Б.</i> Мюонның радиациялық ыдырауын модельден тәуелсіз түрде сипаттау .....	54
<i>Асқарова Ә.С., Бөлегенова С.Ә., Бөлегенова С.Ә., Максимов В.Ю., Оспанова Ш.С.</i> ПК-39 қазандығының жану камерасындағы шаң тозанды көмір отынын жағу процесін сандық модельдеу.....	58
<i>Әбішев М., Малыбаев А., Кеведо Э.</i> Мінсіз газдың геометротермодинамикасы.....	64
<i>Шыныбаев М.Д., Беков А.А., Рахимжанов Б.Н., Моминов С.Б., Сәдібек А.Ж., Дауырбеков С.С., Жолдасов С.А.</i> Хилдың екінші есебіндегі ұйытқулы шеңбер типтес орбиталар.....	69
<i>Асқарова А.С., Бөлегенова С.А., Бөлегенова С.А., Максимов В.Ю., Максұтханова А.М., Турбекова А.Г., Бейсенов Х.И.</i> БКЗ-160 жану камерасындағы термохимиялық-газдандырылған көмір жануын зерттеудің есептеу эксперименті.....	75
<i>Салғараева Г.И., Базарбаева А.</i> Білім берудегі Steam жүйесі және робототехника.....	81
<i>Ақылбаев М.И., Пархатова С., Шалданбаев А.Ш.</i> Бірлесіп толыққан операторлар .....	87
<i>Шыныбаев М.Д., Дауырбеков С.С., Жолдасов С.А., Алиасқаров Д.Р., Мырзақасова Г.Е., Сәдібек А.Ж.</i> Жердің жасанды серігінің сәуле қысымынан алған ұйытқуын Делоне элементтерінде есепке алу.....	99
<i>Қабылбеков К.А., Аширбаев Х.А., Абекова Ж.А., Омашова Г.Ш., Қыдырбекова Ж.Б., Джумағалиева А.И.</i> Соққы құбылысын зерттеуге арналған компьютерлік зертханалық жұмысты ұйымдастырудың бланкі үлгісі.....	104
<i>Қожамқұлова Ж.Ж., Аманкелдіқызы Н., Кабаева Д.А.</i> Болашақ мұғалімдерді кәсіби дайындауда қолданылатын ақпараттық технологиялар және олардың даму болашағы.....	110
<i>Қошанов Б.Д., Әділбеков Е.Н., Дүйсен Е.</i> Шектелмеген облыста пуассон және Бигармониалы теңдеулер үшін Дирихле есебі шешімдер кеңістігінің өлшемі – I.....	116
<i>Қошанов Б.Д., Әділбеков Е.Н., Дүйсен Е.</i> Шектелмеген облыста Пуассон және бигармониалы теңдеулер үшін Дирихле есебі шешімдер кеңістігінің өлшемі – II.....	126
<i>Сапрыгина М.Б., Ақылбаев М.И., Шалданбаев А.Ш.</i> Штурм-Лиувилл операторының периодты кері есебі.....	132
<i>Қойшыева Т.Қ., Қожамқұлова Ж.Ж., Сабит Б.</i> Жоғары оқу орнында болашақ мұғалімдерді объектілі-бағдарлы жобалау негізінде кәсіби дайындау моделі.....	146
<i>Исаева Г.Б., Бейсенова А.М.</i> Виртуалды машина және виртуалды машина ерекшеліктері мен виртуалдану деңгейлері жайлы жалпы мәселелер.....	153
<i>Сарсенбаев Х.А., Хамзина Б.С., Колдасова Г.А., Исаева Г.Б.</i> Көлденең ұңғымалардың өнімдік қабатын тиімді ашу үшін биополимерлі бұрғылау ерітіндісін қолдану.....	161
<b>Ғалымды еске алу</b>	
Э.Г. Боос.....	166

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Джумабаев Д.С., Жармагамбетов А.С.</i> Численный метод решения линейной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма.....	5
<i>Асанова А.Т., Иманчиев А.Е., Кадирбаева Ж.М.</i> Об однозначной разрешимости многоточечной задачи для системы нагруженных дифференциальных уравнений .....	12
<i>Дауылбаев М. К., Джумабаев Д. С., Атахан Н.</i> Асимптотическое представление сингулярно возмущенных краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений.....	18
<i>Аскарова А.С., Болегенова С.А., Болегенова С.А., Максимов В.Ю., Оспанова Ш.С.</i> Исследование аэродинамики и теплообмена в топочных камерах котлов ПК-39 и БКЗ-160 .....	27
<i>Абишев М.Е., Токтарбай С., Абылаева А.Ж., Талхат А.З., Белисарова Ф.Б.</i> Устойчивость орбиты вращательного движения пробного тела в поле двух массивных вращающихся тел.....	39
<i>Акжигитова Э.М., Курмангалиева В.О., Арбузов А.Б.</i> Описание радиоационного распада мюона в модельно – независимом подходе .....	54
<i>Аскарова А.С., Болегенова С.А., Болегенова С.А., Максимов В.Ю., Шортанбаева Ж.К.</i> Численное моделирование процессов сжигания пылеугольного топлива в топочной камере котла ПК 39.....	58
<i>Абишев М., Мальбаев А., Кеведо Э.</i> Геометротермодинамика идеального газа.....	64
<i>Шинибаев М.Д., Беков А.А., Рахимжанов Б.Н., Моминов С.Б., Садыбек А.Ж., Даиырбеков С.С., Жолдасов С.А.</i> Возмущенная орбита кругового типа во второй задаче Хилла.....	69
<i>Аскарова А.С., Болегенова С.А., Болегенова С.А., Максимов В.Ю., Максутханова А.М., Турбекова А.Г., Бейсенов Х.И.</i> Вычислительный эксперимент по исследованию горения термохимически-газифицированного угля в топочной камере котла БКЗ-160.....	75
<i>Салгарева Г.И., Базарбаева А.</i> Система Steam в образовании и робототехника.....	81
<i>Ақылбаев М.И., Пархатова С., Шалданбаев А.Ш.</i> О совместно полных операторах Штурма-Лиувилля.....	87
<i>Шинибаев М.Д., Даирбеков С.С., Жолдасов С.А., Алиаскаров Д.А., Мырзакасова Г.Е., Садыбек А.Ж.</i> Возмущения спутника земли от светового давления в элементах Делоне.....	99
<i>Кабылбеков К.А., Аширбаев Х.А., Абекова Ж.А., Омашова Г.Ш., Кыдырбекова Ж.Б., Джумагалиева А.И.</i> Организация выполнения компьютерной лабораторной работы по исследованию явления биения.....	104
<i>Кожамкулова Ж.Ж., Аманкелдикызы Н., Кабаева Д.А.</i> Информационные технологии, используемые при подготовке будущих педагогов, и их развитие.....	110
<i>Кошанов Б.Д., Адильбеков Е.Н., Дуйсен Е.</i> Размерность пространства решений задачи Дирихле для уравнений Пуассона и бигармонического уравнения в неограниченной области-I.....	116
<i>Кошанов Б.Д., Адильбеков Е.Н., Дуйсен Е.</i> Размерность пространства решений задачи Дирихле для уравнений Пуассона и бигармонического уравнения в неограниченной области- II.....	126
<i>Сапрыгина М.Б.<sup>1</sup>, Акылбаев М.И., Шалданбаев А.Ш.</i> Обратная периодическая задача оператора Штурма-Лиувилля.....	132
<i>Койшиева Т.К., Кожамкулова Ж.Ж., Сабит Б.</i> Профессиональная подготовка будущих преподавателей в высших учебных заведениях на основе объектно-ориентированного проектирования .....	146
<i>Исаева Г.Б., Бейсенова А.М.</i> Виртуальные машины, преимущества виртуальных машин и уровни виртуализации...153	
<i>Сарсенбаев Х.А., Хамзина Б.С., Колдасова Г.А., Исаева Г.Б.</i> Применение биополимерных буровых растворов для эффективного вскрытия продуктивных горизонтов горизонтальных скважин.....	161
<b>Памяти ученого</b>	
Краткий очерк научной и общественной деятельности академика Национальной академии наук Республики Казахстан Э.Г.Бооса.....	166

## CONTENTS

<i>Dzhumabaev D.S., Zharmagambetov A.S.</i> Numerical method for solving a linear boundary value problem for fredholm integro-differential equations.....	5
<i>Assanova A.T., Imanchiev A.E., Kadirbayeva Zh.M.</i> On the unique solvability of a multi-point problem for system of the loaded differential equations hyperbolic type .....	12
<i>Dauylbayev M. K., Dzhumabaev D. S., Atakhan N.</i> Asymptotical representation of singularly perturbed boundary value problems for integro-differential equations .....	18
<i>Askarova A.S., Bolegenova S.A., Bolegenova S.A., Maximov V.Yu., Ospanova Sh.S.</i> Investigation of aerodynamics and heat and mass transfer in the combustion chambers of the boilers PK-39 and BKZ-160.....	27
<i>Abishev M.E., Toktarbay S., Abylayeva A.Zh., Talkhat A.Z., Belissarova F.B.</i> The orbital stability of the motion of a test particle in a field of two massive rotating bodies.....	39
<i>Akzhigitova E.M., Kurmangaliyeva V.O., Arbuzov A.B.</i> Description of radiative muon decay using model-independent approach.....	54
<i>Askarova A.S., Bolegenova S.A., Bolegenova S.A., Maximov V.Yu., Shortanbaeva Zh.K.</i> Numerical modeling of burning pulverized coal in the combustion chamber of the boiler PK 39.....	58
<i>Abishev M., Malybayev A., Quevedo H.</i> Geometrothermodynamics of the ideal gas .....	64
<i>Shinibaev M.D., Bekov A.A., Rahimganov B.N., Mominov S.B., Sadybek A.G., Dairbekov S.S., Zholdasov S.A.</i> Perturbed orbit of a circular type for the Hill second task .....	69
<i>Askarova A.S., Bolegenova S.A., Bolegenova S.A., Maximov V.Yu., Maxutkhanova A.M., Turbekova A.G., Beisenov Kh.I.</i> A Computational experiment for studying the combustion of thermochemically-gasified coal in the combustion chamber of the boiler BKZ-160.....	75
<i>Salgarayeva G.I., Bazarbayeva A.</i> Steam system in education and robotics.....	81
<i>Akylbayev M. I., Parkhatova S., Shaldanbayev A.Sh.</i> On jointly completeness of Sturm-Liouville operators.....	87
<i>Shinibaev M.D., Dairbekov S.S., Zholdasov S.A., Aliaskarov D.A., Myrzakasova G.E., Sadybek A.G.</i> Perturbations satellites from the light pressure in the delaunay elements.....	99
<i>Kabyrbekov K.A., Ashirbaev H. A., Abekova Zh. A., Omashova G.Sh., Kydyrbekova Zh. B., Dzhumagaliyeva A.I.</i> The organization of performance of computer laboratory operation on examination of the phenomenon of palpation.....	104
<i>Kozhamkulova Zh.Zh., Amankeldikyzy N., Kabaeva D.A.</i> Information technology used in the preparation of future teachers and their development.....	110
<i>Koshanov B.D., Adilbekov E.N., Duysen E.</i> The dimension of the space solutions of the dirichlet problem for the Poisson and biharmonic equations in unbounded Domains – I.....	116
<i>Koshanov B.D., Adilbekov E.N., Duysen E.</i> The dimension of the space solutions of the Dirichlet problem for the Poisson and biharmonic equations in unbounded domains – II.....	126
<i>Saprigina M.B., Akylbayev M. I., Shaldanbayev A.Sh.</i> The inverse periodic problem of the Sturm-Liouville operator.....	132
<i>Koysheva T.K., Kozhamkulova Zh.Zh., Sabit B.</i> Training in higher education for future teachers on the basis of object-oriented design.....	146
<i>Issayeva G.B., Beisenova A.M.</i> The virtual machines, advantages of the virtual machines and virtualization levels.....	153
<i>Sarsenbayev Kh.A., Khamzina B.S., Koldassova G.A., Issayeva G.B.</i> Application of biopolymer drilling fluid for effective opening productive horizons horizontal wells.....	161
<b>The memory of the scientist</b>	
E. G. Boos .....	166

**Publication Ethics and Publication Malpractice  
in the journals of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan**

For information on Ethics in publishing and Ethical guidelines for journal publication see <http://www.elsevier.com/publishingethics> and <http://www.elsevier.com/journal-authors/ethics>.

Submission of an article to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan implies that the described work has not been published previously (except in the form of an abstract or as part of a published lecture or academic thesis or as an electronic preprint, see <http://www.elsevier.com/postingpolicy>), that it is not under consideration for publication elsewhere, that its publication is approved by all authors and tacitly or explicitly by the responsible authorities where the work was carried out, and that, if accepted, it will not be published elsewhere in the same form, in English or in any other language, including electronically without the written consent of the copyright-holder. In particular, translations into English of papers already published in another language are not accepted.

No other forms of scientific misconduct are allowed, such as plagiarism, falsification, fraudulent data, incorrect interpretation of other works, incorrect citations, etc. The National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan follows the Code of Conduct of the Committee on Publication Ethics (COPE), and follows the COPE Flowcharts for Resolving Cases of Suspected Misconduct ([http://publicationethics.org/files/u2/New\\_Code.pdf](http://publicationethics.org/files/u2/New_Code.pdf)). To verify originality, your article may be checked by the Cross Check originality detection service <http://www.elsevier.com/editors/plagdetect>.

The authors are obliged to participate in peer review process and be ready to provide corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. All authors of a paper should have significantly contributed to the research.

The reviewers should provide objective judgments and should point out relevant published works which are not yet cited. Reviewed articles should be treated confidentially. The reviewers will be chosen in such a way that there is no conflict of interests with respect to the research, the authors and/or the research funders.

The editors have complete responsibility and authority to reject or accept a paper, and they will only accept a paper when reasonably certain. They will preserve anonymity of reviewers and promote publication of corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. The acceptance of a paper automatically implies the copyright transfer to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.

The Editorial Board of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan will monitor and safeguard publishing ethics.

Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайтах:

[www.nauka-nanrk.kz](http://www.nauka-nanrk.kz)

<http://www.physics-mathematics.kz>

**ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)**

Редакторы *М. С. Ахметова, Д. С. Аленов, Т. А. Апендиев*  
Верстка на компьютере *А. М. Кульгинбаевой*

Подписано в печать 10.04.2017.  
Формат 60x881/8. Бумага офсетная. Печать – ризограф.  
11,4 п.л. Тираж 300. Заказ 2.

---

*Национальная академия наук РК*  
*050010, Алматы, ул. Шевченко, 28, т. 272-13-18, 272-13-19*